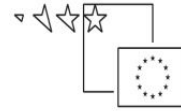




REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT



Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

POSLOVNA MATEMATIKA

IVANA DOMJAN

Višješolski strokovni program: Ekonomist
Učbenik: Poslovna matematika (1. del predmeta Poslovna matematika s statistiko)
Gradivo za 1. letnik

Avtorica:

Ivana Domjan, univ. dipl. ekon.
EKONOMSKA ŠOLA MURSKA SOBOTA
Višja strokovna šola



Strokovna recenzentka:

Milena Fundak, pred. učit. mat. in fiz., univ. dipl. ekon

Lektorica:

Katarina Balažic, prof. slov. j. in univ. dipl. komparat.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51-7:33 (075.8) (0.034.2)

DOMJAN, Ivana

Poslovna matematika [Elektronski vir] : gradivo za 1. letnik / Ivana Domjan. - El. knjiga. - Ljubljana : Zavod IRC, 2008. - (Višješolski strokovni program Ekonomist / Zavod IRC)

Način dostopa (URL): http://www.zavod-irc.si/docs/Skriti_dokumenti/Poslovna_matematika-Domjan.pdf. - Projekt Impletum

ISBN 978-961-6820-52-3
249248256

Izdajatelj: Konzorcij višjih strokovnih šol za izvedbo projekta IMPLETUM
Založnik: Zavod IRC, Ljubljana.
Ljubljana, 2008

© Avtorske pravice ima Ministrstvo za šolstvo in šport Republike Slovenije.

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Impletum Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju od 2008 do 2011.

Projekt oziroma operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada in Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v Operativnem programu razvoja človeških virov za obdobje od 2007 do 2013, razvojne prioritete Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja in prednostne usmeritve Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.

Vsebina tega dokumenta v nobenem primeru ne odraža mnenja Evropske unije. Posamezen avtor/soavtor prevzema odgovornost za vsebino dokumenta.

KAZALO VSEBINE

1	UVOD V RAČUNANJE.....	6
2	RAZMERJA IN SORAZMERJA	10
2.1	RAZMERJA	10
2.2	SORAZMERJA	12
2.2.1	Enostavno sorazmerje.....	12
2.2.2	Sestavljeno sorazmerje	13
2.2.3	Premo sorazmerje	15
2.2.4	Obratno sorazmerje.....	17
3	SKLEPNI RAČUN	21
3.1	ENOSTAVNI SKLEPNI RAČUN	21
3.1.1	Metoda direktnega sklepanja	21
3.1.2	Sorazmerje	23
3.1.3	Sklepna shema	25
3.2	SESTAVLJENI SKLEPNI RAČUN	26
3.2.1	Metoda direktnega sklepanja	26
3.2.2	Sorazmerje	27
3.2.3	Sklepna shema	28
3.2.4	Reševanje s pomočjo enačb	29
4	VERIŽNI RAČUN.....	32
5	RAZDELILNI RAČUN	39
5.1	ENOSTAVNI RAZDELILNI RAČUN	39
5.1.1	Delitev na enake dele.....	40
5.1.2	Delitev v razmerju	40
5.1.3	Delitev z uporabo ulomkov ali odstotkov.....	42
5.1.4	Delitev z razlikami.....	43
5.2	SESTAVLJENI RAZDELILNI RAČUN	45
5.2.1	Sestavljeni razdelilni račun z združljivimi ključi	45
5.2.2	Sestavljeni razdelilni račun s parcialnimi ključi.....	46
6	ODSTOTNI RAČUN.....	52
6.1	RAČUNANJE OSNOVNIH KOLIČIN ODSOTNEGA RAČUNA.....	54
6.2	RAČUNANJE POVEČANE IN ZMANJŠANE CELOTE	57
6.3	REŠEVANJE Z ENAČBAMI	64
7	KALKULACIJE.....	69
7.1	TRGOVINSKA KALKULACIJA.....	69
7.1.1	Enostavna delitvena kalkulacija	72
7.1.2	Sestavljena delitvena trgovinska kalkulacija.....	75
7.2	PROIZVODNA KALKULACIJA.....	76
7.2.1	Enostavna delitvena kalkulacija	76
7.2.2	Kalkulacija z ekvivalentnimi števili	77
7.2.3	Kalkulacija za vezane proizvode	78
7.2.4	Kalkulacija z dodatki	78
8	OBRESTNI RAČUN	84
8.1	NAVADNI OBRESTNI RAČUN	88
8.1.1	Povečana glavnica in navadni obrestni račun.....	93
8.1.2	Zmanjšana glavnica in navadni obrestni račun.....	96
8.2	OBRESTNOOBRESTNI RAČUN.....	98
8.2.1	Dekurzivni način obrestovanja – celoletna kapitalizacija	99
8.2.2	Anticipativni način obrestovanja – celoletna kapitalizacija	103

8.2.3	Pogostejša kapitalizacija	108
8.2.4	Ekvivalentna in povprečna obrestna mera	115
9	HRANILNE IN PERIODIČNE VLOGE.....	121
9.1	VLOGE IN DVIGI.....	121
9.1.1	Progresivna metoda.....	122
9.1.2	Stopnjevalna metoda	125
9.2	PERIODIČNI DENARNI TOKOVI IN RENTE	127
9.2.1	Periodične vloge.....	128
9.2.2	Periodična izplačila	132
9.2.3	Rentno varčevanje.....	135
10	POSOJILA.....	139
10.1	METODA ENAKIH RAZDOLŽNIN	141
10.2	METODA ENAKIH ANUITET	143
	POJMOVNIK.....	147
	REŠITEV NALOG	153
	PREGLED OBRAZCEV.....	155
	LITERATURA IN VIRI.....	165

KAZALO SLIK

Slika 1: Graf premosorazmernih količin	15
Slika 2: Graf odvisnosti teže in vrednosti blaga	17
Slika 3: Graf oobratnosorazmernih količin	17
Slika 4: Graf odvisnosti števila delavcev in časa dela	18
Slika 5: Razdelilni račun s parcialnimi ključi	50
Slika 6: Izračun odstotkov, ki se nanašajo na isto osnovo	66
Slika 7: Izračun zaporedne spremembe odstotkov	66
Slika 8: Dekurzivno obrestovanje	91
Slika 9: Anticipativno obrestovanje	86
Slika 10: Navadni obrestni račun	87
Slika 11: Obrestno obrestni račun	92
Slika 12: Primerjava navadnega in obrestno obrestnega računa	93
Slika 13: Shematski prikaz progresivne metode	127
Slika 14: Shematski prikaz progresivne metode z razobrestovanjem	128
Slika 15: Shematski prikaz rentnega varčevanja	128
Slika 16: Prenumerandna vloga	129
Slika 17: Postnumerandana vloga	131
Slika 18: Preračun prenumerandnih zneskov na konec obdobja	134
Slika 19: Preračun postnumerandnih zneskov na konec obdobja	129
Slika 20: Preračun postnumerandnih vlog na začetek obdobja	131

KAZALO TABEL

Tabela 1: Tabela merskih enot	35
Tabela 2: Tečajnica banke Slovenije na dan 17. 7. 2008	36
Tabela 3: Zapis odstotnih (promilnih) mer	57
Tabela 4: Osnovne enačbe odstotnega in promilnega računa	58
Tabela 5: Osnovni obrazci za količine izračunane in C^+ in C^-	63
Tabela 6: Osnovni obrazci za količine navadnega obrestnega računa	98
Tabela 7: Osnovni obrazci za izračun osnovnih količin iz povečane glavnice	100
Tabela 8: Osnovni obrazci za izračun osnovnih količin iz zmanjšane glavnice	103
Tabela 9: Osnovni obrazci pri pogostejši kapitalizaciji – relativna obrestna mera	116
Tabela 10: Osnovni obrazci pri pogostejši kapitalizaciji – konformna obrestna mera	118
Tabela 11: Osnovni obrazci za izračun ekvivalentnih obrestnih mer	122

PREDGOVOR

Vsak začetni korak je težak, saj nimamo predstave o tem, kaj nas čaka. Da bi vam olajšala prvi in vse naslednje korake učenja poslovne matematike, sem pripravila učbenik z izbranimi vsebinami iz kataloga znanj za naš predmet. Učbenik je namenjen študentom višješolskega strokovnega programa Ekonomist in je usklajen s katalogom znanj za poslovno matematiko v okviru predmeta poslovna matematika s statistiko. Za strokovni pregled in priporočila se iskreno zahvaljujem ga. Mileni Fundak, za jezikovni pregled pa ga. Katarini Balažic.

Da bi bilo naše delo lažje, bomo skupaj pregledali vsebino učbenika. Učbenik je sestavljen iz desetih poglavij, ki nas sistematično vodijo skozi teoretične osnove in računske primere ter vaje. Na začetku vsakega poglavja je predstavljena vsebina poglavja, temu sledi razlaga vsebine, na koncu vsakega poglavja pa so pripravljena vprašanja za utrjevanje, raziskovanje, razmišljanje in usmeritve za dodatne vaje ter povzetek poglavja.

V učbeniku srečamo naslednje oznake:



osnovne enačbe, ki si jih je vredno zapomniti



praktične naloge s postopkom reševanja



praktične naloge, ki jih reši študent sam



utrjujemo, razmišljamo, raziskujemo, vadimo

Dodatne vaje z rešitvami za samokontrolo so pripravljene in vključene kot zbirka nalog na koncu tega učbenika.

Ivana Domjan



1 UVOD V RAČUNANJE

Z vsebino tega poglavja se vas je večina srečala že v srednji šoli pri predmetu matematika. Gre za ponovitev izbranih vsebin, ki jih bomo potrebovali pri poslovnih in finančnih računih obravnavanih v tem učbeniku. Pa dajmo.

1 UVOD V RAČUNANJE

Preden se lotimo vsebinske obravnave posameznih vrst računov v Poslovni matematiki, se najprej ustavimo pri ponovitvi osnovnih matematičnih pravil računanja. Že v osnovni in srednji šoli smo vsa ta pravila dobro obvladali, vendar ne bo odveč, če jih ponovimo. Tako bomo boljše pripravljeni na delo in se ne bomo ubadali s pravili računanja. V tem poglavju bomo ponovili: vrste množic, računske zakone, pravila za računanje z množicami, predvsem tistimi, ki jih bomo potrebovali za reševanje računov v poslovni matematiki.

Preglejmo številske množice. Odnosi med posameznimi **vrstami množic** so razvidni iz odnosa med številskimi množicami:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{množica naravnih števil}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{množica celih števil}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{množica racionalnih števil}$$

$$\mathbb{I} = \left\{ x; x \neq \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{množica iracionalnih števil}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \quad \text{množica realnih števil}$$

Za omenjene množice števil veljajo **računski zakoni**:

$$a + b = b + a \quad \text{ali} \quad a \times b = b \times a \quad \text{zakon o zamenjavi – komutativnost}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c \quad \text{ali} \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times b \times c \quad \text{zakon o združevanju – asociativnost}$$

$$(a + b)d = a \times d + b \times d \quad \text{zakon o razčlenjevanju – distributivnost}$$

$$a \times d + b \times d = d(a + b) \quad \text{izpostavljanje skupnega faktorja – distributivnost v drugo smer}$$

Pri računanju z realnimi števili pazimo na **odpravljanje oklepajev** in **množenje števil z različnima predznakoma**:

$$a + (-b) = a - b$$

$$a(-b) = -a \times b$$

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$(-a)b = -a \times b \quad \text{množenje števil}$$

$$a + (b - c) = a + b - c \quad \text{odpravljanje oklepajev}$$

$$(-a) \times (-b) = a \times b \quad \text{z različnima}$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

$$a \times b = a \times b \quad \text{predznakoma}$$

Pazimo še na $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$ ali $b = 0$ ali $a = 0$ in $b = 0$.

Matematično ima operacija množenja in deljenja prednost pred seštevanjem in odštevanjem. Ustavimo se še pri **računanju z racionalnimi števili** – ulomki. Ulomek je deljenje dveh števil, ki jih prikažemo s količnikom

$$a : b = \frac{a}{b}; b \neq 0$$

Ulomke lahko **seštevamo, odštevamo, množimo** ali **delimo**:

$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}; d \neq 0$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}; b, d \neq 0$	seštevanje ulomkov
$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}; d \neq 0$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}; b, d \neq 0$	odštevanje ulomkov
$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}; b, d \neq 0$	$n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b}; b \neq 0$	množenje ulomkov
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}; b, c, d \neq 0$	$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}; b, a \neq 0$	deljenje ulomkov

Pazimo tudi na **predznak ulomka**:

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}; b \neq 0 \quad \text{in} \quad \frac{a}{b} = \frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b}; b \neq 0$$

Ulomke lahko tudi **razširjamo** ali **krajšamo** ali jih med seboj **izenačujemo**:

$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}; b, k \neq 0$	razširjanje ulomkov
$\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}} = \frac{a}{b}; b, k \neq 0$	krajšanje ulomkov
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = c \cdot b; b, d \neq 0$	enakost dveh ulomkov

Opozorimo še na nekaj pomembnih **računskih enakosti**:

$$\begin{aligned} (a)^0 &= 1; a \neq 0 & (a)^{-1} &= \frac{1}{a}; a \neq 0 & (a)^{-n} &= \frac{1}{a^n}; a \neq 0 \\ (-a)^{2n} &= a^{2n} & (-a)^{2n+1} &= -a^{2n+1} \end{aligned}$$

Ker smo s tem prešli tudi na potence, omenimo še osnovna **pravila za računanje s potencami**:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	množenje potenc
$a^m : a^n = a^{m-n}$	deljenje potenc
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	potenciranje potenc
$(ab)^n = a^n \times b^n$	potenciranje produkta dveh števil
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	potenciranje količnika dveh števil

Pregled omenjenih množic števil in računskih operacij bomo s pridom uporabljali pri obravnavanju posameznih vrst računov v poslovni matematiki.



2 RAZMERJA IN SORAZMERJA

Poglavje nam bo pomagalo, da bomo obvladali matematični zapis in grafični prikaz razmerja, premege in obratnega sorazmerja ter sorazmerne relacije med dvema spremenljivkama.

2 RAZMERJA IN SORAZMERJA

V poglavju o razmerjih in sorazmerjih bomo spoznali opredelitve razmerja in sorazmerja ter njihove vrste, pravila za računanje z razmerji in sorazmerji ter odvisnost spremenljivk v poslovnih računih, ki jih v tem poglavju predstavlja premo in obratno sorazmerje. Predstavili bom grafično prikazovanje odvisnosti količin. Usvojeno znanje tega poglavja bo predstavljalo osnovo za reševanje poslovnih računov (sklepnege, razdelilnega, odstotnega ter ostalih računov).

2.1 RAZMERJA

Kdo ne zna razložiti rezultata nogometne tekme? Nič lažjega, saj vemo, da gre za rezultat, ki sta ga dosegli dve nogometni ekipi. Ko ga izgovorimo, vemo koliko zadetkov so gledalci videli na tekmi. Če nas zanima, kdo je igral, je potrebno, da nam tisti, ki nas obvešča o izidu, pove, kateri dve športni ekipa sta se srečali. Če isti primer pogledamo z vidika poslovne matematike, gre v prvem primeru za razmerje, v drugem primeru pa za sorazmerje. V nadaljevanju poglavja bomo najprej predstavili razmerje, nato pa še sorazmerje.

Razmerje predstavlja velikostni odnos med dvema količinama. **Razmerje** je zato **nakazano deljenje števila a s številom b**. V matematiki smo zapisali to razmerje v obliki ulomka, medtem ko bomo v poslovni matematiki uporabljali zapis odnosa z razmerjem **a : b**.

$$\frac{a}{b} = a : b = k \quad (\text{preberemo a proti b})$$



Če nakazano deljenje izvedemo ali izračunamo, dobimo količnik (kvocient) razmerja, ki ga označimo s k. Ker smo ugotovili, da je razmerje drugače zapisan ulomek, veljajo za računanje z razmerji enaka pravila kot za računanje z ulomki.

Glede na število členov v razmerju ločimo:

- **enostavna razmerja** – če sta v odnosu dva člena (razmerski števili) razmerja – **a : b**
- **sestavljena razmerja** – če sta v odnosu več kot dva člena razmerja – **a : b : c**

Spomnimo se, da lahko ulomke **razširjamo** ali **krajšamo** z istim, od nič različnim številom. Iz tega pravila izhaja, da **se razmerje ne spremeni, če ga razširimo ali krajšamo z istim, od nič različnim številom**. Razširjamo ali krajšamo vedno oba člena razmerja.

$a : b = ak : bk; k \neq 0$ razširjanje razmerja

$ak : bk = a : b, k \neq 0$ krajšanje razmerja



Uredimo dana razmerja:

$125 : 75 = 5 : 3$ (krajšamo s 25)

$51,6 : 2,20 : 18 = 5160 : 220 : 1800 = 258 : 11 : 90$ (razširimo s 100 in krajšamo z 20)

Iz primerov je razvidno, da je potrebno dana razmerja okrajšati do konca, kar pomeni, da so v rezultatu razmerja vedno naravna števila, ki imajo edini skupni delitelj, naravno število 1. Razmerja krajšamo tako dolgo, da imajo členi razmerja največji skupni delitelj število 1.

Enako pravilo velja tudi za reševanje razmerja, če so členi razmerja podani v obliki ulomka. Kaj počnemo z ulomki, že vemo. Izkoristimo svoje znanje in rešimo razmerje, ki je podano v obliki ulomkov. Pot je enostavna. Poiščemo najmanjši skupni večkratnik, ulomke razširimo na naravna števila in jih uredimo tako, da dobimo urejeno razmerje. Preprosto, gre nam že brez zapletov.



$$1\frac{5}{8} : \frac{4}{5} : 1,20 = \frac{13}{8} : \frac{4}{5} : \frac{120}{100} = 325 : 160 : 240 = \mathbf{65 : 32 : 48}$$

(odpravimo ulomek (skupni imenovalec 200) in krajšamo s 5)



2. 1 Poskusite še vi. Uredite dana razmerja:

a. $2187 : 243 : 90 =$

b. $28 : 27,5 : 17 =$

c. $2\frac{5}{9} : \frac{3}{5} : \frac{10}{25} =$

Poudarimo, da je posebna oblika razmerja še **obratno razmerje**. Beseda obratna vrednost nam je znan pojem, saj smo ga v matematiki že zapisovali. Kako že? Na potenco -1 ali zapis z ulomkom $1/a$. Razmerje torej obrnemo tako, da zapišemo obratno vrednost členov osnovnega razmerja. Za **enostavno razmerje** velja, da lahko obratno razmerje zapišemo tudi samo z zamenjavo členov osnovnega razmerja.



$$(a : b)^{-1} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} : \frac{a}{ab} = b : a$$



Zapišimo obratno razmerje razmerja 7 : 15.

$$(7 : 15)^{-1} = \frac{1}{7} : \frac{1}{15} = \frac{15}{105} : \frac{7}{105} = \mathbf{15 : 7} \quad (\text{odpravimo ulomek (skupni imenovalec 105)})$$

Za **sestavljena razmerja** zapišemo obratne vrednosti členov osnovnega razmerja in dobimo:

$$(a : b : c)^{-1} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$



Zapišimo obratno razmerje sestavljenega razmerja $2\frac{1}{4} : 5,7 : 2$.

$$\left(2\frac{1}{4} : 5,7 : 2\right)^{-1} = \left(\frac{9}{4} : \frac{57}{10} : \frac{2}{1}\right)^{-1} = \frac{4}{9} : \frac{10}{57} : \frac{1}{2} = \mathbf{152 : 60 : 171}$$

(vse člene zapišemo v obliki ulomka, zapišemo obratno vrednost ulomka, odpravimo ulomek (skupni imenovalec 342))



2. 2 Zapišite obratna razmerja danih razmerij:

a. $2187 : 243 : 90 =$

b. $28 : 27,5 : 17 =$

c. $2\frac{5}{9} : \frac{3}{5} : \frac{10}{25} =$

2.2 SORAZMERJA

Spomnimo se izida nogometne tekme. Zdaj ko vemo tudi, kdo je igral, lahko spoznamo značilnosti sorazmerja. **Enakost** dveh **razmerij** imenujemo **sorazmerje**. Vrste sorazmerij delimo:

- glede na **število** enakosti razmerij v:
 - a) **enostavno sorazmerje** – enačba enostavnih razmerij $a : b = c : d$
 - b) **sestavljeno sorazmerje** – enačbe sestavljenih sorazmerij $a : b : c = d : e : f$
- glede na **odnos** med količinami na:
 - a) **premo sorazmerje** – povečanje (zmanjšanje) ene količine povzroči povečanje (zmanjšanje) druge količine za enako količino (faktor) – odnos VEČ – VEČ ali odnos MANJ – MANJ
 - b) **obratno sorazmerje** – povečanje (zmanjšanje) ene količine povzroči zmanjšanje (povečanje) druge količine za enako količino (faktor) – odnos VEČ – MANJ ali odnos MANJ – VEČ.

2.2.1 Enostavno sorazmerje

Enostavno sorazmerje zapišemo kot enakost dveh enostavnih razmerij:



$$a : b = c : d \quad (\text{preberemo a proti b je kakor c proti d})$$

Vsi simboli (a, b, c, d) označujejo člene (razmerska števila) sorazmerja. Člena **a** in **d** se imenujeta **zunanja člena** sorazmerja, medtem ko člen **b** in **c** **notranja člena** sorazmerja. Za lažje računanje sorazmerij veljajo pravila, ki nam omogočajo, da lahko naloge sorazmerij rešujemo brez problemov. Vsa navedena pravila (zakovitosti) so preprosta in pravijo takole:

- **Produkt zunanjih členov sorazmerja je enak produktu notranjih členov sorazmerja.**

$$\begin{array}{c} \boxed{a : b = c : d} \\ \text{notranji členi sorazmerja} \\ \Rightarrow a \times d = c \times b \\ \boxed{a : b = c : d} \\ \text{zunanji členi sorazmerja} \end{array}$$

Preverimo pravilnost tega pravila:

$$a : b = c : d \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d} \Rightarrow a \times d = c \times b$$



Izračunajmo neznani člen sorazmerja:

$$5 : 7 = 10 : d \quad 5 \times d = 7 \times 10 \quad d = \frac{7 \times 10}{5} \quad d = 14$$

- **Sorazmerje se ne spremeni, če zamenjamo položaj zunanjih oziroma notranjih členov.**

$$\begin{aligned} a : b = c : d &\Rightarrow a : c = b : d \quad (\text{zamenjali smo položaj notranjih členov b in c}) \\ &\Rightarrow d : b = c : a \quad (\text{zamenjali smo položaj zunanjih členov a in d}) \end{aligned}$$



Zamenjajmo položaj notranjih in zunanjih členov tako, da se sorazmerje ne bo spremenilo.

$$5 : 7 = 10 : 14 \quad 7 : 5 = 14 : 10 \quad \text{ali} \quad 5 : 10 = 7 : 14 \quad \text{ali} \quad 14 : 7 = 10 : 5 \quad \text{ali} \quad 14 : 10 = 7 : 5$$

- Sorazmerje se ne spremeni, če po en zunanji in en notranji člen delimo ali množimo z istim, od nič različnim številom.

$$a : b = c : d \Rightarrow (a \times m) : b = (c \times m) : d \quad (\text{razširjanje člena a in c s številom m})$$

$$\text{ali} \quad \Rightarrow a : \left(\frac{b}{n}\right) = c : \left(\frac{d}{n}\right) \quad (\text{krajšanje člena b in d s številom n})$$

$$\text{ali} \quad \Rightarrow (a \times r) : (b \times r) = c : d \quad (\text{razširjanje člena a in b s številom r})$$



Uredimo dano sorazmerje.

$$\frac{2}{3} : \frac{10}{21} = 7 : 5 \quad 14 : 10 = 7 : 5 \quad 7 : 5 = 7 : 5 \quad 7 : 7 = 5 : 5 \quad 1 : 1 = 1 : 1$$

(odpravimo ulomek (skupni imenovalec 21) in krajšamo en zunanji (14) in en notranji člen (10) z 2, upoštevamo pravila reševanja sorazmerij)

- Razmerski števili a in b oziroma c in d sta večkratnika istega števila.

$$a : b = c : d \Rightarrow a = c \times m, b = d \times m \Rightarrow (a \times m) : (b \times m) = c : d$$

Razmerski števili a in b sta mnogokratnika števila m, zato ju lahko krajšamo in dobimo osnovno sorazmerje $a : b = c : d$.

$$a : b = c : d \Rightarrow c = a \times n, d = b \times n \Rightarrow a : b = (c \times n) : (d \times n)$$



Razmerski števili zapišimo kot produkt večkratnikov istega števila.

$$42 : 30 = 7 : 5 \quad (2 \times 21) : (2 \times 15) = 7 : 5 \quad \text{ali} \quad (6 \times 7) : (6 \times 5) = 7 : 5$$

$$8 : 17 = 6 : 8 \quad 8 : 17 = (2 \times 3) : (2 \times 4)$$

2.2.2 Sestavljeno sorazmerje

Sestavljeno sorazmerje zapišemo kot enakost večjega števila sestavljenih razmerij:

$$a : b : c = x : y : z$$



Tudi pri sestavljenih sorazmerjih govorimo o pravilih, ki jih upoštevamo pri računanju:

- Če izenačimo po vrednosti več enostavnih razmerij, dobimo sestavljeno sorazmerje: $a : x = k \quad b : y = k \quad c : z = k$

Količnik razmerij je v vseh primerih enak, zato velja $k = k = k$. Iz te trditve lahko zapišemo urejen zapis enakosti sorazmerij:

$$a : x = b : y = c : z \quad \text{kar drugače zapišemo v urejeni obliki: } a : b : c = x : y : z$$



Iz danih enostavnih razmerij $10 : 5$, $12 : 6$ in $14 : 7$ zapišimo urejeno sestavljeno sorazmerje.

$$10 : 5 = k \quad 12 : 6 = k \quad 14 : 7 = k \quad k = 2$$

$$10 : 5 = 12 : 6 = 14 : 7 \quad 10 : 12 : 14 = 5 : 6 : 7 \quad 5 : 6 : 7 = 5 : 6 : 7$$

(levo stran sorazmerja krajšamo z 2)

Posebna oblika sestavljenega sorazmerja je sistem enakosti enostavnih sorazmerij ali podaljšano sorazmerje. Ker gre za posebno obliko, jo bomo imenovali glede na njen

izgled **viseča oblika sistema** sorazmerij. Zapišimo še pravilo, ki velja za omenjeni sistem: **Sistem enostavnih sorazmerij se pretvori v eno sorazmerje tako, da se tvorijo produkti istoležnih členov sorazmerja v sistemu.**

$$a : b = c : d$$

$$b : e = f : g \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ e \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} d \\ g \\ j \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{a \times b \times e}{b \times e \times h} = \frac{c \times f \times i}{d \times g \times j} \Rightarrow$$

$$e : h = i : j$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{h} = \frac{c \times f \times i}{d \times g \times j}}$$

Kar lahko zapišemo tudi v obliki sorazmerja, ki ima posebno obliko, saj visi na levi strani sorazmerja:

$$\boxed{\begin{aligned} a : h &= c : d \\ &= f : g \\ &= i : j \end{aligned}}$$



Izračunajmo neznani člen sorazmerja:

$$x : 2 \frac{1}{4} = 7 : 5 \frac{1}{3}$$

$$= 2,5 : 1 \frac{1}{2}$$

$$= 6 : \frac{5}{7}$$

$$\times 4/ \quad x : \frac{9}{4} = 7 : \frac{16}{3} \quad / \times 3$$

$$= \frac{25}{10} : \frac{3}{2} \quad / \times 10$$

$$= 6 : \frac{5}{7} \quad / \times 7$$

Postopek izračuna neznanega člena sorazmerja poteka tako, da najprej uredimo ulomke, nato ulomke odpravimo (po pravilu: en zunanji in en notranji člen množimo z istim od nič različnim številom), zapišemo urejeno sorazmerje v viseči obliki. Urejeni zapis sorazmerja zapišemo v obliki ulomka, ki ga krajšamo, uredimo in izračunamo, če se da v obliki ulomka, decimalnega ali celega števila.

$$4x : 9 = 21 : 16$$

$$= 25 : 15$$

$$= 42 : 5$$

$$x = \frac{9 \times 21 \times 25 \times 42}{4 \times 16 \times 15 \times 5} = 41 \frac{11}{32}$$



2.3 Izračunajte neznani člen sorazmerja:

a. $2 \frac{1}{3} : x = \frac{10}{25} : 3$ b. $3 \frac{1}{3} : x = 4 : 1 \frac{2}{3}$

$$= 1,25 : 2 \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{5} : \frac{3}{8}$$

2.2.3 Premo sorazmerje

Študenti ste doma v različnih krajih. Če ste vezani na prevoz do šole, ki je oddaljena od vašega kraja bivanja nekaj kilometrov, boste morali na pot v šolo veliko prej kot študent, ki je doma v istem kraju kot je šola. Poglejmo, kakšen odnos velja med količino, ki predstavlja oddaljenost (v km) in časom (v min). Kaj ugotovimo? Če smo bolj oddaljeni, potrebujemo več časa za pot v šolo. Količini čas in oddaljenost sta v premem sorazmerju.

Že pri opredelitvi sorazmerij smo omenili, da za premo sorazmerje velja odnos: povečanje (zmanjšanje) ene količine povzroči povečanje (zmanjšanje) druge količine za enako količino (faktor). Če to definicijo zapišemo bolj natančno (Čibej, 2002), pravimo: **dve količini sta premo sorazmerni, če se ob povečanju (zmanjšanju) prve količine za 2-krat, 3-krat, 4-krat, ... poveča (zmanjša) tudi druga količina za natanko 2-krat, 3-krat, 4-krat, ...**

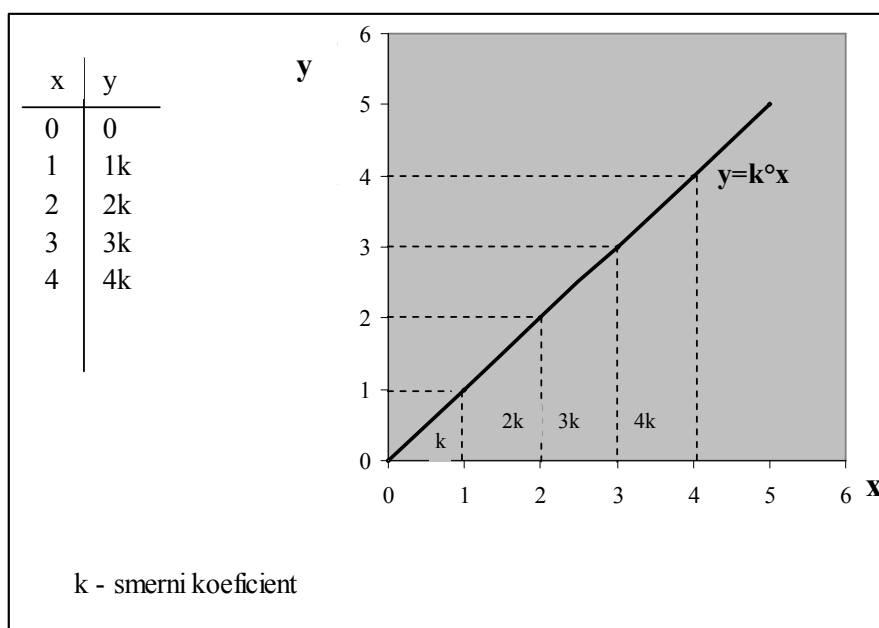


Matematični zapis premo sorazmernih količin x in y :

$$y = k \times x \quad \text{ali} \quad \frac{y}{x} = k \quad k - \text{premo sorazmernostna konstanta}$$

Iz matematike vemo, da lahko narišemo graf sorazmerja, ki bo v našem primeru premica – linearna funkcija. Pri risanju in računanju v poslovni matematiki bomo uporabljali le pozitivne količine, zato bo graf ležal v prvem kvadrantu koordinatnega sistema.

Za lažjo predstavitev uporabimo zapis linearne enačbe $y = k \times x$. Narisati želimo graf, zato je potrebno, da izračunamo koordinatne točke $T(x,y)$. Točke tabeliramo tako, da izberemo poljubne vrednosti za koordinato x in izračunamo pripadajoče vrednosti za koordinato y . Iz grafa je razvidno, da je rešitev premica, na kateri ležijo koordinatne točke.



Slika 1: Graf premosorazmernih količin

Če te točke postavimo v medsebojni odnos, dobimo sorazmerje. Običajno v poslovni matematiki uporabljamo odnos med dvema količinama (x,y) , ki sta v našem primeru v premem sorazmerju. Zato bomo dobili zapis v obliki $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$.

Če ta zapis uredimo in iste neznanke damo na isto stran enačaja, dobimo enačbo za premo sorazmerne količine:

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$



Za 50 metrov blaga smo plačali 12.500,00 DE. Zapišimo in opišimo matematično relacijo med količino blaga, izraženega v metrih (M), in vrednostjo blaga, izraženega v DE (V). Določimo sorazmernostno konstanto (k). Izdelajmo graf $V_{(M)}$ in v njem označimo točke, ki določajo metre blaga, ko je število metrov 2-krat, 4-krat in 5-krat manjše.

Opis relacije: $y = k \times x$ $V_{(M)} = 250 \times M$

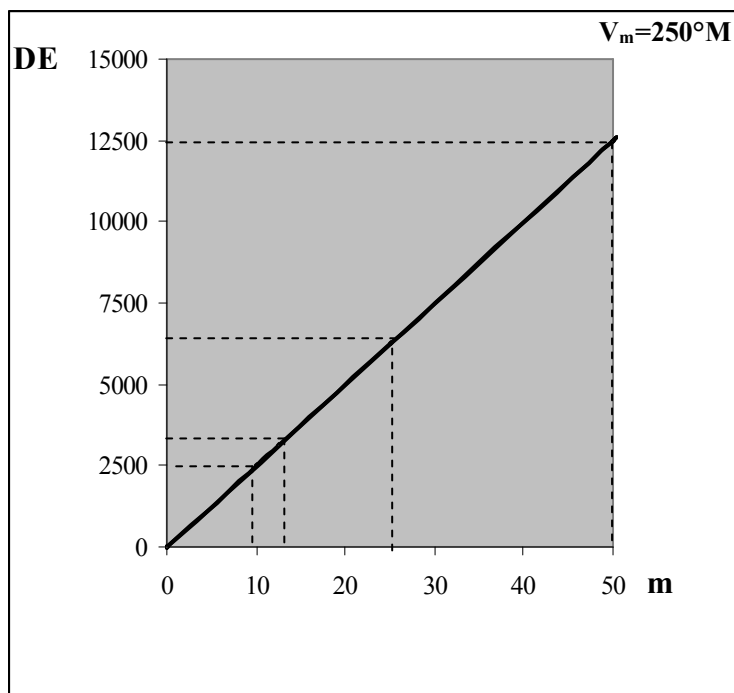
Izračun konstante: $k = \frac{12.500,00}{50} = 250 \text{ DE/m}$

Količine: 50, 25, 12, 10, 1, 0

Vrednosti: 12.500,00, 6.250,00, 3.000,00, 2.500,00, 250,00, 0

x	y
50	12.500,00
25	6.250,00
12	3.000,00
10	2.500,00
1	250,00
0	0,00

Narišimo graf odvisnosti:



Slika 2: Graf odvisnosti teže in vrednosti blaga

Zaključni komentar: Količina blaga, izraženega v metrih, je premo sorazmerna vrednosti blaga.

2.2.4 Obratno sorazmerje

Večina študentov prihaja v šolo z avtomobilom. Poglejmo še, v kakšnem odnosu sta hitrost (km/h) prevoznega sredstva in čas, ki ga študent porabi do kraja šolanja (v km). Če razmislimo, ugotovimo, da če vozimo hitreje, porabimo manj časa za prevoz do šole. Količini sta torej o obratnem sorazmerju.

Za obratno sorazmerne količine velja naslednja definicija (Čibej, 2002): **Dve količini sta obratno sorazmerni, če se ob povečanju (zmanjšanju) prve količine za 2-krat, 3-krat, 4-krat, ... zmanjša (poveča) tudi druga količina za natanko 2-krat, 3-krat, 4-krat, ...**

Matematični zapis obratno sorazmernih količin x in y :

$$y = k \times \frac{1}{x}$$

ali

$$y \times x = k$$

k – obratno sorazmernostna konstanta

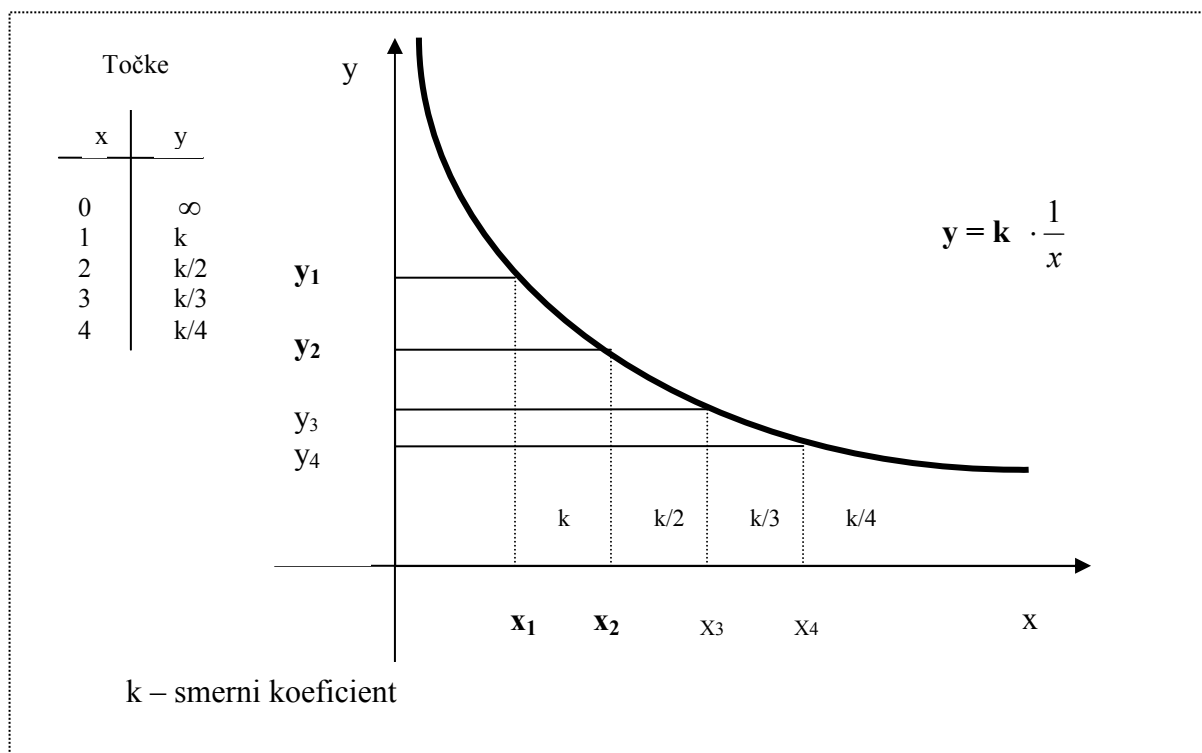


Graf obratnega sorazmerja bo v našem primeru hiperbola. Pri risanju in računanju bomo v poslovni matematiki uporabljali le pozitivne količine, zato bomo uporabljali prvi kvadrant koordinatnega sistema. Za lažjo predstavitev uporabimo zapis linearne enačbe

$y = k \times \frac{1}{x}$. Da bi graf narisali natančno, je potrebno, da izračunamo koordinatne točke $T(x,y)$.

Točke tabeliramo tako, da izberemo poljubne vrednosti za koordinato x in izračunamo pripadajoče vrednosti za koordinato y . Iz grafa je razvidno, da je rešitev grafa hiperbola, na kateri ležijo koordinatne točke.

Narišimo graf odvisnosti:



Slika 3: Graf obratnosorazmernostnih količin

Zanima odnos med dvema količinama (x,y) , ki sta v obratnem sorazmerju. Zapis odnosa teh dveh količin je v obliki $x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2$. Če ta zapis uredimo, dobimo enačbo za obratno sorazmerne količine:



$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$



10 delavcev opravi celotno delo v 10 urah. Opišimo in grafično prikažimo sorazmerje med časom dela (H) in številom delavcev (D) za izvedbo istega opravila.

Rešitev:

Opis relacije: $y = k \times \frac{1}{x}$ $H = 100 \times \frac{1}{D}$

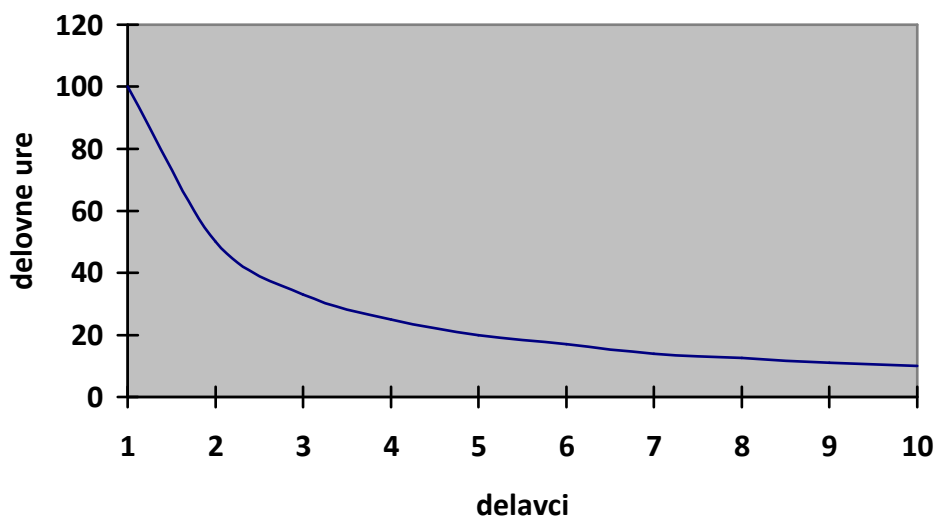
Izračun konstante: $k = 10 \cdot 10 = 100$ (čas dela 1 delavca)

Količine: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Vrednosti: 100, 50, 33, 25, 20, 17, 12,5, 11, 10

x	y
1	100
2	50
3	33
4	25
5	20
6	17

Narišimo graf odvisnosti:



Slika 4: Graf odvisnosti števila delavcev in časa dela

Zaključni komentar: Čas dela je obratno sorazmeren številu delavcev.

**2. 4 Narišite graf odvisnosti za naslednja primera:**

- a) Kolesar prevozi pot 25 km v 45 minutah. Opišimo in grafično predstavimo sorazmerje med dolžino poti in porabljenim časom.
- b) Kolesar prevozi pot 25 km s povprečno hitrostjo 20 km/h. Opišimo in grafično predstavimo sorazmerje med dolžino poti in hitrostjo prevožene poti.

Več poudarka boste grafičnemu prikazovanju podatkov namenili pri drugem delu predmeta, to je pri statistiki.

**UTRJUJEMO, RAZMIŠLJAMO, RAZISKUJEMO, VADIMO**

1. Pojasnite pojem razmerje in sorazmerje. V čem je razlika v opredelitvi?
2. Razložite različne vrste razmerij na primerih.
3. Navedite pravila, ki veljajo za reševanje razmerij in sorazmerij.
4. Razmislite in pojasnite, kakšna je razlika med premo in obratno sorazmernimi količinami?
5. Izmisлите si primer za premo in obratno sorazmerne količine in ju prikažite z grafom. Razložite, kakšna pravila veljajo za risanje grafov. V čem vidite prednosti in slabosti grafične ponazoritve izmišljenih primerov?

V poglavju razmerja in sorazmerja smo se naučili razlikovati oba osnovna pojma. Vemo, kako prepoznavamo razliko med premosorazmernimi in obratnosorazmernimi količinami in kako njune lastnosti vplivajo na reševanje nalog enostavnih in sestavljenih razmerij in sorazmerij. Spoznane tehnike reševanja problemov smo povezali z znanjem iz srednje šoli, kjer smo vključili tudi grafični prikaz odvisnosti količin. Posebna viseča oblika sorazmerja nam bo dobro izhodišče za reševanje še nekaterih poslovnih računov v nadaljevanju.



3 SKLEPNI RAČUN

V poglavju bomo govorili o osnovnih pojmi in računskih tehnikah za reševanje enostavnega in sestavljenega sklepnega računa z različnimi metodami: sklepanje na enoto, sorazmerje, sklepna shema in linearna enačba. Z obvladanjem tega računa bomo lažje organizirali svoja vsakodnevna opravila, saj jih bomo znali tudi bolje načrtovati.

3 SKLEPNI RAČUN

Namen poglavja sklepnega računa je, da spoznamo, usvojimo ali ponovimo računske tehnike za reševanje enostavnega in sestavljenega sklepnega računa. Na osnovi dejstva, da je večina enačb izpeljana prav iz sklepanja in odvisnosti med količinami, je za naše nadaljnje delo poglavje zelo pomembno. Ustavili se bomo pri posameznih metoda reševanja nalog sklepnega računa, ki so: sklepanje na enoto oziroma neposredno sklepanje, sorazmerje, sklepna shema in linearna enačba. Znali bomo uporabljati pridobljeno teoretično znanje in postopke na konkretnih primerih, ki jih vsak dan srečujemo v življenju.

Sklepni račun je postopek (način, metoda), s katerim **izračunamo** neko **neznano količino** iz množice znanih količin, ki so z neznano količino v premem ali obratnem sorazmerju. Ta odnos med količinami smo spoznali že v prejšnjem poglavju. Sklepni račun se glede na **množino količin** deli na:

- **enostavni sklepni račun** – v medsebojnem odnosu sta dve količini (trije znani podatki, četrti neznani podatek iščemo)
- **sestavljeni sklepni račun** – v medsebojnem odnosu so najmanj tri količine (vsaj pet podatkov je znanih, enega iščemo).

Načini (metode) reševanja nalog sklepnega računa so:

- metoda **direktnega sklepanja**
- nastavev **sorazmerja** (sistema sorazmerij)
- sklepna **shema** (hitri postopek reševanja nalog)
- **linearna enačba** (reševanje zahtevnejših nalog sklepnega računa).

Preden začnemo z obravnavo posameznih metod reševanja nalog sklepnega računa, je potrebno opozorilo, da splošno veljavnih receptov za reševanje nalog ni. Pomembno je, da znamo logično razmišljati in da pravilno določimo odnose med posameznimi količinami. Vse obravnavane metode bomo zaradi nazornosti uporabe metod prikazali na istem primeru.

V nadaljevanju bomo najprej spoznali enostavni sklepni račun, nato pa še sestavljenega. Enostavni sklepni račun bo predstavljen s konkretnimi nalogami, na osnovi katerih bomo predstavili teoretične osnove, sestavljeni sklepni račun pa z reševanjem konkretnih nalog, saj zanj veljajo enaka pravila reševanja kot za enostavni sklepni račun, razlika je le v tem, da računamo z več količinami.

3.1 ENOSTAVNI SKLEPNI RAČUN

Enostavni sklepni račun je račun, pri katerem poznamo **dve vrsti količin**. Za ti dve vrsti količin so znane tri skupine podatkov, četrti podatek pa moramo izračunati.

3.1.1 Metoda direktnega sklepanja



Za opremo učilnice za študente potrebujemo 70 stolov, ki stanejo 2.520,00 DE. Koliko bi stali stoli, če bi jih kupili le 56?

Preden so lotimo reševanja naloge, je potrebno ugotoviti, v kakšnem odnosu so dane količine. Gre za odnos med številom stolov in vrednostjo stolov v DE. Če kupimo več stolov, plačamo več DE. Odnos **VEČ – VEČ** nam pove, da sta količini v **premosorazmernem odnosu (PS)**.

70 stolov.....	2.520,00 DE
1 stol.....	$\frac{2.520,00}{70}$ DE
56 stolov.....	$\frac{2.520,00 \times 56}{70}$ DE

$$x = \frac{2.520,00 \times 56}{70} = 2.016,00 \text{ DE}$$

Odgovor: Če stane 70 stolov 2.520,00 DE, bi stalo 56 stolov 2.016,00 DE.

Da bi lahko nalogo rešili s pomočjo metode direktnega sklepanja, povejmo, kakšna pravila reševanja veljajo. Metoda ima vedno tri vrstice – trdilni stavek (prva vrstica), sklepanje na 1 enoto (druga vrstica), sklepanje na množino (tretja vrstica). Teh poimenovanj ob reševanju nalog ne pišemo, omenjena so zaradi lažjega razumevanja. Račun ima levo in desno stran, ki sta med seboj ločeni s pikami. Na levi strani navajamo glede na vrsto podatka znane količine, na desni strani pa je količina, ki jo želimo izračunati (iskana količina). V trdilnem stavku poznamo podatke za levo in desno stran vrstice. Mersko enoto v nastavitvi neznanke izpuščamo in jo zapišemo le ob izračunu in v odgovoru naloge.

Če analiziramo nalogo, ugotovimo, da smo iz podatka 70 stolov sklepali najprej na vrednost 1 stola (sklepanje na enoto) in ugotovili, da če kupimo le 1 stol, plačamo 70-krat manj kot za 70 stolov, nato pa na količino 56 kg (sklepanje na množino), kjer plačamo 56-krat več kot če bi kupili le en stol. Iz analize lahko ugotovimo, da sklepamo po delih in tvorimo račun tako, da vedno sklepamo za vrstico nazaj.



Društvo študentov je ob koncu koledarskega leta ustvarilo 3.650,00 DE dobička in imelo ob tem 1.550,00 DE stroškov. Koliko dobička bi ustvarilo, če bi stroške poslovanja društva uspelo zmanjšati za 10 %?

Izračun 10 % vrednosti:

100 % vrednosti stroškov.....	1.550,00 DE
1 % vrednosti stroškov.....	$\frac{1.550,00}{100}$ DE
10 % vrednosti stroškov.....	$\frac{1.550,00 \times 10}{100}$ DE

$$x = \frac{1.550,00 \times 10}{100} = 155,00 \text{ DE}$$

Če uspemo privarčevati 10 % vrednosti stroškov, bo torej naša vrednost stroškov od 1.550,00 DE zmanjšala za 155,00 DE na 1.395,00 DE. Te stroške lahko s sklepnim računom izračunamo tudi neposredno tako, da sklepamo na ostanek odstotka vrednosti stroškov ($100 \% - 10 \% = 90 \%$).

100 % vrednosti stroškov.....	1.550,00 DE
1 % vrednosti stroškov.....	$\frac{1.550,00}{100}$ DE
90 % vrednosti stroškov.....	$\frac{1.550,00 \times 90}{100}$ DE

$$x = \frac{1.550,00 \times 90}{100} = 1.395,00 \text{ DE}$$

Izračun dobička:

1.550,00 DE stroškov.....	3.650,00 DE
1,00 DE stroškov.....	$3.650,00 \times 1.550,00$ DE
1.395,00 DE stroškov.....	$\frac{3.650,00 \times 1.550,00}{1.395,00}$ DE

$$x = \frac{3.650,00 \times 1.550,00}{1.395,00} = 4.055,56 \text{ DE}$$

Odgovor: Če bi društvo privarčevalo 10 % stroškov, kar znaša 155,00 DE stroškov, bi ustvarilo 4.055,56 DE dobička.

V nalogi smo se ukvarjali z odnosom med velikostjo stroškov in višino dobička. Pri zadnjem izračunu smo ugotovili, da gre za odnos **VEČ – MANJ**, kar pove, da sta količini v **obratnosorazmernem odnosu (OS)**.

Če analiziramo nalogo, ugotovimo, da smo iz podatka 1.550,00 DE stroškov sklepali najprej na vrednost ene DE stroškov (sklepanje na enoto) in ugotovili, da če je strošek le 1,00 DE, bo naš dobiček 1.555-krat večji kot če bi stroški znašali 1.550,00 DE. Nato sklepamo na množino 1.395,00 DE stroškov (sklepanje na množino), kar pomeni, da bo naš dobiček 1.395-krat manjši, kot če je strošek le 1,00 DE.

3.1.2 Sorazmerje



Za opremo učilnice za študente potrebujemo 70 stolov, ki stanejo 2.520,00 DE. Koliko bi stali stoli, če bi jih kupili le 56?

Že prej smo ugotovili, da je odnos med količino stolov in vrednostjo stolov premosorazmeren (**VEČ – VEČ**). Že iz poglavja o sorazmerjih vemo, da če so količine v premem sorazmerju, velja odnos

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

V analizi naloge pišemo podatke z istimi enotami na isto stran (torej jih podpišemo). Označimo podatke na levi strani zapisa (znana količina) z y , na desni strani zapisa (neznana količina) pa z x . Z x vedno označimo podatke, v katerih se nahaja neznanka, ki jo iščemo.

Analiza naloge:

y_1	70 stolov.....	2.520,00 DE	x_1
y_2	56 stolov.....	x DE	x_2

Iz navedenega zapisa ne bo težko zapisati premega sorazmerja $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ in vstaviti podatke iz analize.

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \quad 2.520,00 : x_2 = 70 : 56$$

Izpišemo neznanko, ki jo iščemo. Verjetno se še spomnite pravila, da je produkt zunanjih členov sorazmerja enak produktu notranjih členov. Neznanko x_2 izrazimo tako, da produkt nasproti ležečih členov sorazmerja delimo s členom, ki je istoležni neznanki.

$$x_2 = \frac{2.520,00 \times 56}{70} = 2.016,00 \text{ DE}$$

Odgovor: Če stane 70 stolov 2.520,00 DE, bi stalo 56 stolov 2.016,00 DE.

Rešitev preverimo z rešitvijo naloge, ki smo jo reševali s pomočjo metode direktnega sklepanja. Rezultat bi moral biti isti, le da je neznanka označena drugače. Ne pozabimo zapisati tudi odgovora.

In še drugi primer.



Društvo študentov je ob koncu koledarskega leta ustvarilo 3.650,00 DE dobička in imelo ob tem 1.550,00 DE stroškov. Koliko dobička bi ustvarilo, če bi stroške poslovanja društva uspelo zmanjšati za 10 %?

Z izpisom in analizo naloge ne bo več problema, pazimo samo na 10 % zmanjšanje stroškov, ki jih neposredno izračunamo.

Analiza naloge:

y_1	1.550,00 DE stroškov.....	3.650,00 DE	x_1
y_2	1.395,00 DE stroškov.....	x DE	x_2

Spet ugotovimo odnos med količinami. Gre za obratno-sorazmerni odnos, kjer več stroškov povzroča manjši dobiček (**VEČ – MANJ**). Zapišemo pravilni odnos razmerja in vstavimo podatke.

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1 \quad 3.650,00 : x_2 = 1.395,00 : 1.550,00$$

$$x = \frac{3.650,00 \times 1.550,00}{1.395,00} = 4.055,56 \text{ DE}$$

Odgovor: Če bi društvo privarčevalo 10 % stroškov, kar znaša 155,00 DE stroškov, bi ustvarilo 4.055,56 DE dobička.

3.1.3 Sklepna shema

Tretja metoda, ki jo bomo spoznali, je reševanje nalog s pomočjo sklepne sheme. Kot smo že omenili, je to metoda, s katero na **hiter način** rešujemo naloge sklepnega računa. Da bi lahko pravilno rešili nalogo, moramo upoštevati naslednja **pravila**:

- Sklepna shema ima **dve vrstici**. V prvo vrstico, ki jo imenujemo **trdilni stavek**, vpišemo vse znane količine, v drugo vrstico (**vprašalni stavek**) vpišemo vse znane količine in količino, po kateri se sprašujemo (x) tako, da podpišemo ustrezne količine v vprašalnem stavku pod ustrezne količine v pogojnem stavku. Vse količine morajo biti opremljene z ustreznimi enakimi merskimi enotami (m pod m, kg pod kg).
- **Odnos** med količinami označujemo s **puščicami**. Za postavljanje puščic veljajo naslednja pravila:
 - a) Najprej postavimo puščico pri neznani količini (x) tako, da ta kaže vedno od neznane količine (v vprašalnem stavku) proti znani (istoimenski) količini v pogojnem stavku.
 - b) Odnose med ostalimi količinami postavljamo glede na vrsto sorazmerja:
 - **premo sorazmerne** količine – puščice so obrnjene v isto smer $\uparrow\uparrow$ ali $\downarrow\downarrow$ kot neznana količina
 - **obratno sorazmerne** količine – puščice so obrnjene v nasprotno smer $\uparrow\downarrow$ ali $\downarrow\uparrow$ kot neznana količina
- Neznano količino **x** zapišemo v obliki **ulomka** tako, da je v:
 - a) **števcu** vedno vrednost nad neznanko x in vse vrednosti ob začetku puščic
 - b) **imenovalcu** so vse vrednosti ob koncu puščic.
- Izračunamo **vrednost** ulomka, dodamo mersko enoto ter **zapišemo odgovor**.

Poglejmo spet nalogi, ki smo ju reševali že pri prejšnjih metodah.



Za opremo učilnice za študente potrebujemo 70 stolov, ki stanejo 2.520,00 DE. Koliko bi stali stoli, če bi jih kupili le 56?

Analiza naloge: 70 stolov..... 2.520,00 DE
56 stolov..... x DE

Določitev odnosa: Če kupimo več stolov, plačamo več (VEČ – VEČ – premo sorazmerje)

 70 stolov.....  2.520,00 DE
 56 stolov..... x DE

$$x = \frac{2.520,00 \times 56}{70} = 2.016,00 \text{ DE}$$

Odgovor: Če stane 70 stolov 2.520,00 DE, bi stalo 56 stolov 2.016,00 DE.



Društvo študentov je ob koncu koledarskega leta ustvarilo 3.650,00 DE dobička in imelo ob tem 1.550,00 DE stroškov. Koliko dobička bi ustvarilo, če bi stroške poslovanja društva uspelo zmanjšati za 10 %?

Analiza naloge: 1.550,00 DE stroškov.....3.650,00 DE
 1.395,00 DE stroškov..... x DE

Določitev odnosa: Če poslujemo z manjšimi stroški, ustvarimo večji dobiček (MANJ – VEČ – obratno sorazmerje)

↓ 1.550,00 DE str ... ↑ 3.650,00 DE
 1.395,00 DE str x DE

$$x = \frac{3.650,00 \times 1.550,00}{1.395,00} = 4.055,56 \text{ DE}$$

Odgovor: Če bi društvo privarčevalo 10 % stroškov, kar znaša 155,00 DE stroškov, bi ustvarilo 4.055,56 DE dobička.

Prikazane metode reševanja so primerne za reševanje nalog enostavnega sklepnega računa. Poskusite še vi.



3.1 Rešite naslednje naloge. Metoda reševanja je predpisana v oklepaju.

- Kolesar prevozi pot 25 km v 45 minutah. Koliko časa potrebuje za 5 km daljšo pot (direktno sklepanje)?
- Kolesar prevozi pot 25 km s povprečno hitrostjo 20 km/h. S kakšno hitrostjo bi moral prevoziti 30 km dolgo pot, če bi želel na cilj priti v istem času (sorazmerje)?
- Za transport krompirja potrebujemo 50 vreč, če gre v vsako vrečo 24 kg krompirja. Koliko vreč bi potrebovali za isto količino krompirja, če gre v vsako vrečo 4 kg krompirja manj (sklepna shema)?

3.2 SESTAVLJENI SKLEPNI RAČUN

Sestavljeni sklepni račun je sestavljen iz več enostavnih sklepnih računov. Naloge rešujemo po že prej omenjenih metodah, zahtevnejše pa tudi s pomočjo linearnih enačb. Podatkov za računanje v naloge je več, saj se enostavni in sestavljeni sklepni račun razlikujeta prav po številu spremenljivk. V sestavljenem sklepnem računu imamo opravka z najmanj tremi količinami, pri katerih je najmanj pet znanih podatkov in en neznani podatek (neznanka, ki jo želimo izračunati). V nadaljevanju bomo predstavili metodo direktnega sklepanja, s katero so naloge sklepnega računa sicer rešljive, vendar je postopek izračuna dolg, zato rajši uporabljamo metodo s pomočjo sorazmerja ali sklepne sheme. Nekatere zahtevnejše naloge pa so rešljive le z nastavitvijo linearne enačbe.

3.2.1 Metoda direktnega sklepanja



Skupina 40 študentov opravi neko delo v 20 dneh, če dela 8 ur/dan. Koliko študentov bi isto delo opravilo v 22 dneh, če delajo 7 ur/dan in če je njihov obseg dela za 20 % večji?

Za razliko od navadnega sklepnega računa imamo na levi strani pogojnega stavka **več količin**, na desni strani pa količino, ki jo želimo izračunati. Sklepanj na enoto in množino je več, saj **sklepamo za vsako količino posebej. Mersko enoto** v nastavitvi neznanke **izpuščamo** in jo zapišemo le ob izračunu ter v odgovoru naloge.

Rešitev:	20 dneh , 8 ur/dan, 100 %.....	40 študentov
	1 dan , 8 ur/dan, 100 %.....	40 × 20 študentov
	22 dni , 8 ur/dan, 100 %.....	$\frac{40 \times 20}{22}$ študentov
	22 dni, 1 ura/dan , 100 %.....	$\frac{40 \times 20 \times 8}{22}$ študentov
	22 dni, 7 ur/dan , 100 %.....	$\frac{40 \times 20 \times 8}{22 \times 7}$ študentov
	22 dni, 7 ura/dan, 1 %	$\frac{40 \times 20 \times 8}{22 \times 7 \times 100}$ študentov
	22 dni, 7 ur/dan, 120 %	$\frac{40 \times 20 \times 8 \times 120}{22 \times 7 \times 100}$ študentov

Če analiziramo nalogo, ugotovimo, da smo iz podatka 20 dni sklepali najprej na 1 dan (sklepanje na enoto) in ugotovili, da če delajo študenti le 1 dan, potrebujemo 20-krat več študentov, nato pa na 22 dni (sklepanje na množino), kjer potrebujemo 22-krat manj študentov kot če bi delali le en dan. Ko smo rešili odnos med študenti in dnevi, smo istočasno določali tudi odnos med delavnimi urami na dan in študenti. Podatke, ki smo jih dobili za študente, ohranimo in nadaljujemo s sklepanjem. Če delamo le eno uro na dan, potrebujemo 8-krat več študentov (obratno sorazmerje) kot če bi delal en sam študent. Ker pa delajo študenti 7 ur na dan, potrebujemo za isto delo 7-krat manj študentov kot če bi delali študenti po eno uro na dan. Ostane nam še sklepanje na povečan obseg dela in študente. Če povečamo obseg dela, potrebujemo več študentov (premo sorazmerje). Če obseg dela znaša le 1 %, potrebujemo 100-krat manj študentov, ker pa je obseg dela za 20 % večji, potrebujemo (100+20)-krat več študentov kot če bi bil obseg dela 1 %. Iz analize lahko ugotovimo, da sklepamo po delih in tvorimo račune tako, da postopno sklepamo za eno vrstico nazaj. Izračunamo neznanko:

$$x = \frac{40 \times 20 \times 8 \times 120}{22 \times 7 \times 100} = 49,87 \approx 50 \text{ študentov}$$

Odgovor: 40 študentov opravi delo v 20 dneh, če delajo po 8 ur na dan. Če pa bi študentje delali 22 dni po 7 ur na dan in bi jim obseg povečali za 20 %, bi jih potrebovali 50.

3.2.2 Sorazmerje



Skupina 40 študentov opravi neko delo v 20 dneh, če dela 8 ur na dan. Koliko študentov bi isto delo opravilo v 22 dneh, če delajo 7 ur na dan in če je njihov obseg dela za 20 % večji?

Določimo odnose med študenti in delovni dnevi, študenti in delovnimi urami ter študenti in obsegom dela. Če delamo VEČ dni, potrebujemo MANJ študentov, če delamo VEČ ur na dan, potrebujemo MANJ študentov in za VEČJI obseg dela potrebujemo VEČ delavcev.

Že iz poglavja o sorazmerjih vemo, da:

- če so količine v **premем sorazmerju**, velja odnos $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ in
- če so količine v **obratnem sorazmerju**, velja odnos $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$.

Naredimo analizo naloge in označimo podatke.

Analiza naloge:

y_1 20 dneh, ... y_1 8 ur/dan, ... y_1 100 % x_1 40 študentov
 y_2 22 dni, ... y_2 7 ur/dan, ... y_2 120 % x_2 x študentov

Razlika med enostavnim in sestavljenim razdelilnim računom je v tem, da gre pri enostavnem za odnos med dvema količinama, pri **sestavljenem pa za odnos med večjim številom količin** (v našem primeru štirih). Vsi podatki vplivajo na izračun rezultata, zato jih bomo zapisali v posebni **viseči obliki podaljšanega sorazmerja** (ta zapis sorazmerja poznamo že iz prejšnjega poglavja).

študenti : delovni dnevi (OS)	$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$
: delovne ure (OS)	$= y_2 : y_1$
: obseg dela (PS)	$= y_1 : y_2$

Za rešitev naloge vstavimo podatke označene v analizi naloge:

$$\begin{aligned} 40 : x_2 &= 22 : 20 \\ &= 7 : 8 \\ &= 100 : 120 \end{aligned}$$

Vsako visečo obliko sestavljenega sorazmerja **pretvorimo v enostavno sorazmerje** tako, da pomnožimo podatke v stolpcih in upoštevamo pravilo zapisa z neznanko x (zunanji in notranji členi).

$$x_2 = \frac{40 \times 20 \times 8 \times 120}{22 \times 8 \times 100} = 49,87 \approx 50 \text{ študentov}$$

Odgovor: 40 študentov opravi delo v 20 dneh, če delajo po 8 ur na dan. Če pa bi študentje delali 22 dni po 7 ur na dan in bi jim obseg povečali za 20 %, bi jih potrebovali 50.

3.2.3 Sklepna shema

Tretja metoda, ki jo bomo spoznali, je reševanje nalog s pomočjo sklepne sheme. Kot smo že omenili, je to metoda, s katero na **hiter način** rešujemo naloge sklepnega računa. Pravila reševanja poznamo že iz enostavnega sklepnega računa, zato jih ne bomo ponavljali.



7 delavcev bo opravilo neko delo v 9 dneh, če delajo 7 ur na dan. Koliko delavcev mora še priti na delo, če mora biti delo opravljeno 2 dni prej, če delajo delavci eno uro več na dan in če se obseg dela poveča za 10 %?

Rešitev:

↓ 9 dneh, ...	↓ 7 ur/dan, ...	↑ 7 delavcev	↑ 100 % obseg
↓ 7 dni, ...	↓ 8 ur/dan, ...	↑ x delavcev	↑ 110 % obseg

$$x = \frac{7 \times 9 \times 7 \times 110}{7 \times 8 \times 100} = 8,66 \approx 9 \text{ delavcev}$$

Odgovor: Na delo morata priti še dva delavca, da bo delo opravljeno v 7 dneh pri 8 urnem delavniku.

3.2.4 Reševanje s pomočjo enačb

Naloge sklepnega računa se dajo reševati tudi s pomočjo **linearne enačbe** ali **sistema linearnih enačb**. Za reševanje nalog **ni** predpisanega **recepta**, temveč gre za logično sklepanje in upoštevanje pravil reševanja enačb. Opozorimo le na osnovno pravilo reševanja s pomočjo linearnih enačb, ki pravi, da je **leva stran enačbe** vedno **enaka desni strani**.

Rešili bomo dva primera nalog, ki vam bodo omogočila vpogled v ta način reševanja.



Študentje so se vpisovali v drugi letnik študija. Po predhodnih željah se jih želi 65 vpisati v izbirni modul Komerčialist in 40 v modul Računovodja. Dejansko razmerje med študenti v obeh modulih pa je bilo 9 : 5. Kolikšno je bilo dejansko število vpisanih študentov, če se je njihovo skupno število pri vpisu v v drugi letnik zmanjšalo za 1/15?

Analiza naloge: Želje: 65 KOM + 40 RČN = 105 študentov 65

$$\text{Dejansko število: } \text{KOM} : \text{RČN} = 9 : 5 \quad \text{KOM} + \text{RČN} = \frac{14}{15} = 98$$

Rešitev:	$9x + 5x = 98$	KOM: $9x = 9 \times 7 = 63$
	$14x = 98$	RČN: $5x = 5 \times 7 = 35$
	$x = 7$	skupaj: 98

Odgovor: Dejansko vpisanih študentov v modul komercialist je 63 in 35 v modul računovodja, če upoštevamo, da se je dejansko število zmanjšalo za 1/15 glede na želje študentov.



Če bi se študent pripravljaj na izpit sam, bi potreboval 14 dni. Ko je študiral že 3 dni, se mu je pridružil še drugi študent, ki za pripravo na izpit potrebuje le 10 dni. V kakšnem času bosta oba skupaj pripravljena na izpit?

Analiza naloge: prvi študent rabi 14 dni – njegova hitrost je 1/14 enote študija dnevno,
drugi študent rabi 10 dni – njegova hitrost je 1/10 enote študija dnevno,
prvi študent potrebuje za študij x dni,

drugi študent se mu priključi po 3 dneh, torej $x - 3$ dneh, oba skupaj potrebujeta za izpit celo pripravo, kar označimo z 1.

Rešitev: $\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{10}\right)(x - 3) = 1 \qquad \frac{12}{70}(x - 3) = 1$

Uredimo enačbo tako, da izraz v oklepaju seštejemo, ko smo našli skupni imenovalc 70. Uredimo enačbo in izračunamo:

$$12(x - 3) = 70 \qquad 12x - 36 = 70 \qquad 12x = 106 \qquad x = 8,83 \qquad \mathbf{x = 9 \text{ dni}}$$

Odgovor: Če bi oba študenta študirala skupaj, bi potrebovala za pripravo na izpit približno 9 dni.



3.2 Rešite naslednje naloge. Metoda reševanja je predpisana v oklepaju.

- 50 delavcev izdelava 2.000 kosov izdelkov, če dela na 20 strojih 7 mesecev. Koliko časa bo za 200 izdelanih kosov več potrebovalo 70 delavcev, če število delavnih strojev povečajo za dva (sklepna shema)?
- Za tlakovanje dvorišča potrebujemo 5.500 tlakovancev, ki so dolgi 15 cm in široki 20 cm. Kako široki bi morali biti tlakovanci, da bi jih za isto dvorišče potrebovali 500 manj, če bi bili dolgi 20 cm (sorazmerje)?
- 150 metrov blaga, širokega 150 cm, je stalo 450,00 DE. Koliko istovrstnega blaga, ki je 30 cm ožje, dobimo za 750,00 DE (poljubna metoda)?
- Razmerje med doseženimi točkami treh študentov na izpitu iz poslovne matematike je bilo 5 : 2 : 3. Prvi študent je dosegel za 15 točk več, kot je četrtina vsote doseženih točk ostalih dveh študentov. Koliko točk so dosegli posamezni študenti na izpitu iz poslovne matematike (linearna enačba)?



UTRJUJEMO, RAZMIŠLJAMO, RAZISKUJEMO, VADIMO

- Razložite pojem sklepni račun.
- Ugotovite bistvene značilnosti in razlike med vrstami sklepnega računa.
- Naštejte in opišite načine reševanja nalog sklepnega računa.
- Utemeljite na izmišljenem primeru značilnosti enostavnega in sestavljenega sklepnega računa? Izberite najustreznejšo metodo reševanja in pojasnite, zakaj ste jo izbrali.
- Da bi vaše znanje še bolj utrdili, rešite naloge iz prvega poglavja Zbirke vaj iz poslovne matematike (Domjan 2008, 3–5).

V poglavju sklepni račun smo se naučili razlikovati in uporabljati razmerja. Poznamo razliko med prenosorazmernimi in obratnosorazmernimi količinami in kako njune lastnosti vplivajo na reševanje nalog z različnimi problemi. Naloge, ki so se nam zdele na prvi pogled zapletene, smo s pomočjo metod, ki jih ponuja sklepni račun, zlahka rešili. Vendar je potrebno vedno logično razmišljati in se držati dogovorjenih pravil igre.



4 VERIŽNI RAČUN

V poglavju bomo spoznali osnovne pojme za tvorbo verige, uporabo tečajnice in tujih merskih sistemov ter obračunavanje stroškov (dodatki in popusti). Gre za posebno shemo reševanja nalog sklepnega računa, kjer so vse količine v premosorazmerni odvisnosti.

4 VERIŽNI RAČUN

Verižni račun boste pogosto uporabljali v svojem poslovnem in zasebnem življenju, saj vam omogoča hiter izračun podatkov in omogoča pravilno odločitev o tem, ali se vam tveganje splača ali ne. Spoznali bomo posebno obliko sklepnega računa, ki je istočasno tudi skrajšana oblika zapisa sklepnega računa. Račun je dobil svoje ime po značilni obliki – verigi. Vse količine, ki sestavljajo verigo, morajo biti v prenosorazmernem odnosu. V tem poglavju bomo spoznali pravila za tvorbo verige, načine iskanja podatkov za primer, ko so količine ali denarne enote sestavine tujih merskih ali denarnih sistemov, načine obračunavanja dodatkov in popustov v notranjem in zunanjetrgovinskem poslovanju. Znali boste poiskati podatke v tečajnicah in tablicah tujih merskih enot. Poudariti je pomembno, da se podatki v tečajnici dnevno spreminjajo in da bomo v primerih izhajali iz podatkov tečajev, ki so veljali na dan 17. 7. 2008. Za vsakodnevno uporabo pa boste poiskali podatke na internetnih straneh Banke Slovenije ali poslovnih bank, v dnevnem časopisju ali drugje.



Koliko bomo plačali za 7 m blaga A, če smo za 2 kg blaga B plačali 7,50 EUR in stane 1 m blaga A isto kot 1 kg blaga B?

Analiza naloge: x DE 7 m blaga A
 2 kg blaga B 7,50 EUR
 1 m blaga A 1 kg blaga B

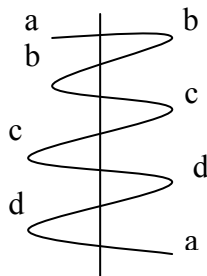
Rešitev:

x DE	7 m blaga A
1 m blaga A	1 kg blaga B
2 kg blaga B	7,50 EUR

$$x = \frac{7 \times 7,50}{2} = 26,25 \text{ EUR}$$

Odgovor: Za 7 m blaga A bomo plačali 26,25 EUR, če smo za 2 kg blaga B plačali 7,50 EUR in stane 1 m blaga A isto kot 1 kg blaga B.

Iz spodnje sheme, ki predstavlja zunanjo obliko verige, je razvidno, da gre za posebno računsko shemo. Postopek reševanja naloge imenujemo **verižni račun**.



Za sestavo verige veljajo naslednja **pravila**:

- Po **analizi podatkov**, ki jo naredimo z izpisom količin iz naloge, poiščemo še manjkajoče količine, ki so običajno tuje merske ali denarne enote (najdemo jih v tablicah tujih merskih enot in v tečajni listi Banke Slovenije).

- Sestavimo verigo. Veriga ima levo in desno stran. Strani verige sta med seboj ločeni z navpično (vertikalno) črto. Verigo **začnemo** vedno z vprašanjem **x in neznano količino ali denarno enoto**, ki jo zapišemo na levo stran verige, na desno pa pripadajočo količino ali denarno enoto, ki je razvidna iz vprašanja.
- V vsako **ново** vrstico vpisujemo pogoje iz naloge tako, da najprej zapišemo podatek, ki ima **isto enoto**, kot jo je imel podatek, s katero smo **končali prejšnjo vrstico**. Nadaljujemo tako dolgo, da zajamemo vse podatke iz analize naloge.
- Verigo **zaključimo**, ko smo prišli do iste **enote**, kot jo ima podatek v **vprašanju**.
- Podatke na desne strani verige zapišemo kot faktorje v števcu, podatke na levi strani verige pa kot faktorje v imenovalcu.
- Izračunamo **vrednost ulomka** in zapišemo **odgovor**. Verižni račun velikokrat uporabljamo v zunanjetrgovinskem poslovanju, zato moramo poznati **tuje merske enote** (dolžinske, prostorninske, votle, utežne mere) in **denarne enote** (tečaje, ki veljajo za posamezne tuje valute). Na ostale posebnosti pri poslovanju s tujino vas bodo opozorili izvajalci izbirnih modulov (vedenje, običaji, navade). Poglejmo si nekaj primerov tujih merskih enot, ki jih uporabljamo v poslovnem življenju kot isto smiselne trgovinske merske enote različnih merskih sistemov in njihove medsebojne vrednostne relacije (pretvornike). Preden jih prikažemo v obliki tablic (tabela 1) povejmo, da moramo obvezno ločiti med angleškimi in ameriškimi merskimi enotami. Nekateri pretvorniki so enaki, zato smo jih v tabeli 1 prikazali združeno.

Tabela 1: Tabela merskih enot

ANGLEŠKE IN AMERIŠKE DOLŽINSKE MERE			ANGLEŠKE IN AMERIŠKE POVRŠINSKE MERE		
1 mile (mi)	1760 yd	1609,35 m	1 square (sq mi)	640 A	2,5900 km ²
1 yard (yd)	3 ft	0,91440 m	1 acre (A)	4.840	40.046,87 m ²
1 foot (ft)	12 in	0,30480 m	1 square yard (sq yd)	9 sq ft	0,8361 m ²
1 inch (in)	12 ln	0,02540 m	1 square foot (sq ft)	144 sq in	0,0929 m ²
1 line (ln)		0,00212 m	1 square inch (sq in)	144 sq ln	6,4516 cm ²
			1 square line (sq ln)		4.403 mm ²
ANGLEŠKE IN AMERIŠKE PROSTORNINSKE MERE			DRUGE MERSKE ENOTE V POSLOVNEM SVETU		
1 register tone (Rt)	3,703704 cu yd	2,8316 m ³	1 troy ounce (tr oz)	za plemenite kovine	31,103481 g
1 cubic yard (cu yd)	27 cu ft	0,7646 m ³	1 barrel (bbl)	za nafto in derivate	0,159m ³
1 cubic foot (cu ft)	11.728 cu in	28,3170 dm ³			
1 cubic inch (cu in)	1.728 cu ln16.	16,3871 cm ³			
1 cubic line (cu ln)		9,4840 mm ³			
ANGLEŠKE UTEŽNE MERE (trgovske)			AMERIŠKE UTEŽNE MERE (trgovske)		
1 long tone (lt)	20 cwt	1.016,047 kg	1 short tone (st)	20 ct	907,185 kg
1 hundredweight (cwt)	4 qt	50,8023 kg	1 cental (ct)	4 qr	45,3592 kg
1 quarter (qr)	28 lb	12,7006 kg	1 quarter (qr)	25 lb	11,3397 kg
1 pound (lb)	16 oz	0,4536 kg	1 pound (lb)	16 oz	0,4536 kg
1 ounce (oz)	16 dr	28,3495 g	1 ounce (oz)	16 dr	28,3495 g
1 dram (dr)		1,7718 g	1 dram (dr)		1,7718 g
ANGLEŠKE VOTLE MERE (za tekočine)			AMERIŠKE VOTLE MERE (za tekočine)		
1 galone (gl)	4 qt	4,5430 l	1 galone (gl)	4 qt	3,7853 l
1 quart (qt)	2 pt	1,1365 l	1 quart (qt)	2 pt	0,9463 l
1 pint (pt)	4 gi	0,5683 l	1 pint (pt)	4 gi	0,4732 l
1 gill (gi)		0,0143 l	1 gill (gi)		0,0118 l
ANGLEŠKE VOTLE MERE (za suhe snovi)			AMERIŠKE VOTLE MERE (za suhe snovi)		
1 quarter (qr)	8 bsh	290,912 l	1 quarter (qr)	8 bsh	281,912 l
1 bushel (bsh)	4 pk	36,348 l	1 bushel (bsh)	4 pk	35,239 l
1 peck (pk)	2 gl	9,087 l	1 peck (pk)	2 gl	8,8098 l
1 galone (gl)	4 qt	4,5430 l	1 galone (gl)	4 qt	4,405 l
1 quart (qt)	2 pt	1,1365 l	1 quart (qt)	2 pt	1,1012 l
1 pint (pt)	4 gi	0,5683 l	1 pint (pt)		0,5506 l

Vir: Vučak, Poslovna matematika, 2003

Da bi lahko reševali naloge verižnega računa, kjer se pojavljajo tuje merske enote, potrebujemo tudi tabelo pretvornikov denarnih enot, saj so cene blaga, ki ga uvažamo ali izvažamo, običajno izražene v valuti države uvoznice ali izvoznice.

Vemo, da je Slovenija s 1. januarjem 2007 tolarje zamenjala za evre. Spomnimo se, da je bil ob prevzemu evra en evro vreden 239,640 tolarjev. Preglednico tečajev, ki veljajo na določen dan, imenujemo **tečajna lista** ali **tečajnica**. **Tečaj** nam pove, koliko enot nacionalne valute dobimo za 1 enoto domače valute (evro). Za tekoče preračunavanje bomo v vsakdanji praksi poiskali novo tečajnico (v dnevnem časopisju, na internetnih straneh poslovnih bank, najpogosteje pa na spletnih straneh Banke Slovenije <http://www.bsi.si/podatki/tec-bs.asp>). Za reševanje nalog v tem poglavju bomo uporabljali tečajnico Banke Slovenije na dan 17. 7. 2008 (tabela 2) z izbranimi tečaji.

Tabela 2: Tečajnica banke Slovenije na dan 17. 7. 2008

Država	Oznaka valute	Ime valute	Šifra valute	Tečaj
Avstralija	AUD	avstralski dolar	036	1,6246
Kanada	CAD	kanadski dolar	124	1,5860
Hrvaška	HRK	hrvaška kuna	191	7,2271
Češka	CZK	češka krona	203	23,1420
Danska	DKK	danska krona	208	7,4588
Madžarska	HUF	madžarski forint	348	230,1300
Japonska	JPY	japonski jen	392	167,4300
Norveška	NOK	norveška krona	578	8,0640
Slovaška	SKK	slovaška krona	703	30,3180
Švedska	SEK	švedska krona	752	9,4778
Švica	CHF	švicarski frank	756	1,6145
Velika Britanija	GBP	britanski funt	826	0,7914
ZDA	USD	dolar	840	1,5849

Vir: <http://www.bsi.si/podatki/tec-bs.asp> (17. 7. 2008)

Velikokrat se zgodi, da pri tovrstnem poslovanju nastopajo še dodatni stroški nakupa ali prodaje blaga, ki so izraženi v odstotkih ali promilih in se nanašajo na podatke o vrednosti blaga, nikoli na podatke o količini (čeprav je odobren popust vrednostno izračunan na količino). Zato jih vedno vključimo v denarno enoto. K tej razlagi se bomo ponovno vrnili ob zaključku tega poglavja.

Omenili smo že, da se v poslovanju poslovnih sistemov pojavljajo razni **dodatni stroški** ali **popusti**, ki jih lahko na enostaven način vključimo v verižni račun. Paziti moramo le, da jih pravilno opredelimo.

Imamo različne možnosti:

- **prodaja** ali **izvoz** blaga. Pri tem načinu poslovanje se lahko pojavljajo stroški carin, davek na dodano vrednost, stroški transporta, stroški provizij, trgovinske marže in drugi stroški. Ker blago prodajamo ali izvažamo kot prodajalci oziroma izvozniki, moramo te stroške kriti (plačati) sami. Ti stroški zmanjšujejo dobiček prodajalca, zato jih **odštevamo**. Matematično jih zapišemo:

100 DE brez stroškov **(100 – p)** DE s stroški



- **nakup** ali **uvoz** blaga. Pri tem načinu poslovanja nastajajo stroški, ki jih krijemo kot kupec oziroma uvozniki blaga. Zato jih kot dobri gospodarji (prodajalci) vračunamo oziroma **prištevamo** v nabavno ceno blaga. Matematično jih zapišemo:

100 DE brez stroškov **(100 + p)** DE s stroški.



V nadaljevanju poglavja bomo navedli primere, ki zajemajo vse posebnosti verižnega računa.



Koliko EUR bomo iztržili pri izvozu 1.500 ton blaga v Veliko Britanijo, če tam prodajajo 3 punde tega blaga po 12 GBP in če upoštevamo, da smo morali pokriti še 15 % izvoznih stroškov?

Analiza naloge: x EUR s str..... 1.500 ton blaga
 3 pound (lb)..... 12 GBP
 100 EUR..... (100 – 15) EUR s stroški
 Poiščemo: 1 EUR 0,7914 GBP
 1 lb..... 0,4536 kg

Rešitev v EUR:

x EUR s str.	1.500 t	$x = \frac{1.500 \times 1.000 \times 12 \times 85}{0,4536 \times 3 \times 0,7914 \times 100} = 14,206.957,60 \text{ EUR}$
1 t	1.000 kg	
0,4536 kg	1 lb	
3 lb	12 GBP	
0,7914 GBP	1 EUR	
100 EUR	85 EUR s str.	

Odgovor: Za 1.500 ton blaga bomo v Veliki Britaniji iztržili 14,206.957,60 EUR s stroški, če stanejo 3 pundi tega blaga v Veliki Britaniji 12 GBP in smo plačali 15 % izvoznih stroškov.



Slovensko podjetje je v Kanado izvozilo 15 quarterov blaga, ki ga doma prodaja po 12,52 EUR za kilogram. Koliko bo slovensko podjetje iztržilo v Kanadi pri prodaji tega blaga, če mora poravnati še 14 % izvoznih stroškov?

Analiza naloge: x CAD s str..... 15 quarter blaga
 1 kg..... 12,52 EUR
 100 CAD..... (100 – 14) CAD s stroški
 Poiščemo: 1 EUR..... 1,5860 CAD
 1 quarter..... 11,3397 kg

Rešitev:

x CAD s str.	15 qr	$x = \frac{15 \times 11,3397 \times 12,52 \times 86 \times 1,5860}{100} = 2.904,68 \text{ CAD s str.}$
1qr	11,3397 kg	
1 kg	12,52 EUR	
1 EUR	1,5860 CAD	
100 CAD	86 CAD s str.	

Odgovor: Za izvoz 15 quaterov blaga v Kanado bomo iztržili 2.904,68 CAD, če bomo plačali 14 % izvoznih stroškov in če to blago pri nas stane 12,52 EUR za kilogram.



Koliko EUR bi nas stal liter vina, ki bi ga uvozili iz ZDA, če stane 5 quartov tega blaga v ZDA 75 USD? Na to ceno bi dobili 7 % popusta zaradi naročene količine, plačati pa bi morali carino v višini 12 %.

Analiza naloge: x EUR s str..... 1 l vina
 5 quartov (qt)..... 75 USD
 100 USD s str..... (100 – 7) USD
 100 EUR..... (100 + 12) EUR s stroški
 1 EUR 1,5849USD
 1 qt..... 0,9463 l

Rešitev:

x EURs str.	1 l	$x = \frac{75 \times 93 \times 112}{0,9463 \times 5 \times 100 \times 1,5849 \times 100} = 10,42 \text{ EUR s str.}$
0,9463 l	1 qt	
5 qt	75 USD s str.	
100 USD s str.	93 USD	
1,5849 USD	1 EUR	
100 EUR	112 EUR s str.	

Odgovor: Za 1 liter vina bomo v Sloveniji plačali 10,42 EUR s stroški, če v ZDA stane 5 quartov 75 USD, dobavitelj nam prizna 7 % rabata, plačati po moramo 12 % carine.



Po koliko EUR bo trgovec prodajal ¼ kilogramski zavitek blaga, ki ga je kupil po 85,54 EUR za 16 kilogramsko vrečo in želi s prodajo pokriti 13 % trgovske marže?

Analiza naloge: x EUR z mar..... ¼ kg zavitek (0,25 kg)
 16 kg blaga..... 85,54 EUR
 100 EUR (100 + 13) EUR z mar.

Rešitev:

x EUR z mar.	0,25 kg	$x = \frac{0,25 \times 85,54 \times 113}{16 \times 100} = 1,51 \text{ EUR z maržo}$
16 kg	85,54 EUR	
100 EUR	113 EUR z mar.	

Odgovor: $\frac{1}{4}$ kg zavitek bo trgovec prodajal po 1,51 EUR, če je kupil 16 kg vreče blaga in želi ustvariti 13 % marže.



4. Rešite še sami naslednje naloge.

- a) Koliko nas staneta dva litra pijače, ki smo ju uvozili iz Londona, če pri nas stane en liter te pijače 1,50 EUR brez stroškov uvoza in če znašajo stroški uvoza 8,5 %?
- b) Koliko EUR iztržimo, če izvozimo na Japonsko 6,5 ton blaga, ki ga pri nas prodajamo po 3,25 EUR za 2 kg vrečko in smo imeli pri izvozu 11,5 % stroške? Koliko je to JPY?
- c) Koliko japonskih jenov iztržimo pri izvozu 150 metrov blaga, ki smo ga kupili v New Yorku po 2,15 USD za 2 foota, če imamo pri izvozu 5,5 % stroške, pri uvozu pa 8,5 % stroške?



UTRJUJEMO, RAZMIŠLJAMO, RAZISKUJEMO, VADIMO

1. Predstavite pojem verižni račun in veriga.
2. Pravila za sestavljanje verige razložite na novem izmišljenem primeru.
3. Ugotovite bistvene značilnosti dodatnih stroškov, ki nastopajo v verigi? Pojasnite podobnosti in razlike pri poslovanju znotraj države in v zunanjetrgovinskem poslovanju.
4. Pojasnite pojma tečaj in tečajnica. Ugotovite, kako je s poslovanjem s članicami Evropske unije in kdo so članice Evropske monetarne unije. Pomagajte si z internetnimi podatki Banke Slovenije.
5. Poiščite tečaje poslovnih bank v vaši okolici. Utemeljite razlike v tečajih poslovnih bank.
6. Ugotovite bistvene vzroke uporabe tujih merskih sistemov. Kateri sta osnovni skupini tujih merskih sistemov in v čem vidite uporabnost le-teh v današnjem času?
7. Za utrjevanje znanja rešite še naloge iz tretjega poglavja Zbirke vaj iz poslovne matematike (Domjan 2008, 6–9).

V poglavju verižni račun smo se naučili na hiter in učinkovit način reševati naloge in probleme, ko imamo opravka s preračunom različnih količin in vrednosti iz tujih merskih in denarnih sistemov. Ugotovimo lahko, da je to najhitrejši način reševanja nalog sklepnega računa takrat, ko obstaja pogoj prenosorameznosti količin v verigi.



5 RAZDELILNI RAČUN

V poglavju bomo spoznali teoretične osnove in različne ključe za delitev delilne mase med delilne upravičence. Ključe delitve, kot so delitev na enake dele, delitveno razmerje (premo in obratno), delitev z ulomki in delitev z razlikami, bomo uporabljali pri enostavnem in sestavljenem razdelilnem računu.

5 RAZDELILNI RAČUN

V življenju smo velikokrat postavljeni pred odločitev, kako razdeliti tisto, kar imamo. Če vemo še, komu deliti in kako razdeliti, ni težav. Vendar velikokrat ni prav lahko. Kaj za nas v poslovnem življenju predstavlja napaka pri nepravilni razdelitvi stroškov poslovanja, kakšne posledice ima za organizacijo, v kateri smo zaposleni, napravnost izstavljen račun za plačilo storitev, ki smo jih opravili za našega poslovnega partnerja, ker računovodkinja ni naredila pravilne specifikacije opravljenih del? Veliko primerov bi lahko navajali. Da bi se izognili nemoralnemu, neetičnemu ali namernemu početju, je dobro, da spoznamo vse možnosti in pasti, ki jih ponuja razdelilni račun.

Razdelilni račun je računski **postopek**, ki nam omogoča delitev. Da bi lahko izvedli delitev, potrebujemo nekaj, kar lahko razdelimo (**delilno maso**), potrebujemo tudi tiste, ki jim bomo delili (**delilni upravičenci**) in nenazadnje potrebujemo tudi navodilo, kako naj delimo (**delilni ključ**, **delilni predpis** ali **delilni kriterij**). Če povzamemo, ugotovimo, da z razdelilnim računom rešujemo probleme delitve delilne mase med upravičence v delitvi, po predpisanem ali dogovorjenem delilnem ključu.

Razlikujemo več **vrst** razdelilnih računov. Delitev je odvisna od kriterija, ki omogoča delitev.

- Glede na **število delilnih ključev** ločimo:
 - **enostavni razdelilni račun** – delitev določa en sam delilni ključ
 - **sestavljeni razdelilni račun** – delitev je določena z več delilnimi ključi.
- Glede na **vrsto delilnega ključa** ali **metodo izračuna**:
 - delitev na **enake dele**
 - delitev v **razmerju**
 - delitev z **ulomki** ali **odstotkovnimi (promilnimi) deleži**
 - delitev z **razlikami**.

V nadaljevanju bomo najprej spoznali enostavni razdelilni račun, nato pa še sestavljenega. Osnovno priporočilo je, da podatke uredimo v pregledne tabele. Enostavni razdelilni račun bo predstavljen podrobneje z razlago primerov po različnih delilnih ključih. Sestavljeni razdelilni račun pa z reševanjem nalog, saj zanj veljajo enaka pravila reševanja kot za enostavni razdelilni račun, razlika je le v tem, da računamo z več delilnimi ključi proporcionalno (postopno) ali pa jih celo lahko združimo.

5.1 ENOSTAVNI RAZDELILNI RAČUN

Enostavni razdelilni račun je račun, pri katerem se pojavlja **en delilni ključ** (predpis, kriterij). Delitev je enostavna, zato je ta vrsta računa tudi dobila to ime. Naloge enostavnega razdelilnega računa lahko rešujemo glede na vrsto delilnega ključa po **štirih ključih** oziroma kriterijih. Vsakega od kriterijev delitve bomo predstavili v samostojnem podpoglavju.

5.1.1 Delitev na enake dele



7 študentov je z delom na Kmetijsko-živilskem sejmu zaslužilo 1.750,00 DE. Odločili so se, da bodo denar porabili za končni izlet. Koliko DE odpade na posameznega študenta?

Rešitev: $1.750,00 : 7 = 250,00$ DE

Odgovor: Vsak izmed sedmih študentov ima poravnane stroške izleta v višini 250,00 DE.

Način reševanja po ključu delitve na enake dele je najenostavnejši način, saj vsak udeleženec v delitvi dobi enak delež.



50 študentov je opravljalo izpit iz Poslovne matematike. Izračunajmo, kakšna je bila povprečna ocena, če je en študent pisal odlično (10), trije študenti prav dobro (9), pet študentov prav dobro (8), dva študenta dobro (7), deset študentov zadostno (6), sedem študentov nezadostno (5), pet študentov nezadostno (4), ostali študenti pa nezadostno (3).

Rešitev:	1 študent	odlično (10)	=	10
	3 študenti	prav dobro (9)	=	27
	5 študentov	prav dobro (8)	=	40
	2 študenta	dobro (7)	=	14
	10 študentov	zadostno (6)	=	60
	7 študentov	nezadostno (5)	=	35
	5 študentov	nezadostno (4)	=	20
	17 študentov	nezadostno (3)	=	51
	50	SKUPAJ:		257

Delilna masa: 257 Upravičenci: 50 Povprečna ocena: $257 : 50 = 5,14$

Odgovor: Povprečna ocena študentov na izpitu iz Poslovne matematike je bila 5,14.

5.1.2 Delitev v razmerju



Študenti so z delom na Kmetijsko-živilskem sejmu zaslužili 1.750,00 DE. Odločili so se, da bodo denar razdelili v razmerju 15 : 18 : 36. Koliko DE odpade na posameznega študenta?

Opišimo postopek reševanja naloge. Delilna masa znaša 1.750,00 DE. Ker je delitev v razmerju 15 : 18 : 36 in razmerska števila niso okrajšana, jih je potrebno okrajšati s skupnim večkratnikom 3. Vidimo, da so podatki v premem sorazmerju, saj večji zaslužek nosi večje deleže v delitvi. Razmerje rešujemo z uvedbo neznanke x , kar pomeni, da na ta način izračunamo osnovni delež x , ki nam pomaga pri razrešitvi sorazmerja, ko določamo zaslužke posameznih študentov. Pri delitvi opozorimo na to, da moramo delilno maso razdeliti natančno. Ker je ta podana v DE in ker vemo, da so pri nas najmanjša enota stotini, bomo rezultat (zaslužek v DE) zapisali na dve decimalni mesti natančno. Iz tega sledi, da je potrebno izračunati osnovni delež na več kot dve decimalni mesti, saj bo le tako možna zaokrožitev rezultata na dve decimalni mesti natančno.

Rešitev:

Študenti	Delilni način			Zaslужek v DE
	razmerje	Okrajšano razmerje /:3	Deli	
1.	15	5	$5x$	380,43
2.	18	6	$6x$	456,52
3.	36	12	$12x$	913,05*
		SKUPAJ:	$23x = 1.750,00$ $x = 76,08695652$	

*popravek vrednosti za 0,01 DE

Odgovor: Prvi študent bo prejel zaslužek v višini 380,43 DE, drugi 456,52 DE in tretji 913,05 DE, skupaj torej 1.750,00 DE.

Najpogostejši način delitve delilne mase med upravičence je delitev v razmerju. Iz poglavja o razmerju in sorazmerju že vemo, da je odnos med deleži posameznih udeležencev lahko v premem ali obratnem sorazmerju.

Če obnovimo naše znanje o razmerjih, bi lahko rekli, da je delitev:

- **premo sorazmerna**, če večje razmersko število da večji delež pri delitvi delilne mase
- **obratno sorazmerna**, če večje razmersko število da manjši delež pri delitvi delilne mase.



Študenti so z delom na Kmetijsko-živilskem sejmu zaslužili 1.750,00 DE. Odločili so se, da bodo denar razdelili v obratnem sorazmerju z minutami, ki so jih porabili za odmor med malico. Prvi študent je počival 15 minut, drugi 20 minut in tretji 10 minut. Koliko DE odpade na posameznega študenta?

Opišimo postopek reševanja naloge. Delilna masa znaša 1.750,00 DE. Ker je delitev v obratnem sorazmerju $1/15 : 1/20 : 1/10$, moramo poiskati skupni imenovalec, ki je 60 ($2^2 \times 3 \times 5$). Iz tega dobimo razmerje v obliki $4 : 3 : 6$. Razmerska števila so že okrajšana, saj nimajo več drugega skupnega delitelja kot 1. Opravimo razdelitev zaslužka.

Rešitev:

Študenti	Delilni način			Zaslужek v DE
	ulomki	okrajšano razmerje	deli	
1.	$\frac{1}{15} = \frac{4}{60}$	4	$4x$	538,46
2.	$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$	3	$3x$	403,85
3.	$\frac{1}{10} = \frac{6}{60}$	6	$6x$	807,69
		SKUPAJ:	$13x = 1.750,00$ $x = 134,6153846$	

Odgovor: Prvi študent bo prejel zaslužek v višini 538,46 DE, drugi 403,85 DE in tretji 807,69, skupaj torej 1.750,00 DE.

5.1.3 Delitev z uporabo ulomkov ali odstotkov



Študenti so z delom na Kmetijsko-živilskem sejmu zaslužili 1.750,00 DE. Odločili so se, da bodo denar razdelili tako, da dobi prvi udeleženec $\frac{1}{7}$, drugi $\frac{3}{8}$, tretji pa ostanek. Koliko DE odpade na posameznega študenta?

Opišimo postopek reševanja naloge. Delilna masa znaša 1.750,00 DE. Delitev je podana v obliki ulomkov $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{8}$ in ostanek, zato moramo poiskati skupni imenovalec, ki je 56 (7×8). Iz tega dobimo razmerje v obliki $8 : 21 : 27$. Razmersko število ostaneka smo dobili tako, da smo od celote 56 odšteli deleže prvega in drugega študenta. Opravimo razdelitev zaslužka.

Rešitev:

Študenti	Delilni način			Zaslužek v DE
	ulomki	okrajšano razmerje	deli	
1.	$\frac{1}{7} = \frac{8}{56}$	8	$8x$	250,00
2.	$\frac{3}{8} = \frac{21}{56}$	21	$21x$	656,25
3.	ostanek, $\frac{27}{56}$	27	$27x$	843,75
		SKUPAJ:	$56x = 1.750,00$ $x = 31,25$	

Odgovor: Prvi študent bo prejel zaslužek v višini 250,00 DE, drugi 656,25 DE in tretji 843,75 DE, skupaj torej 1.750,00 DE.

Delitev z ulomki uporabljamo, ko so posamezni delitveni pogoji podani z ulomki (ali desetiškimi ulomki: odstotki – $p/100$, promili – $p/1.000$). Postopek razdelitve poteka po ustaljeni poti:

- zapišemo podatke v pripravljeno tabelo
- zapišemo ulomke, ki jih uredimo tako, da jim poiščemo skupni imenovalec in jih spremenimo v razmerska števila
- razmerska števila okrajšamo
- zapišemo deleže kot produkte okrajšanih razmerskih števil z osnovnim deležem x
- seštejemo deleže in izračunamo osnovni delež x , ki ga dobimo tako, da delilno maso delimo s številom deležev
- izračunani osnovni delež x po vrsti pomnožimo z okrajšanimi razmerskimi števili, ki pripadajo udeležencem v delitvi
- s seštevanjem izračunanih rezultatov po udeležencih preverimo pravilnost delitve delilne mase.

Bolj iznajdljivi lahko uporabljajo tudi neposredni način izračuna, ki je možen le v primeru, če je znana delilna masa.



Študenti so z delom na Kmetijsko-živilskem sejmu zaslužili 1.750,00 DE. Odločili so se, da bodo denar razdelili tako, da dobi prvi udeleženec 25 %, drugi $\frac{3}{8}$, tretji pa ostanek. Koliko DE odpade na posameznega študenta?

Opišimo postopek reševanja naloge. Delilna masa znaša 1.750,00 DE. Delitev je podana v obliki desetiškega ulomka ali odstotka $\frac{25}{100}$, ulomka $\frac{3}{8}$ in ostanka. Tudi v tem primeru moramo poiskati skupni imenovalec, ki je 200 ($2^3 \times 5^2$). Dobimo razmerje v obliki 50 : 75 : 75. Razmerje okrajšamo in dobimo 2 : 3 : 3. Opravimo razdelitev zaslužka.

Rešitev:

Študenti	Delilni način			Zaslužek v DE
	ulomki	okrajšano razmerje	deli	
1.	$\frac{25}{100} = \frac{50}{200}$	50, 2	$2x$	437,50
2.	$\frac{3}{8} = \frac{75}{200}$	75, 3	$3x$	656,25
3.	ostanek, $\frac{75}{200}$	75, 3	$3x$	656,25
		SKUPAJ:	$8x = 1.750,00$ $x = 218,75$	

Odgovor: Prvi študent bo prejel zaslužek v višini 437,50 DE, drugi 656,25 DE in tretji 656,25 DE, skupaj torej 1.750,00 DE.

5.1.4 Delitev z razlikami

Delitev med posameznimi upravičenci je podana s pomočjo razlik med udeleženci v delitvi. Gre za določitev deležev, ki so podani z medsebojnimi absolutnimi razlikami. Eden od udeležencev bo prejel osnovni delež (x), deleži ostalih udeležencev pa bodo podani z opisom do ostalih udeležencev. Delilni deleži so opisani z absolutno in ne z relativno razliko (podani v odstotkih).



Trije študentje so z delom na Kmetijsko-živilskem sejmu zaslužili 1.750,00 DE. Odločili so se, da bodo denar delili takole: prvi bo dobil 100,00 DE več kot drugi, tretji pa trikrat več kot prvi in drugi skupaj. Koliko denarja bo dobil vsak študent?

Opišimo postopek reševanja naloge. Delitev je podana z razlikami med upravičenci. Da bi natančno določili upravičenca, ki nosi osnovni delež x , ponovno preberemo podatke. Ugotovili bomo, da za drugega udeleženca nimamo podane delitve z razlikami. Torej drugi udeleženec prejme osnovni delež x . V nadaljevanju določimo razlike med udeleženci po zaporedju tako, da se dajo te razlike tudi zapisati. V našem primeru imamo za prvega udeleženca podan odnos med prvim in drugim, kajti prvi dobi 100,00 DE več kot drugi. Matematično to zapišemo kot $x + 100,00$ DE. Nadaljujemo z določanjem odnosov med udeleženci. Za nas je pomemben še zadnji udeleženec, ki prejme trikrat toliko kot prvi in drugi udeleženec skupaj. Prvi udeleženec prejme $x + 100,00$ DE, drugi x DE, skupaj torej

$((x + 100,00) + x)$, kar je $2x + 100,00$ DE. Tretji udeleženec prejme trikrat toliko, kot prvi in drugi skupaj, kar pomeni $3(2x + 100,00)$ ali $6x + 300,00$ DE. Ker smo določili vse odnose, postopek nadaljujemo tako, da seštejemo urejene razlike, ki jih izenačimo z delilno maso. Izračunamo osnovni delež x , ki je v našem primeru 168,75 DE in izračunamo zaslužke posameznih udeležencev na osnovi postavljenih razlik med njimi (vstavimo osnovni delež x v urejene razlike).

Rešitev:

Študentje	Delilni način			Zaslužek v DE
	opis naloge	razlike	urejene razlike	
1.	II. + 100,00	$x + 100,00$	$x + 100,00$	268,75
2.		x	x	168,75
3.	$3(I. + II.)$	$3(x + x + 100,00)$	$6x + 300,00$	1.312,50
		SKUPAJ:	$8x + 400,00 = 1.750,00$ $8x = 1.350,00 \quad x = 168,75$	

Odgovor: Prvi študent bo prejel zaslužek v višini 268,75 DE, drugi 168,75 DE in tretji 1.312,50 DE, kar skupaj znaša 1.750,00 DE.



Razdelite 391.000,00 DE med pet pravnih oseb tako, da dobi prva četrtno vsote, ki pripada drugi in tretji skupaj, druga 8.000,00 DE več kot tretja, četrta toliko, kot tretja in druga skupaj ter peta 12.000,00 DE manj kot tretja. Koliko DE prejme posamezna pravna oseba?

Rešitev:

Pravna oseba	Delilni način			Zaslužek v DE
	opis naloge	razlike	urejene razlike	
1.	$\frac{1}{4}(II. + III.)$	$\frac{1}{4}(x + x + 8.000,00)$	$(0,5x + 2.000,00)$	37.000,00
2.	III. + 8.000,00	$(x + 8.000,00)$	$(x + 8.000,00)$	78.000,00
3.		x	x	70.000,00
4.	III. + II.	$(x + x + 8.000,00)$	$(2x + 8.000,00)$	148.000,00
5.	III. - 12.000,00	$(x - 12.000,00)$	$(x - 12.000,00)$	58.000,00
		SKUPAJ:	$(5,5x + 6.000,00) = 391.000,00$ $5,5x = 385.000,00$ $x = 70.000,00$	

Odgovor: Prva pravna oseba dobi 37.000,00 DE, druga 78.000,00 DE, tretja 70.000,00 DE, četrta 148.000,00 DE in peta 58.000,00 DE, kar je skupaj 391.000,00 DE.



5.1 Rešite naslednje naloge.

a) Tekmovalci so se udeležili tekmovanja iz atletike, kjer je nagradni sklad znašal 12.000,00 DE. Koliko prejme posamezni tekmovalec, če se je organizator tekmovanja odločil, da bo nagradni sklad razdelil takole: prvi dobi $\frac{3}{5}$ celotnega sklada, drugi $\frac{2}{6}$, tretji pa ostanek?

- b) Kako naj razdelimo skupne stroške prevoza, ki znašajo 5.700,00 DE na posamezne gospodarske družbe, če jih delimo prenosorazmerno z oddaljenostjo prevoza? Prva gospodarska družba je oddaljena 35 km, druga 60 km, tretja 75 km in četrta 20 km.
- c) Trije investitorji so vlagali v izgradnjo športnega objekta. Poravnati morajo stroške prevoza podizvajalcu v vrednosti 2.470,00 DE v obratnem sorazmerju z vloženimi delovnimi urami. Prvi investitor je s svojimi delavci delal 16 ur, drugi 32 ur in tretji 24 ur. Koliko znašajo stroški prevoza posameznega investitorja?
- d) Kakšne nagrade prejmejo posamezni študentje, če znaša skupni nagradni sklad 7.500,00 DE, če upoštevamo kriterij za delitev nagrad, ki pravi, da dobi prvi tekmovalec trikrat več kot drugi in tretji skupaj, tretji pa 500,00 DE manj kot drugi.

5.2 SESTAVLJENI RAZDELILNI RAČUN

O sestavljenem razdelilnem računu govorimo takrat, ko na delitev delilne mase vpliva **več** (vsaj dva) **pogojev ali ključev delitve**.

Po obliki ločimo dve vrsti razdelilnega računa:

- razdelilni račun **z združljivimi ključi** – vsi delilni ključi se lahko združijo ali sestavijo v en delilni ključ
- razdelilni račun **s parcialnimi ključi** – posamezni delni ključi delijo le posamezne dele celotne delilne mase, zato je delitev postopna.

5.2.1 Sestavljeni razdelilni račun z združljivimi ključi

Osnovno načelo reševanja nalog z združljivimi delilnimi ključi je, da se vsi dani razdelilni ključi lahko **sestavijo** ali **združijo** v **en sam delilni ključ**. Postopek izvedemo tako, da istoležne razmerske deleže med seboj **pomnožimo** in s tem dobimo le en skupen delilni ključ. Nalogo rešimo po principu reševanja enostavnega razdelilnega računa.



Skupina treh študentov je za sodelovanje v projektu prejela 9.549,90 DE nagrade. Študenti so si nagrado razdelili glede na vložen trud. Prvi študent je delal 6 dni po 7 ur, drugi 7 dni po 7 ur in tretji 5 dni po 8 ur. Koliko DE nagrade prejme posamezni študent?

Opišimo postopek reševanja naloge. Delitev s pomočjo razmerij smo že spoznali pri enostavnem razdelilnem računu. Da bi lažje dokazali, zakaj lahko delne razdelilne ključe združimo, se spomnimo posebne oblike sorazmerja, torej viseče oblike. Če nalogo rešimo z nastavitvijo sorazmerja v viseči obliki dobimo naslednji zapis:

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= 6 : 7 : 5 \\ &= 7 : 7 : 8 \end{aligned}$$

Z znanjem, ki ga imamo, lahko rešimo zapis sestavljenega sorazmerja tako, da ga spremenimo v enostavno sorazmerje in dobimo: $x_1 : x_2 : x_3 = (6 \times 7) : (7 \times 7) : (5 \times 8)$.

S tem smo dokazali, da lahko med seboj združimo posamezne delilne ključe tako, da jih med seboj množimo.

Rešitev:

Študent	I. razmerje število dni	II. razmerje število ur	Razmerska števila	Deli	Zaslужek v DE
1.	6	7	42	$42x$	3.061,80
2.	7	7	49	$49x$	3.572,10
3.	5	8	40	$40x$	2.916,00
			SKUPAJ:	$131x =$ $x = 72,90$	9.549,90

Odgovor: Prvi študent prejme 3.061,80 DE, drugi 3.572,10 DE in tretji 2.916,00 DE, kar skupaj znaša 9.549,90 DE.



Tri gospodarske družbe so pri skupni investiciji zaslužile 70.000.000,00 DE. Zaslужek si razdelijo glede na vložena sredstva (stroške) in glede na število delavcev. Prva družba je sodelovala z 8 delavci in stroški v višini 250.000,00 DE, druga s 7 delavci in stroški v višini 300.000,00 DE in tretja z 10 delavci in stroški v višini 150.000,00 DE. Koliko prihodka prejme posamezna gospodarska družba?

Opišimo postopek reševanja naloge. Na delitev delilne mase vplivata dva ključa (stroški in število delavcev). Ključa sta združljiva, vendar je potrebno stroške investicije urediti. Ključa združimo z množenjem razmerskih števil I. in II. razmerja, pri čemer dobimo sestavljeno razmerje, ki ga okrajšamo, določimo osnovni delež x in opravimo razdelitev.

Rešitev:

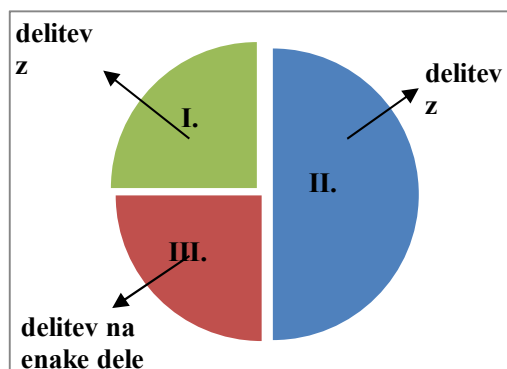
Gosp. družba	I. razmerje Število delavcev	II. razmerje Stroški	Sestavljeno razmerje	Okrajšana razmerska števila	Deli	Zaslужek v DE
1.	8	250.000,00	2.000.000,00	20	$20x$	25.000.000,00
2.	7	300.000,00	2.100.000,00	21	$21x$	26.250.000,00
3.	10	150.000,00	1.500.000,00	15	$15x$	18.750.000,00
			SKUPAJ:		$56x =$ $x = 1,250.000,00$	70.000.000,00

Odgovor: Prva gospodarska družba prejme 25.000.000,00 DE, druga 26.250.000,00 DE in tretja 18.750.000,00 DE, kar skupaj znaša 70.000.000,00 DE.

5.2.2 Sestavljeni razdelilni račun s parcialnimi ključmi

Pri reševanju nalog sestavljenega razdelilnega računa **delimo** delilno maso **postopoma (parcialno)**. Posamezni delilni ključmi delijo celotno delilno maso na posamezne dele (I., II., III.) tako, kot predpisujejo delilni ključmi. Izračunani deli delilne mase se nato delijo po delilnih ključih znotraj teh delitev: lahko kot delitev z ulomki, kot delitev z razlikami, kot delitev v razmerju ali kot delitev na enake dele.

Grafično si lahko delitev ponazorimo tako kot kaže slika 5.



Slika 5: Razdelilni račun s parcialnimi ključi



Športno društvo je organiziralo tekmovanje v košarki. Pridobilo si je sponzorska sredstva v višini 5.520,00 DE. Za organizacijo tekmovanja je porabilo $\frac{1}{5}$ vseh sredstev. Ostanek je razdelilo med štiri prvo uvrščene ekipe takole: prva dobi $\frac{1}{3}$ nagradnega sklada, druga $\frac{1}{4}$, tretje in četrto uvrščena ekipa pa si razdelita ostanek v razmerju 4 : 3. Kakšne nagrade prejmejo nagrajene ekipe?

Rešitev:

Delitev delilne mase bo potekala v treh nivojih delitve. Prva delitev se nanaša na delitev sponzorskih sredstev za organizacijo tekmovanja in na nagradni sklad.

Sredstva	I. delitev – ulomki	Razmerska števila	Deli	Zaslужek v DE
organizacija	$\frac{1}{5}$	1	x	1.104,00
nagradni sklad	ostanek = $\frac{4}{5}$	4	$4x$	4.416,00
SKUPAJ:			$5x = 5.520,00$ $x = 1.104,00$	

Druga delitev se nanaša na delitev nagradnega sklada med vse ekipe:

Ekipa	II. delitev – ulomki	Razmerska števila	Deli	Zaslужek v DE
prva	$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$	4	$4x$	1.472,00
druga	$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$	3	$3x$	1.104,00
tretja in četrta	ost., = $\frac{5}{12}$	5	$5x$	1.840,00
SKUPAJ:			$12x = 4.416,00$ $x = 368,00$	

Tretja delitev se nanaša na delitev nagradnega sklada med tretje in četrto uvrščeno ekipo:

Ekipa	III. delitev – razmerja	Deli	Zaslужek v DE
tretja	4	$4x$	1.051,43
četrta	3	$3x$	788,57
SKUPAJ:		$7x = 1.840,00$ $x = 262,8571429$	

Odgovor: Za stroške tekmovanja porabijo organizatorji 1.104,00 DE, ostanek pa razdelijo med ekipe takole: prvo uvrščena prejme 1.472,00 DE, drugo uvrščena 1.104,00 DE, tretje uvrščena 1.051,43 DE in četrto uvrščena 788,57 DE.



Šestim poslovalnicam je potrebno razdeliti 5.000 kosov blaga:

- prve tri poslovalnice dobijo $\frac{3}{5}$ celotne količine, blago pa si razdelijo v premem sorazmerju s povprečnim številom kupcev v poslovalnici: A: 500 kupcev, B: 300 kupcev in C: 800 kupcev
- ostale tri pa si ostanek razdelijo takole: četrta in peta v obratnem sorazmerju z oddaljenostjo od veleprodajnega skladišča: D: 25 km in E: 60 km. Šesta poslovalnica (F) pa dobi ostanek.

V delitvi opozorimo na dejstvo, da so kosi blaga izračunani na kos natančno, zato bomo to opozorilo upoštevali pri zaokroževanju rezultata, kjer velja zaokroževanje po matematičnih pravilih (vrednost več kot pet se zaokroži navzgor). V našem primeru imamo v drugi delitvi, ko gre za delitev v premem sorazmerju rezultat 937,5 in 562,5. Odločili smo se, da bomo naredili popravek pri poslovalnici A, kjer bo zato rezultat v delitvi 938. Popravek moramo upoštevati tudi pri poslovalnici B in smiselno zaokrožiti število kosov navzdol na 562, saj mora ostati delilna masa do enic natančna, torej točno 3.000 kosov. Možno je tudi druga zaokrožitev (poslovalnica B navzgor, poslovalnica A navzdol).

Rešitev:

Poslovalnica	I. delitev – ulomki	Deli	Rezultat v kosih
A+B+C	$\frac{3}{5}$	$3x$	3.000
D+E+F	os. $= \frac{2}{5}$	$2x$	2.000
SKUPAJ:		$5x = 5.000$ $x = 1.000$	

Poslovalnica	II. delitev – PS	Deli	Rezultat v kosih
A	500	$5x$	938
B	300	$3x$	562
C	800	$8x$	1.500
SKUPAJ:		$16x = 3.000$ $x = 187,5$	

Poslovalnica	II. delitev – OS	Deli	Rezultat v kosih
D	$\frac{1}{25} = \frac{12}{300}$	$12x$	80
E	$\frac{1}{60} = \frac{5}{300}$	$5x$	33
F	os, $\frac{283}{300}$	$283x$	1.887
SKUPAJ:		$300x = 2.000$ $x = 6,6667$	

Odgovor: Prva poslovalnica (A) prejme 938 kosov, druga (B) 562 kosov, tretja (C) 1.500 kosov, četrta (D) 80 kosov, peta (E) 33 kosov in šesta (F) 1.887 kosov, kar skupaj znaša 5.000 kosov.



5.2 Rešite naslednje naloge.

- a) Pet sosedov se je dogovorilo, da bo uredilo skupni prostor za razvedrilo. Stroški ureditve znašajo 5.000 DE in si jih bodo razdelili takole:
- prva dva soseda (A, B) bosta poravnala $\frac{3}{5}$ celotnih stroškov, ki si jih bosta razdelila v premem sorazmerju glede na stroške materiala za izgradnjo. Sosed A je navil material v višini 950 DE, sosed B pa 725 DE.
 - druga dva soseda (C, D) bosta poravnala 32 % celotnih stroškov, in sicer v obratnem sorazmerju z oddaljenostjo od skupnega prostora. Sosed C je oddaljen 6,50 km, sosed D pa 500 metrov.
 - ostanek stroškov bo poravnal peti sosed (E).
- Opravite razdelitev in ugotovite, koliko DE znašajo stroški posameznega soseda.

- b) Petim poslovalnicam je podjetje razdelilo 5.000 kosov blaga takole:
- prvi dve poslovalnici prejmeta 35 % celotne količine in si jo razdelita v obratnem sorazmerju s priznanim kalom, ki za poslovalnico A znaša 18 kosov, za poslovalnico B pa 45 kosov
 - drugi dve poslovalnici prejmeta $\frac{3}{5}$ celotne količine in si jo razdelita tako, da prejme poslovalnica C $\frac{1}{4}$ kosov več kot poslovalnica D
 - zadnja poslovalnica E pa prejme ostanek celotne količine v delitvi.
- Opravite razdelitev in ugotovite, koliko kosov blaga prejme posamezna poslovalnica.

- c) Šestim poslovalnicam je podjetje razdelilo 2.000 kosov blaga takole:
- prvi dve poslovalnici prejmeta 20 % celotne količine in si jo razdelita v obratnem sorazmerju s stroški skladiščenja, ki so za poslovalnico A 240 DE, za poslovalnico B pa 360 DE
 - druge tri poslovalnice prejmejo $\frac{3}{5}$ celotne količine in si jo razdelijo tako, da prejme poslovalnica D 15 kosov več kot poslovalnica C, poslovalnica E pa 50 kosov manj kot poslovalnica C in D skupaj
 - zadnja poslovalnica F pa prejme ostanek celotne količine v delitvi.
- Opravite razdelitev in ugotovite, koliko kosov blaga prejme posamezna podjetje.

**UTRJUJEMO, RAZMIŠLJAMO, RAZISKUJEMO, VADIMO**

1. Razložite pojem razdelilni račun in osnovne količine.
2. Na primeru pojasnite razliko med enostavnim in sestavljenim razdelilnim računom.
3. Opišite metode reševanja razdelilnega računa po osnovnih značilnostih.
4. Načrtujte in organizirajte strokovno ekskurzijo. Pridobite si sponzorje ali donatorje. Opravite razdelitev stroškov ekskurzije in rezultate predstavite skupnosti študentov. Odločite se, ali boste ekskurzijo tudi dejansko izpeljali. Utemeljite svoj odgovor.
5. Kakšna je razlika med sestavljenim razdelilnim računom z združljivimi in parcialnimi delilnimi ključi? Razliko še podkrepite s praktičnim primerom.
6. Utrdite svoje znanje še z reševanje nalog iz drugega poglavja Zbirke vaj iz poslovne matematike (Domjan 2008, 10–13).

V poglavju razdelilni račun smo se naučili razlikovati in uporabljati enostavni in sestavljeni razdelilni račun. Zdaj vemo, kako prepoznamo razliko med delilnimi ključi in kako lastnosti posameznega ključa vplivajo na reševanje nalog z različnimi problemi. Naloge, ki so se nam zdele na prvi pogled zapletene, smo s pomočjo metod, ki jih ponuja razdelilni račun, znali rešiti.



6 ODSOTNI RAČUN

V poglavju bomo spoznali osnovne pojme: celota, delež, odstotna (promilna) mera, povečana in zmanjšana celota. Računali bomo deleže in izražali odstotke ter njihove medsebojne relacije.

6 ODSOTNI RAČUN

Pupusti, podražitve, znižanja. Kakšen vpliv imajo na naše osebno in poslovno življenje? Velikokrat nam odstotki ne povedo veliko, če ne vemo, od kakšne osnove so izračunani. Za ekonomista je zelo pomembno, da mu to področje ne dela težav. Zato bomo spoznali različne načine računanja z odstotki, naučili ali ponovili bomo osnove za izračunavanje osnovnih količin odstotnega računa, ki ste jih spoznali že v osnovni oziroma srednji šoli. Prikazali bomo nekaj postopkov za hitro reševanje problemov odstotnega računa. Znali bomo odvzemati in dodajati posebnosti v izračunu, predvsem rabate ter popuste in znali uporabljati odstotni račun na veliko področjih. Podatki bodo tako postali med seboj bolj primerljivi. Pri obravnavi odstotnega računa bomo istočasno omenili tudi promilni račun, ki se od odstotnega računa razlikuje le v pretvorniku za izračun.



Študentje so opravljali izpit iz poslovne matematike. Izpita se je udeležilo 55 študentov. 20 študentov je izpit uspešno opravilo. Izračunajmo, kakšen je % uspešnosti študentov na izpitu? Nalogo rešimo s pomočjo metode direktnega sklepanja in s pomočjo enačbe.

Analiza:

C = 55 študentov

d = 20 študentov

p = ?

Rešitev s pomočjo metode **direktnega sklepanja**:

55 študentov	100 %
1 študent	$\frac{100}{55}$ %
20 študentov	$\frac{100 \times 20}{55}$ %

$$p = \frac{100 \times 20}{55} = 36,36 \%$$

Rešitev s pomočjo **enačbe**:

$$p = \frac{100 \times d}{C} = \frac{100 \times 20}{55} = 36,36 \%$$

Odgovor: Izpit je uspešno opravilo 36,36 % študentov.

Računske postopke, ki so povezani z računanjem odstotkov (promil), imenujemo odstotni (promilni) račun. Ime izhaja iz latinske besede »pro centum« in pomeni »za sto« (Čibej, 2002). Pravilni slovenski izraz za procent je odstotek, zato bomo v nadaljevanju uporabljali navedbo odstotek.

Osnovne količine, ki se pojavljajo pri odstotnem računu, so:

- **celota (C)** – osnova od katere računamo odstotke (promile) in predstavlja 100 %. Pravimo ji tudi čista celota.
- **odstotni delež (d)** – del celote (količina), za katero se računa odstotek (promila).

- **odstotna** (promila) **mera** ali **stopnja** (**p**) – ali kratko kar odstotek (promila). Odstotek je $p/100$ ($p/1.000$), kar zapišemo kot $p\%$ ($p\text{‰}$) in nam pove, koliko stotih (tisočih) delov celote predstavlja.

Z odstotki se srečujemo vsak dan, zato nam je pojem znan. Vendar vseeno ne bo odveč opozorilo, da je zapis odstotka (promile) možen v različnih oblikah:

Tabela 3: Zapis odstotnih (promilnih) mer

Ime količine	Zapis oznake	Ulolek	Decimalno število
odstotek	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{100}$	0,01
promila	$\frac{0}{00}$	$\frac{1}{1.000}$	0,001

Po definiciji je **1 % ena stotina celote**. **1 ‰ je ena tisočina celote**. Zato je smiselno, da povemo, kakšen je pretvornik med odstotki in promili: $1\% = 10\text{‰}$. Število pred zapisom oznake se imenuje **odstotno** (promilno) **število** ali odstotne (promilne) **točke**.

$$\begin{array}{ccc}
 15\% & = & 150\text{‰} \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \text{odstotno število ali} & & \text{promilno število ali} \\
 \text{odstotne točke} & & \text{promilne točke}
 \end{array}$$

Opozorimo še na pravilno izražanje, ko prikazujemo **razlike** med odstotnimi (promilnimi) vrednostmi. Rezultat izražamo v **odstotnih točkah** in ne v odstotkih. Primer:

$$10\% - 2\% = 8 \text{ odstotnih točk in ne } 8\%$$

Dobro je vedeti, da odstotna števila lahko **seštevamo**, če se nanašajo na **isto celoto**. Če pa so odstotne spremembe **zaporedne**, si pomagamo z **odstotnimi faktorji**, kar pomeni, da jih med seboj lahko **množimo**. Več o tem bomo pojasnili v poglavju o povečani in zmanjšani celoti.

Ker lahko deleže k celoti tudi prištevamo ali od nje odštevamo, ločimo:

- **povečano celoto** (C^+) – k celoti prištejemo delež in dobimo $C^+ = C + d$
- **zmanjšano celoto** (C^-) – od celote odštejemo delež in dobimo $C^- = C - d$.

Naloge odstotnega (promilnega) računa lahko rešujemo na različne **načine** oziroma po različnih metodah izračuna, ki jih večinoma že poznamo iz prejšnjih poglavij:

- s **sklepnim računom**
- z nastavitvijo **sorazmerij**
- z **obrazci** (formulami)
- z oblikovanjem **enačb** oziroma **sistema enačb**.

6.1 RAČUNANJE OSNOVNIH KOLIČIN ODSOTNEGA RAČUNA

Izpeljimo osnovno enačbo odstotnega računa s pomočjo metode **direktnega sklepanja**:

100 %	C	100 % predstavlja celoto
1 %	$\frac{C}{100}$	1 % predstavlja 100-krat manjši delež C
P %	$\frac{C \times p}{100}$	p % predstavlja p -krat večji delež kot 1 %

Iz navedenega sledi, da je delež enak produktu celote in odstotne mere deljen s 100, kar matematično zapišemo:

$$d = \frac{C \times p}{100}$$



S tem smo izpeljali osnovni **obrazec** za izračun deleža. Ker vemo, da je **verižni račun** posebna oblika sklepnega računa, če so količine v prenosorazmernem odnosu, bi lahko izpeljali osnovni obrazec tudi z verižnikom. Zanima nas, kakšen delež predstavlja p %, če vemo, da 100 % predstavlja celoto. Iz matematike se spomnite navzkrižnega reševanja problema. Delež v verigi bomo označili z x :

$$\begin{array}{c|c} x & p \% \\ \hline 100 \% & C \end{array}$$

$$x = \frac{C \times p}{100}$$

$$d = \frac{C \times p}{100}$$

Isto bi lahko naredili s pomočjo nastavitve **sorazmerja**, saj velja odnos: $C : d = 100 : p$. Spomnimo se pravila za reševanje sorazmerij, ki pravi, da je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov sorazmerja. Tako dobimo:

$$C \times p = 100 \times d$$

Iz tega pa sledi, da je delež:

$$d = \frac{C \times p}{100}$$

Uporaba kateregakoli načina izračuna nas vedno pripelje do istega osnovnega obrazca. Iz njega lahko izpeljemo obrazce tudi za vse ostale količine, kar je razvidno iz tabele 4.

Tabela 4: Osnovne enačbe odstotnega in promilnega računa

Vrsta računa	Osnovne enačbe odstotnega in promilnega računa		
Odstotni račun (%)	$d = \frac{C \times p}{100}$	$p = \frac{100 \times d}{C}$	$C = \frac{100 \times d}{p}$
Promilni račun (‰)	$d = \frac{C \times p}{1.000}$	$p = \frac{1.000 \times d}{C}$	$C = \frac{1.000 \times d}{p}$

Reševanje nalog s pomočjo obrazcev je hiter način reševanja. Paziti moramo na pravilno analizo podatkov, kajti lahko se primeri, da smo postopek izvedli na pravilen način, vendar zaradi napačne analize naloga ni pravilno rešena.



Cena blaga se je zaradi sezonske razprodaje znižala za 35 %. Popust je znašal 257,50 DE. Kakšna je bila maloprodajna cena brez popusta? Koliko smo dejansko plačali za to blago? Nalogo rešimo s pomočjo metode direktnega sklepanja in s pomočjo enačbe.

Analiza:

$$p = 35 \%$$

$$d = 257,50 \text{ DE}$$

$$C = ?$$

$$C^- = ?$$

Rešitev s pomočjo metode **direktnega sklepanja**:

Izračunali bomo maloprodajno ceno pred popustom, torej čisto celoto, ki znaša 100%.

35 %	257,50 DE
1 %	$\frac{257,50}{35}$ DE
100 %	$\frac{257,50 \times 100}{35}$ DE

$$C = \frac{257,50 \times 100}{35} = 735,71 \text{ DE}$$

Naloga od nas zahteva še izračun maloprodajne cene s popustom (C^-). Vemo, da je zmanjšana celota le 65 % čiste celote ($100 - 35 = 65$).

35 %	257,50 DE
1 %	$\frac{257,50}{35}$ DE
65 %	$\frac{257,50 \times 65}{35}$ DE

$$C^- = \frac{257,50 \times 65}{35} = 478,21 \text{ DE}$$

Rešitev s pomočjo **enačbe**: $C = \frac{100 \times d}{p} = \frac{100 \times 257,50}{35} = 735,71 \text{ DE}$

Drugi del naloge, ko iščemo zmanjšano celoto, bi lahko rešili tudi s pomočjo obrazca za izračun zmanjšane celote, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju poglavja, zato naj ta rešitev za sedaj zadostuje.

$$C^- = C - d = 735,71 - 257,50 = 478,21 \text{ DE}$$

Odgovor: Maloprodajna cena brez popusta je bila 735,71 DE, zato smo dejansko prihranili 257,50 DE.



Blago se je podražilo za 12,5 %. Maloprodajna cena tega blaga je znašala 757,50 DE. Koliko DE znaša podražitev in kakšna je nova cena? Nalogo rešimo s pomočjo metode direktnega sklepanja in s pomočjo enačbe.

Analiza:

$$p = 12,5 \%$$

$$C = 757,50 \text{ DE}$$

$$d = ?$$

$$C^+ = ?$$

Rešitev s pomočjo metode **direktnega sklepanja**:

Izračunali bomo vrednost podražitve, torej delež.

100 %	757,50 DE
1 %	$\frac{757,50}{100}$ DE
12,5 %	$\frac{757,50 \times 12,5}{100}$ DE

$$d = \frac{757,50 \times 12,5}{100} = 94,69 \text{ DE}$$

Naloga od nas zahteva še izračun nove maloprodajne, ki vključuje tudi podražitev (C^+). Vemo, da to ceno dobimo tako, da k čisti celote prištejemo podražitev ($100 + 12,5 = 112,5$):

100 %	757,50 DE
1 %	$\frac{757,50}{100}$ DE
112,5 %	$\frac{757,50 \times 112,5}{100}$ DE

$$C^+ = \frac{757,50 \times 112,5}{100} = 852,19 \text{ DE}$$

Rešitev s pomočjo **enačbe**:

$$d = \frac{C \times p}{100} = \frac{757,50 \times 12,5}{100} = 94,69 \text{ DE}$$

Drugi del naloge, ko iščemo povečano celoto, bi lahko rešili tudi s pomočjo obrazca za izračun povečane celote, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju poglavja, zato izračunajmo rešitev po postopku, ki ga poznamo.

$$C^+ = C + d = 757,50 + 94,69 = 852,19 \text{ DE}$$

Odgovor: Podražitev blaga znaša 94,69 DE ali 12,5 %. Nova maloprodajna cena blaga je zdaj 852,19 DE.



6.1 Rešite naslednje naloge.

- Prvega izpitnega roka se je udeležilo 48 študentov, uspešnih je bilo 25. Drugega izpitnega roka se je udeležilo 32 študentov, uspešnih je bilo 18. Na katerem izpitnem roku iz poslovne matematike so bili študenti uspešnejši in za koliko odstotnih točk?
- Proizvajalec blaga nas je obvestil, da je zaradi podražitve nafte dvignil ceno svojega blaga za 3,85 %. Kakšna je nova cena, če je bila stara cena 525,14 DE?
- Odločili smo se, da bomo pri sezonskem popustu cene vseh artiklov v trgovini znižali za 35 %. Kakšna je maloprodajna cena blaga s popustom, če je bila stara cena 75,15 DE?

6.2 RAČUNANJE POVEČANE IN ZMANJŠANE CELOTE

Pri dosednji razlagi smo reševali naloge, kjer smo poznali čisto celoto. Velikokrat v poslovnem življenju poznamo le podatke, ki že vključujejo deleže, ki so od čiste celote odšteti ali k njej prišteti, zato moramo znati izračunati tudi ostale neznane količine. Kot smo že spoznali v tem poglavju, lahko deleže k celoti prištevamo ali jih od nje odštevamo. Zato ponovimo pojma:

- **povečana celota** (C^+) – k celoti prištejemo delež in dobimo $C^+ = C + d$ in
- **zmanjšana celota** (C^-) – od celote odštejemo delež in dobimo $C^- = C - d$.

Na osnovi osnovnih obrazcev povečane in zmanjšane celote, lahko izpeljemo tudi obrazce za ostale neznane količine. Prikazali bomo izpeljavo osnovnih količin, če poznamo podatke za povečano celoto. Izpeljali bomo obrazec za **čisto celoto** (C), če poznamo podatke za **povečano celoto** (C^+):

Osnovni obrazec:

$$C^+ = C + d$$



Namesto deleža v osnovni obrazec vstavimo obrazec za delež in dobimo:

$$C^+ = C + \frac{C \times p}{100}$$

Izraziti želimo čisto celoto (C). Celota se pojavlja na desni strani enačbe v obeh členih, zato jo lahko izpostavimo:

$$C^+ = C \left(1 + \frac{p}{100} \right) \longrightarrow \text{izraz v oklepaju imenujemo } \mathbf{odstotni\ faktor}$$

Po matematičnih pravilih smo dobili v oklepaju dvočlenik z različnima imenovalcema. Člene dvočlenika seštevamo tako, da poiščemo skupni imenovalec, ki je v našem primeru 100. Razširimo izraz v oklepaju na skupni imenovalec, vse ostalo prepisemo:

$$C^+ = C \left(\frac{100 + p}{100} \right)$$

Ker želimo izraziti celoto, se člena v oklepaju rešimo tako, da ga delimo z vrednostjo v oklepaju, kar pa je enako, kot če člen v oklepaju pomnožimo z obratno vrednostjo izraza v oklepaju. Tako dobimo obrazec za čisto celoto, ki je:

$$C = \frac{C^+ \times 100}{100 + p}$$



Po podobnem postopku bi lahko izpeljali tudi obrazec za zmanjšano celoto, le da izhajamo iz osnovne predpostavke, da je $C^- = C - d$.

Nekaj časa se še ustavimo pri povečani celoti. Neznana količina, ki jo še lahko izpeljemo, je **odstotna mera (p)**. Prikazali bomo postopek izpeljave tega obrazca, kar nam bo pomagalo pri izpeljavi obrazcev v prihodnje. Osnovni obrazec $C^+ = C + d$. Ker poznamo obrazec za delež, ga vstavimo v osnovni obrazec in dobimo:

$$C^+ = C + \frac{C \times p}{100}$$

Izraziti želimo odstotno mero (p). Odstotna mera se pojavlja na desni strani enačbe v drugem členu. Na desni strani enačbe nas moti čista celota, ki jo prenesemo preko enačaja na levo stran. Ob prenosu količin preko enačaja dobi le-ta nasprotni predznak, kar pomeni, da je:

$$C^+ - C = \frac{C \times p}{100}$$

Na desni strani enačbe smo dobili ulomek, ki ga bomo odpravili tako, da bomo vsak člen leve in desne strani enačbe pomnožili z vrednostjo imenovalca 100 in dobili:

$$(C^+ - C)100 = C \times p$$

Ker želimo izraziti obrestno mero, nas na desni strani enačbe moti še celota, ki jo bomo odpravili tako, da bomo vse člene enačbe delili s celoto in dobili obrazec za odstotno mero. Istočasno bomo tudi zamenjali levo in desno stran enačbe, saj je običajno iskana izražena neznanka na levi strani enačbe.

$$p = \frac{(C^+ - C)100}{C}$$



Po podobnem postopku bi lahko izpeljali tudi obrazec za odstotno mero, če poznamo podatke za zmanjšano celoto, le da izhajamo iz osnovne predpostavke, da je $C^- = C - d$. Ker znamo izpeljati vse neznane količine, ne bo odveč, da v tabelo 5 zapišemo vse končne obrazce.

Tabela 5: Osnovni obrazci za količine izračunane iz C^+ in C^-

Ime računa	Neznana količina, če je C^+	Neznana količina, če je C^-
odstotni račun (%)	$C^+ = C \left(\frac{100 + p}{100} \right)$ ali	$C^- = C \left(\frac{100 - p}{100} \right)$ ali
(z odstotnim faktorjem)	$C^+ = C \left(1 + \frac{p}{100} \right)$	$C^- = C \left(1 - \frac{p}{100} \right)$
promilni račun (‰)	$C^+ = C \left(\frac{1.000 + p}{1.000} \right)$ ali	$C^- = C \left(\frac{1.000 - p}{1.000} \right)$ ali
(s promilnim faktorjem)	$C^+ = C \left(1 + \frac{p}{1.000} \right)$	$C^- = C \left(1 - \frac{p}{1.000} \right)$
odstotni račun (%)	$C = \frac{C^+ \times 100}{100 + p}$	$C = \frac{C^- \times 100}{100 - p}$
promilni račun (‰)	$C = \frac{C^+ \times 1.000}{1.000 + p}$	$C = \frac{C^- \times 1.000}{1.000 - p}$
odstotni račun (%)	$p = \frac{(C^+ - C)100}{C}$	$p = \frac{(C - C^-)100}{C}$
promilni račun (‰)	$p = \frac{(C^+ - C)1.000}{C}$	$p = \frac{(C - C^-)1.000}{C}$
odstotni račun (%)	$d = \frac{C^+ \times p}{100 + p}$	$d = \frac{C^- \times p}{100 - p}$
promilni račun (‰)	$d = \frac{C^+ \times p}{1.000 + p}$	$d = \frac{C^- \times p}{1.000 - p}$



Maloprodajna cena za digitalni fotoaparat je 420,00 DE. Koliko bo plačal kupec, če pri nakupu uveljavlja 5 % gotovinski popust? Nalogo rešimo s pomočjo metode direktnega sklepanja in s pomočjo enačbe.

Analiza:

$p = 5 \%$

$C = 420,00 \text{ DE}$

$C^- = ?$

Rešitev s pomočjo metode **direktnega sklepanja**:

Izračunali bomo maloprodajno ceno s popustom, torej zmanjšano celoto, ki znaša 95 %.

$$\begin{array}{rcl}
 100 \% & \dots\dots\dots & 420,00 \text{ DE} \\
 1 \% & \dots\dots\dots & \frac{420,00}{100} \text{ DE} \\
 95 \% & \dots\dots\dots & \frac{420,00 \times 95}{100} \text{ DE}
 \end{array}$$

$$C^- = \frac{420,00 \times 95}{100} = 399,00 \text{ DE}$$

Rešitev s pomočjo **enačbe**:

$$C^- = C \left(\frac{100 - p}{100} \right) = 420,00 \left(\frac{100 - 5}{100} \right) = \frac{420,00 \times 95}{100} = 399,00 \text{ DE}$$

Odgovor: Maloprodajna cena s 5 % popustom znaša 399,00 DE.



Pri plačilu računa s položnico smo morali plačati še provizijo v višini 32 ‰, tako, da smo plačali vrednost računa in stroške provizije v skupni vrednosti 396,43 DE. Koliko bi morali plačati, če nam banka ne bi zaračunala provizije? Nalogo rešimo s pomočjo metode direktnega sklepanja in s pomočjo enačbe.

Analiza:

$$p = 32 \text{ ‰}$$

$$C^+ = 396,43 \text{ DE}$$

$$C = ?$$

Rešitev s pomočjo metode **direktnega sklepanja**:

Izračunali bomo vrednost računa brez provizije, torej čisto celoto, ki znaša 1.000 ‰, če vemo, da je povečana celota 1.032 ‰ ($1.000 + 32 = 1.032$).

1.032 ‰	396,43 DE
1 ‰	$\frac{396,43}{1.032} \text{ DE}$
1.000 ‰	$\frac{396,43 \times 1.000}{1.032} \text{ DE}$

$$C = \frac{396,43 \times 1.000}{1.032} = 384,14 \text{ DE}$$

Rešitev s pomočjo **enačbe**: $C = \frac{C^+ \times 1.000}{1.000 + p} = \frac{396,43 \times 1.000}{1.032} = 384,14 \text{ DE}$

Odgovor: Vrednost plačila računa s položnico brez stroškov provizije znaša 384,14 DE.



Ob otvoritvi trgovine smo kupili športno majo, ki je bila zaradi otvoritve trgovine znižana za 25 %. Pri nakupu smo uveljavljali še 5 % popust od znižane cene zaradi plačila v gotovini in plačali 34,47 DE. Kakšna je bila cena te maje pred otvoritvenim popustom in kakšen je bil skupni popust v % od cene pred otvoritvijo? Nalogo rešimo s pomočjo metode direktnega sklepanja in s pomočjo enačbe.

Analiza:

$$p_1 = 25 \%$$

$$p_2 = 5 \%$$

$$C^- = 34,47 \text{ DE}$$

$$C = ?$$

Rešitev s pomočjo metode **direktnega sklepanja**: Izračunali bomo vrednost maje pred otvoritvenim popustom, če vemo, da je zmanjšana celota 34,47 DE. Pri plačilu z gotovino smo uveljavljali $(100 - 5)$ 95 % vrednosti znižane cene.

$$\begin{array}{rcl}
 95 \% & \dots\dots\dots & 34,47 \text{ DE} \\
 1 \% & \dots\dots\dots & \frac{34,47}{95} \text{ DE} \\
 100 \% & \dots\dots\dots & \frac{34,47 \times 100}{95} \text{ DE} \\
 C = \frac{34,47 \times 100}{95} = 36,28 \text{ DE}
 \end{array}$$

Izračunali smo vrednost maje po uveljavitvi gotovinskega popusta, kar predstavlja osnovo za izračun cene maje pred otvoritvenim popustom. Izračunana cena je $(100 - 25)$ 75 % cene maje pred popustom.

$$\begin{array}{rcl}
 75 \% & \dots\dots\dots & 36,28 \text{ DE} \\
 1 \% & \dots\dots\dots & \frac{36,28}{75} \text{ DE} \\
 100 \% & \dots\dots\dots & \frac{36,28 \times 100}{75} \text{ DE} \\
 C = \frac{36,28 \times 100}{75} = 48,37 \text{ DE}
 \end{array}$$

Izračun skupnega odstotka znižanja: $1 - (0,95 \times 0,75) = 1 - 0,7125 = 0,2875 = 28,75 \%$

Napačno bi bilo, če bi trdili, da znižanje predstavlja 30 % $(25 \% + 5 \%)$, saj se navedeni odstotki nanašajo na različno osnovo, kar pomeni, da njihove vrednosti med seboj ne smemo seštevati, temveč množiti $(0,95 \times 0,75)$.

Rešitev s pomočjo **enačbe**: Cena brez gotovinskega popusta:

$$C = \frac{C^* \times 100}{100 - p} = \frac{34,47 \times 100}{100 - 5} = \frac{34,47 \times 100}{95} = 36,28 \text{ DE}$$

Cena brez otvoritvenega popusta:

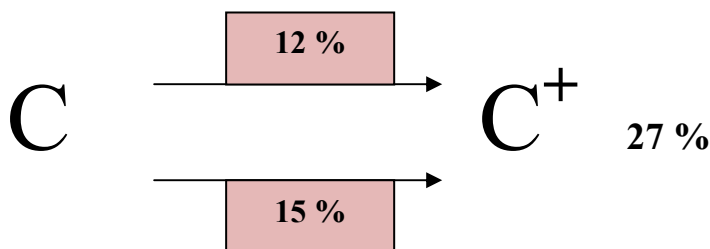
$$C = \frac{C^* \times 100}{100 - p} = \frac{36,28 \times 100}{100 - 25} = \frac{36,28 \times 100}{75} = 48,37 \text{ DE}$$

Skupni odstotek znižanja:

$$p = \frac{(C - C^*)100}{C} = \frac{(48,37 - 34,47)100}{48,37} = 28,75 \%$$

Odgovor: Maloprodajna cena brez popusta je znašala 48,37 DE, kar pomeni, da je skupni odstotek znižanja na začetno maloprodajno ceno 28,75 %.

Prvi odstotek povečanja je bil 12 %, drugi pa 15 %. Oba odstotka se nanašajo na isto osnovo. Če to prikažemo s pomočjo slike:

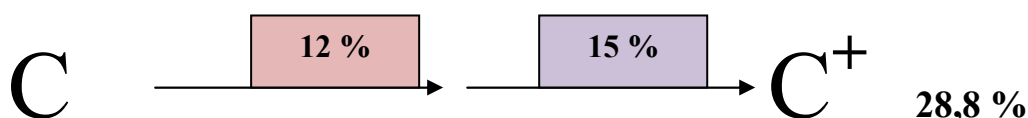


$$12\% + 15\% = 27\%$$

Slika 6: Izračun odstotkov, ki se nanašajo na isto osnovo

V navedenem primeru lahko odstotke seštevamo, ker se nanašajo na isto osnovo.

Prvi odstotek povečanja je 12 %, drugi pa 15 %. Odstotne spremembe so zaporedne. Pri računanju zaporednih sprememb si pomagamo z odstotnimi faktorji, ki jih med seboj množimo. Če to prikažemo s pomočjo slike:



$$1,12 \times 1,15 = 1,288 = 28,8\%$$

Slika 7: Izračun zaporedne spremembe odstotkov

V navedenem primeru lahko odstotke med seboj množimo, ker se nanašajo na osnovo, ki izhaja iz zaporedne podražitve.



Neko blago je stalo 5.000,00 DE in se je najprej podražilo za 10 %, nato pocenilo za 6 % in spet podražilo za 13 %. Kakšna je končna cena tega blaga? Kakšen je skupni odstotek podražitve?

Analiza:

$$p_1 = 10\% - \text{podražitev} \rightarrow 1,10$$

$$p_2 = 6\% - \text{pocenitev} \rightarrow 0,94$$

$$p_3 = 13\% - \text{podražitev} \rightarrow 1,13$$

$$C = 5.000,00 \text{ DE}$$

$$C^+ = ?$$

$$C^+ = 5.000,00 \times 1,10 \times 0,94 \times 1,13 = 5.842,10 \text{ DE}$$

$$p = (1,10 \times 0,94 \times 1,13) - 1 = 0,16842 = 16,84\%$$

Odgovor: Končna cena blaga po podražitvah in pocenitvah znaša 5.842,10 DE, kar pomeni v celoti podražitev za 16,84 %.



Za blago, ki smo ga naročili pri prodajalcu, bi morali plačati 15.500,00 DE. Prodajalec nam je zaradi velike nabavljene količine priznal 8 % količinskega popusta in 5 % popusta za zvestobo. Koliko smo dejansko plačali za naročeno blago, če se oba popusta računata od maloprodajne cene blaga?

Analiza:

$p_1 = 8\%$ – količinski popust

$p_2 = 5\%$ – popust za zvestobo

$C = 15.500,00$ DE

$C^- = ?$

Če se oba popusta računata od iste cene, se lahko seštejeta ($8\% + 5\% = 13\%$). Uporabimo izračun s pomočjo **obrazca**:

$$C^- = C - d_1 = 15.500,00 - \left(\frac{15.500,00 \times 13}{100} \right) = 13.485,00 \text{ DE}$$

Preverimo izračunano trditev postopoma:

$$d_1 = \frac{C \times p}{100} = \frac{15.500,00 \times 8}{100} = 1.240,00 \text{ DE}$$

$$d_2 = \frac{C \times p}{100} = \frac{15.500,00 \times 5}{100} = 775,00 \text{ DE}$$

Izračunajmo še novo ceno, ki predstavlja zmanjšano celoto:

$$C^- = 15.500,00 - (d_1 + d_2) = 15.500,00 - (1.240,00 + 775,00) = 13.485,00 \text{ DE}$$

Uporabimo lahko tudi metodo izračuna s pomočjo **linearne enačbe**:

$$C^- = C - d_1 - d_2$$

$$C^- = C - 0,08 \times C - 0,05 \times C$$

$$C^- = 15.500,00 - 0,08 \times 15.500,00 - 0,05 \times 15.500,00$$

$$C^- = 13.485,00 \text{ DE}$$

Hiter izračun z logičnim razmišljanjem nam daje še eno rešitev:

$$C^- = 15.500,00 \times 0,87 = 13.485,00 \text{ DE}$$

Odgovor: Dejanska cena, ki jo moramo plačati prodajalcu, znaša 13.485,00 DE.

Kot vidimo, lahko naloge odstotnega računa rešujemo na različne načine (z obrazci, z metodo direktnega sklepanja, s sorazmerji, z verižnim računom, z linearnimi enačbami). Poti do rešitev je več, vendar moramo paziti, da izberemo pravilno osnovo za izračun neznanih količin in da uporabimo vso pridobljeno znanje, spretnosti in veščine našega dosedanjega dela.



6.2 Rešite naslednje naloge.

- Cena nekega blaga se je povečala za 7,55 % in je sedaj 758,24 DE. Kakšna je bila cena pred podražitvijo in koliko DE znaša podražitev?
- Koliko je stalo blago pred znižanjem, če sedaj stane 13,58 DE, popust pa znaša 9,27 %?
- Koliko je stalo blago, ki se je najprej podražilo za 17 %, nato znižalo za 12,33 % in ponovno podražilo za 7,5 %, če je njegova cena danes 1.398,56 DE? Za kakšno odstotno spremembo glede na začetno ceno gre? Za kakšno odstotno spremembo glede na končno ceno gre v primerjavi z začetno ceno?
- Kakšna je nabavna cena blaga, ki vključuje 8 % stroške prevoza in 7 % stroške razkladanja, če je bila fakturna cena tega blaga 25,16 DE? Obe vrsti stroškov se računata od fakturne cene.

6.3 REŠEVANJE Z ENAČBAMI



Maloprodajna cena (MPC) blaga z davkom na dodano vrednost (DDV), ki znaša 20 %, je 12,50 DE. Kakšna je prodajna cena blaga (PC) brez DDV? Koliko DE znaša DDV?

Razmišljamo: $PC + DDV = MPC$. Če določene vrednosti ne poznamo jo označimo z x . V našem primeru je to PC. Vemo, da se na to ceno zaračuna 20 % DDV, zato je logično, da to vrednost označimo kot $0,20x$. Nastavimo linearno enačbo z eno neznanko:

$$x + 0,20x = 12,50$$

$$1,20x = 12,50$$

$$x = 10,42$$

$$PC + 0,20PC = MPC$$

$$1,20PC = MPC$$

$$PC = \frac{MPC}{1,20}$$

$$0,20x = 0,20 \times 10,42 = 2,08 \text{ DE}$$

$$DDV = 0,20 \times PC$$

Odgovor: Prodajna cena brez davka znaša 10,42 DE, davek na dodano vrednost pa 2,08 DE.

Najmanj časa smo se ustavili pri metodi, ko rešujemo probleme odstotnega računa s pomočjo linearnih enačb. Vsaka naloga predstavlja problem, ki ga z logičnim razmišljanjem in pravilno nastavitvijo podatkov rešimo brez problema (predpisanega modela reševanja ni). Osnovno pravilo reševanja nalog s pomočjo linearnih enačb je, da je leva stran enačbe enaka desni strani. Neznank v enačbi je lahko tudi več, vendar jih moramo pravilno označiti. Običajno neznanke označujemo z oznakami x , y , z , m .



Študentje so volili predsednika Skupnosti študentov. Razmerje v glasovanju med dvema kandidatom je bilo 5 : 3. Če od glasov prvega kandidata odštejemo 3 % in k številu glasov drugega kandidata prištejemo 4 %, ima prvi kandidat še vedno 90 glasov več od drugega. Koliko glasov je prejel prvi in koliko drugi kandidat?

Razmišljamo: Razmerje med glasovi obeh kandidatov je 5 : 3. Prvi kandidat ima $5x$ glasov, drugi pa $3x$ glasov. Če od glasov prvega kandidata odštejemo 3 % dobimo: $5x - 5x \times 0,03$. Če h glasovom drugega kandidata dodamo 4% dobimo: $3x + 3x \times 0,04$. Tvorimo linearno enačbo. Upoštevati moramo še dejstvo, da je prejel prvi kandidat 90 glasov več kot drugi, kar pomeni, da bosta imela enako število glasov, če drugemu kandidatu prištejemo 90 glasov (ali prvemu kandidatu odštejemo 90 glasov). Po navedenem razmišljanju dobimo enačbo:

$$\begin{aligned} 5x - 5x \times 0,03 &= 3x + 3x \times 0,04 + 90 \\ 5x - 0,15x &= 3x + 0,12x + 90 \\ 4,85x &= 3,12x + 90 \\ 1,73x &= 90 \\ x &= 52 \end{aligned}$$

Prvi kandidat: $5x - 5x \times 0,03 = 5 \times 52 - 5 \times 52 \times 0,03 = 252,2 = 252$ glasov

Drugi kandidat: $3x + 3x \times 0,04 = 3 \times 52 + 3 \times 52 \times 0,04 = 162,24 = 162$ glasov

Odgovor: Prvi kandidat je prejel 252 glasov, drugi pa 162 glasov.



Blago se je podražilo za 15 %. Za koliko % manj istovrstnega blaga lahko dobimo za isti denar?

Razmišljamo: Vrednost blaga je vedno produkt cene (p) in količine (q). Če se cena zviša na 15 %, potem se količina zmanjša za x %. Če navedeno trditev zapišemo v obliki linearne enačbe, dobimo:

$$\begin{aligned} q \times p &= \left(q - \frac{q \times x}{100} \right) \times \left(p + \frac{p \times 15}{100} \right) \\ q \times p &= \left(\frac{100 \times q}{100} - \frac{q \times x}{100} \right) \times \left(\frac{100 \times p}{100} + \frac{p \times 15}{100} \right) \\ p \times q &= \left(\frac{q(100 - x)}{100} \right) \times \left(\frac{p(100 + 15)}{100} \right) / \times 10.000 \\ 10.000 \times q \times p &= q(100 - x) \times p \times 115 \\ 100 - x &= \frac{10.000 \times q \times p}{q \times p \times 115} \\ 100 - x &= 86,96 \\ -x &= -13,04 \\ x &= 13,04 \% \end{aligned}$$

Odgovor: Če se je blago podražilo za 15 %, dobimo za isto vrednost za 13,04 % manj blaga.



Za ogled gledališke predstave je bilo prodanih 1.500 kart. Cena cenejše karte je bila 9,00 DE, dražje pa 15,00 DE. Celoten izkupiček prodanih kart je znašal 22.398,00 DE. Koliko dražjih kart so prodali v gledališču? Koliko % dražjih kart so prodali?

Razmišljamo:

Postavimo odnos med prodanimi kartami: $x + y = 1.500$

Izkupiček prodanih kart je: $9x + 15y = 22.398$

Dobili smo sistem linearnih enačb z dvema neznankama, ki jih lahko rešimo na različne načine (izrazimo eno neznanko z drugo ali uporabimo metodo nasprotnih koeficientov). Izbrali bomo metodo nasprotnih koeficientov:

$$\begin{array}{r} -9x - 9y = -13.500 \\ 9x + 15y = 22.398 \\ \hline 6y = 8.898 \\ y = 1.483 \end{array}$$

Prodali so 1.483 dražjih kart in: $x + y = 1.500$ $x = 1.500 - y = 1.500 - 1.483 = 17$ cenejših kart.

$$d = \frac{C \times p}{100} \quad p_1 = \frac{100 \times d}{C} = \frac{100 \times 17}{1.500} = 1,13 \%$$

Odgovor: V gledališču so prodali 17 dražjih kart, kar znaša 1,13 % vseh prodanih kart.



6.3 Rešite naslednje naloge.

- Dve števili sta v razmerju 3 : 5. Če k vsoti teh dveh števil prištejemo 20 % drugega števila, dobimo število 531. Izračunajte obe števili.
- Če od prvega števila, ki je trikrat večje od drugega števila, odštejemo 120, dobimo število, ki je za 25 % večje od vsote obeh števil. O katerih dveh številih govorimo?
- Blago se je pocenilo za 15 %. Koliko odstotkov več blaga dobimo za isto vrednost?



UTRJUJEMO, RAZMIŠLJAMO, RAZISKUJEMO, VADIMO

- Pojasnite osnovne pojme odstotnega računa. Razložite jih na primeru.
- Izmislite si nalogo odstotnega računa. Pojasnite in razložite, kako ste jo rešili. Poiščite še druge možne postopke reševanja.
- Utemeljite opredelitev pojma povečana in zmanjšana celota na primeru?
- Pojasnite bistveno razliko med reševanjem naloge odstotnega računa, če se odstotki nanašajo na isto osnovo in če so spremembe zaporedne. Za lažje delo si izmislite primer.

5. Pred vami je zahtevnejša naloga odstotnega računa. Utemeljite, zakaj bi jo reševali s pomočjo linearne enačbe.
6. Za utrjevanje znanja rešite naloge iz četrtega poglavja Zbirke vaj iz poslovne matematike (Domjan 2008, 14–16).
7. Več vaj lahko najdete tudi na internetnem naslovu:
<http://www2.arnes.si/~therna/vajeintesti/mat/odstotki/odstotki.html>.

V poglavju odstotni račun smo ponovili in osvežili znanje o zakonitostih, ki jih uporabljamo v vsakdanjem življenju. Ugotovili smo namreč, da je popolnoma vseeno, ali pri izračunu uporabljamo navzkrižno reševanje, sklepni račun, verižni račun, obrazce in njihove izpeljave ali linearno enačbo, vedno bomo prišli do istega rezultata. Vseeno pa poudarimo, da smo se naučili razlikovati in uporabljati osnovne količine odstotnega računa (celota, odstotna mera, delež) in z logičnim razmišljanjem tudi povečana ter zmanjšana celota, ki je v odvisnosti od ostalih količin. Pomembno je, da znamo rezultat, ki smo ga izračunali, tudi pravilno interpretirati. Lažje delo imamo s pomočjo obrazcev, ki nam omogočajo hiter izračun neznanih količin, kar omogoča večjo natančnost, doslednost in kontrolo oziroma poenostavlja naše delo.



7 KALKULACIJE

V poglavju bomo spoznali poleg osnovnih pojmov še vrste kalkulacij (trgovinska, proizvodna) in načine reševanja kalkulacij z ekvivalentnimi števili, kalkulacije za vezane proizvode in kalkulacije z dodatki (enotnimi, različnimi). Kalkulacija kot posebna oblika odstotnega računa nam bo omogočila sestavo enostavnih in sestavljenih kalkulacij.

7 KALKULACIJE

V poglavju kalkulacije bomo nadgradili naše znanje odstotnega računa in spoznali mehanizme ter metode računanja cen. Vas je mogoče kdaj zamikalo, da bi raziskali, kako trgovci oblikujejo svoje cene? Pa ne samo trgovci, tudi proizvajalci in pridelovalci. Kaj počnejo s cenami v času popustov in razprodaj, kako in kje upoštevajo vse stroške, ki vplivajo na oblikovanje cen, kakšen je njihov zaslužek in koliko v absolutni vrednosti predstavlja davek na dodano vrednost, ki ga prejme država? V tem poglavju imamo lepo priložnost, da razblinimo vse nejasnosti o oblikovanju cen in odgovorimo na morebitna vprašanja.

Kalkulirati pomeni računati, izračunati. Kalkulacija je torej **postopek**, ki nam omogoča vnaprejšnji izračun vrednosti nekega opravljenega dela, predračun ali obračun. Na osnovi izdelane kalkulacije ugotovimo, če je neka dejavnost, ki jo opravljamo ali želimo opravljati, smiselna, kakšno je tveganje, kakšen je lahko dobiček, kako lahko oblikujemo ceno, da bomo še vedno konkurenčni. Osnovni elementi v kalkulaciji so poleg osnovne vrednosti (**cene**), še **stroški**, ki so nastali v zvezi z opravljenim delom, in vse dajatve, ki jih predpisujejo uradni predpisi. Z izračunom ugotavljamo želeni dobiček.

Kalkulacijo lahko sestavljamo:

- za izračun prodajnih cen blaga v trgovskih gospodarskih družbah (**trgovinska kalkulacija**)
- za izračun stroškov po stroškovnih mestih ali nosilcih za izračun lastne cene v proizvodnih gospodarskih družbah (**proizvodna kalkulacija**) ali
- za izračun kazalcev učinkovitosti poslovanja, ki se nanašajo na ustvarjen dobiček posameznih proizvodov ali artiklov (rentabilnost, ekonomičnost).

Glede na število poslovnih učinkov (proizvodov, artiklov) razlikujemo **dve vrsti kalkulacij**:

- **enostavna kalkulacija** – omogoča izračun prodajne cene za en poslovni učinek (proizvod, blago) predvsem v enofazni proizvodnji ali izračun prodajne cene za eno vrsto blaga, ki ga nabavimo od enega dobavitelja
- **sestavljena kalkulacija** – omogoča izračun poslovnega učinka večfazne proizvodnje, ko prodajamo tudi polproizvode oziroma ko od istega dobavitelja nabavimo več vrst blaga in se morajo skupni stroški porazdeliti na to blago.

7.1 TRGOVINSKA KALKULACIJA

V tem poglavju bomo spoznali osnovne pojme, ki se nanašajo na sestavljanje trgovinske kalkulacije. Kalkulacijo sestavljamo za celotno nabavljeno količino blaga po določeni ceni. Zato bo kalkulacija sestavljena vrednostno kot produkt cene in količine. Če nabavljene količine ne poznamo, sestavljamo kalkulacijo za en artikel, zato se v strukturi kalkulacije pojavlja le cena.

Kalkulacije lahko sestavljamo po **progresivni** (od fakturne vrednosti do maloprodajne vrednosti) ali **retrogradni** metodi (od maloprodajne vrednosti do nabavne vrednosti). Če želimo izračunati maloprodajno vrednost, uporabljamo progresivno metodo, če pa nas zanima maksimalna nabavna cena, ki nam še prinaša dobiček, pa po retrogradni metodi.

Prikažimo osnovni model **progresivne metode** sestave kalkulacije:



$$\begin{array}{rcl}
 & \text{FAKTURNA VREDNOST (FV)} & \\
 + & \text{odvisni stroški (STR)} & \\
 \hline
 = & \text{NABAVNA VREDNOST (NV)} & \\
 + & \text{marža (M)} & \\
 \hline
 = & \text{PRODAJNA VREDNOST (PV)} & \\
 + & \text{davek na dodano vrednost (DDV)} & \\
 \hline
 = & \text{MALOPRODAJNA VREDNOST (MPV)} &
 \end{array}$$

Fakturna cena (FC) je cena, ki jo določi dobavitelj in je osnovna cena za izračun. Ker običajno nabavljamo večje količine blaga, fakturno ceno pomnožimo z nabavljeno količino in dobimo **fakturno vrednost**:

$$FV = FC \times \text{količina}$$

Odvisni stroški (STR) so stroški transporta, skladiščenja, embaliranja, zavarovanja in drugi stroški, ki so povezani z nabavo. Te stroške prištevamo k fakturni vrednosti in dobimo **nabavno vrednost**.

$$NV = FV + STR$$

Prodajno vrednost (PV) dobimo tako, da k nabavni vrednosti prištejemo maržo, ki predstavlja zaslužek trgovine, vendar trgovec z njo krije tudi stroške režije (najemnine, stroški vzdrževanja, plače delavcev). Zato lahko te stroške tudi razdelimo, kar bomo prikazali v nadaljevanju.

$$PV = NV + M$$

Maloprodajna vrednost (MPV) je prodajna vrednost z davkom na dodano vrednost, ki jo lahko imenujemo tudi končna prodajna vrednost, saj vključuje dajatve, ki so določene z uradnimi predpisi. Trenutne stopnje **davka na dodano vrednost (DDV)** so 8,5 % in 20 %. Pri sestavi naših kalkulacij bomo upoštevali le izstopni davek na dodano vrednost, saj bomo sestavljali le kalkulacije za končno prodajo. Temu primerno bomo prilagodili izračun cen v kalkulacijah.

Dolgoletno sodelovanje dobavitelji nagradijo tako, da nam priznajo **popuste** (P – količinske ali blagovne **rabate** (R)), ki zmanjšujejo fakturno vrednost blaga. Zaradi predhodnega plačila nam lahko priznajo tudi **skonto** (S), ki se računa od zmanjšane fakturne vrednosti, če nam je dobavitelj predhodno priznal tudi popust ali od čiste fakturne vrednosti, če tega popusta ni.

Pojasnimo še razliko med **nabavljeno** in **prodajno količino blaga**. Trgovec nabavlja količino, ki je podana z maso in je lahko **bruto** (BK – teža blaga z embalažo) ali **neto** (NK – čista teža blaga) količina. Embalaža (T – **tara**) je običajno podana v odstotku (osnova za izračun je bruto količina) in jo dobavitelju vračamo, zato jo od bruto količine odštevamo.

$$NK = BK - T$$

Med poslovanjem prihaja pogosto do izgube blaga iz objektivnih razlogov (razsip, lom, kvar, osušitev, izguba blaga pri merjenju, tehtanju, razrezu), kar imenujemo **kalo (K)**. Prodajalec

nam kalo prizna v odstotkih od nabavne količine. Če so trgovci dobri gospodarji, je lahko razlika do neizkoriščenega manjšega kala zaslužek trgovine. Včasih pa moramo blago vlažiti (solata, sadje), zato **vlago (V)** v nabavno količino prištevamo in jo računamo od nabavne količine.

Prodajna količina (PK) je zato nabavna količina zmanjšana za kalo in povečana za vlago.

$$PK = NK - K + V$$

Velikokrat pa trgovci nabavljeno količino **embalirajo** v manjše ali večje zavitke, zato je potrebno pri prodaji upoštevati tudi velikost zavitka in prodajno količino preračunati na število zavitkov.

$$PK = \frac{NK - K + V}{\text{velikost zavitka}}$$

Kot smo že prej omenili, običajno trgovci ločijo splošne stroške in svoj zaslužek (maržo). V tem primeru je splošna shema za izračun maloprodajne vrednosti drugačna od prej prikazane. **Splošne stroške (SS** – stroške najemnim, stroške vzdrževanja) računamo od nabavne vrednosti blaga, ki omogoča izračun **lastne vrednosti blaga**. Na to vrednost pa dodamo **maržo**, ki je čisti dobiček (zaslužek) trgovca.

$$\begin{aligned} & \text{FAKTURNA VREDNOST (FV)} \\ - & \text{popust dobavitelja (R)} \\ = & \text{FAKTURNA VREDNOST* (FV*)} \\ - & \text{skonto (S)} \\ + & \text{odvisni stroški (STR)} \\ = & \text{NABAVNA VREDNOST (NV)} \\ + & \text{splošni stroški (SS)} \\ = & \text{LASTNA VREDNOST (LV)} \\ + & \text{marža (M)} \\ = & \text{PRODAJNA VREDNOST (PV)} \\ + & \text{davek na dodano vrednost (DDV)} \\ = & \text{MALOPRODAJNA VREDNOST (MPV)} \end{aligned}$$



Zanima nas, kako izračunamo **končno maloprodajno ceno (MPC)**. Maloprodajno vrednost iz kalkulacije delimo z izračunano prodajno količino.

$$MPC = MPV : PK$$

Ostane nam še prikaz strukture kalkulacije po **retrogradni** metodi. Opozorimo naj na dejstvo, da se davek na dodano vrednost in vsi stroški, podani v relativni obliki (odstotki), računajo iz enačbe za povečano celoto, razen rabata (računa se iz MPV) oziroma popusta (računa se iz MPV*). Zato se spomnimo na splošno enačbo izračuna deleža, če poznamo podatke za povečano celoto:

$$d = \frac{C^+ \times p}{100 + p}$$

Prikažimo osnovni model retrogradne metode sestave kalkulacije:



	MALOPRODAJNA VREDNOST (MPV)
–	<u>rabat dobavitelja (R)</u>
=	MALOPRODAJNA VREDNOST* (MPV*)
–	<u>skonto (S)</u>
=	PRODAJNA VREDNOST (PV)
–	<u>marža (M)</u>
=	LASTNA VREDNOST (LV)
–	<u>splošni stroški (SS)</u>
=	NABAVNA VREDNOST (NV)

Če je v izračun vključen še davek na dodano vrednost, ga vključimo v sestavo kalkulacije (DDV obračunamo pred obračunom marže). Običajno tak postopek uporabljamo, ko nam država predpiše maksimalno maloprodajno ceno (odkup pšenice ali drugih kmetijskih proizvodov). Ker smo spoznali vse elemente kalkulacije in njene posebnosti, se lahko lotimo izdelave kalkulacij na konkretnih primerih.

7.1.1 Enostavna delitvena kalkulacija

Enostavna delitvena kalkulacija se sestavlja v primeru, ko nabavljamo od dobavitelja le eno vrsto blaga ali ko proizvajalec z enofazno proizvodnjo proizvaja večjo količino enega proizvoda. Delitev se opravi kot delitev z dodatki.



Nabavili smo 1.000 kg blaga po ceni 50,00 DE. Nabavni stroški znašajo 3 %, marža je 25 %. Kakšna bo maloprodajna cena blaga za 1 kg, če je DDV 20 %?

Analiza naloge:

Kalkulacija MPV v DE:

NK = 1.000 kg	fakturna vrednost.....	50.000,00
FC = 50,00 DE	+ odvisni stroški (3 %).....	1.500,00
STR = 3 %	= Nabavna vrednost.....	51.500,00
M = 25 %	+ marža (25 %).....	12.875,00
<u>DDV = 20 %</u>	= Prodajna vrednost.....	64.375,00
MPC = ?	+ DDV (20 %).....	12.875,00
	= Maloprodajna vrednost.....	77.250,00

Izračuna **maloprodajne cene** za 1 kg: $MPC = \frac{MPV}{PK} = \frac{77.250,00}{1.000} = 77,25 \text{ DE/kg}$

Odgovor: Ob navedenih pogojih znaša maloprodajna cena za 1 kg blaga 77,25 DE.



Nabavili smo 1.000 kg blaga po ceni 50,00 DE. Dobavitelj nam je priznal 10% rabata na količino, 2 % skonta zaradi predhodnega plačila in 4 % kala. Nabavni stroški znašajo 375,00 DE, marža je 25 %. Kakšna bo maloprodajna cena blaga za 1 kg, če je DDV 20 %?

Analiza naloge:

NK = 1.000 kg

FC = 50,00 DE

STR = 375,00 DE

M = 25 %

DDV = 20 %

R = 10 %

S = 2 %

K = 4 %

MPC = ?

Kalkulacija MPV v DE:

fakturna vrednost.....	50.000,00
– rabat (10 %).....	5.000,00
= fakturna vrednost*.....	45.000,00
– skonto (2 %).....	900,00
+ nabavni stroški.....	375,00
= nabavna vrednost.....	44.475,00
+ marža (25 %).....	11.118,75
= prodajna vrednost.....	55.593,75
+ DDV (20 %).....	11.118,75
= maloprodajna vrednost.....	66.712,50

Izračuna prodajne količine: PK = NK – K

NK.....	1.000 kg
– kalo (4 %).....	40 kg
PK.....	960 kg

Izračuna **maloprodajne cene** za 1 kg: $MPC = \frac{MPV}{PK} = \frac{66.712,50}{960} = 69,49 \text{ DE/kg}$

Odgovor: Ob navedenih pogojih znaša maloprodajna cena za 1 kg blaga 69,49 DE.



Smo posredniki blaga, katerega maloprodajna cena znaša 750,00 DE. Kupcu v maloprodaji želimo priznati 10% rabata na količino, 2 % skonta zaradi predhodnega plačila. Kakšna je lahko najvišja nabavna cena tega blaga pri dobavitelju, če znašajo splošni stroški 15 % in želimo doseči 12 % dobička?

Analiza naloge:

MPC = 750,00 DE

R = 10 %

S = 2 %

SS= 15 %

M = 12 %

NC = ?

Kalkulacija NC v DE:

maloprodajna cena.....	750,00
– rabat (10 %).....	75,00
= maloprodajna cena*.....	675,00
– skonto (2 %).....	13,50
= prodajna cena.....	661,50
– dobiček (12 %).....	70,88
= lastna cena.....	590,62
– splošni stroški(15 %).....	77,04
= nabavna cena.....	513,58

$$\text{Dobiček} = \frac{661,50 \times 12}{112} = 70,88$$

Odgovor: Najvišja nabavna cena pri dobavitelju lahko znaša 513,58 DE.



Nabavili smo 1.000 kg blaga po ceni 80,00 DE, odvisni stroški so 3 %, dobavitelj pa nam prizna 2 % skonta zaradi predčasnega plačila. Kakšna naj bo maloprodajna cena za 5 kg vrečko blaga, če želimo ob upoštevanju pokritja 18 % splošnih stroškov, realizirati še 15 % dobička. Cena vrečke sladkorja je 1,50 DE, kalo pri pakiranju je 3 %, DDV pa 20 %? Kakšen dobiček (tudi v odstotku) bi dosegli, če nam vlada predpiše maksimalno prodajno ceno 600,00 DE za 5 kg vrečko in če ostali elementi kalkulacije ostanejo nespremenjeni?

Analiza naloge:

NK = 1.000 kg

FC = 80,00 DE

STR = 3 %

S = 2 %

SS = 18 %

M = 15 %

Cena vrečke = 1,50 DE

K = 3 %

DDV = 20 %

MPC = ?

Dobiček = ?

MPC = 600,00 DE/5 kg

Kalkulacija MPV v DE:

Fakturna vrednost.....	80.000,00
– skonto (2 %).....	1.600,00
+ nabavni stroški (3 %).....	2.400,00
= nabavna vrednost.....	80.800,00
+ splošni stroški (18 %).....	14.544,00
= lastna vrednost.....	95.344,00
+ marža (15 %).....	14.301,60
= prodajna vrednost blaga.....	109.645,60
+ stroški vrečk (200 × 1,50).....	300,00
= prodajna vrednost blaga+vrečk.....	109.945,60
+ DDV (20 %).....	21.989,12
= maloprodajna vrednost blaga+vrečk..	131.934,72

Izračun **prodajne količine**: vračunana PK za kalkucijo = 1.000/5 = 200 vrečk

dejanska PK = NK – K / velikostjo zavitka

NK.....	1.000 kg	
– kalo (3 %).....	30 kg	
PK.....	970 kg	dejanska PK = 970/5 = 194 vrečke

Izračuna **maloprodajne cene** za 1 kg: $MPC = \frac{MPV}{PK} = \frac{131.934,72}{194} = 680,08 \text{ DE/kg}$ Izračun marže s pomočjo **kalkulacije**, če ceno določi **vlada**:

maloprodajna vrednost (600 × 194).....	116.400,00
– skonto (2 %).....	2.328,00
= maloprodajna vednost*.....	114.072,00
– DDV (20 %).....	19.012,00
= prodajna vrednost blaga in vrečk.....	95.060,00
– stroški vrečk (200 × 1,50).....	300,00
= prodajna vrednost blaga.....	94.760,00
– nabavna vrednost blaga.....	80.800,00
= marža.....	13.960,00

Prikažimo izračuna DDV, če je kalkucija sestavljena retrogradno:

$$d = \frac{114.072,00 \times 20}{120} = 19.012,00 \text{ DE}$$

Vsi ostali deleži se računajo po istem principu od povečane celote.

Izračun odstotka marže: $d = \frac{d \times 100}{C} = \frac{13.960,00 \times 100}{80.800,00} = 17,28 \%$

Odgovor: Maloprodajna vrednost za 5 kg vrečko znaša 680,80 DE. Če nam vlada predpiše maksimalno prodajno ceno 600,00 DE/5kg vrečko, bomo ustvarili 13.960,00 DE marže, kar znaša 17,28 %.



7.1 Rešite naslednje naloge.

- a) Nabavili smo 500 kg blaga po ceni 2,50 DE. Nabavni stroški znašajo 8 %, marža je 12,5 %. Kakšna bo maloprodajna cena blaga za 1 kg, če je DDV 8,5 %?
- b) Nabavili smo eno tono blaga po ceni 35,00 DE. Dobavitelj nam je priznal 1 % rabata na količino, 3 % skonta zaradi predhodnega plačila in 5 % kala. Nabavni stroški znašajo 12 %, marža je 17,5 %. Kakšna bo maloprodajna cena blaga za 1 kg, če je DDV 20 %?
- c) Smo posredniki blaga, katerega maloprodajna cena znaša 85,50 DE. Kupcu v maloprodaji želimo priznati 1 % rabata na količino, 3 % skonta zaradi predhodnega plačila. Kakšna je lahko najvišja nabavna cena tega blaga pri dobavitelju, če znašajo splošni stroški 7 % in želimo doseči 15 % dobička?
- d) Nabavili smo 750 kg blaga po ceni 25,75 DE, odvisni stroški so 6 %, dobavitelj pa nam prizna 3 % skonta zaradi predčasnega plačila. Kakšna naj bo maloprodajna cena za 2 kg vrečko blaga, če želimo ob upoštevanju pokritja 16 % splošnih stroškov, realizirati še 20 % dobička. Cena vrečke sladkorja je 0,25 DE, kalo pri pakiranju je 1,6 %, DDV pa 20 %? Kakšen dobiček v odstotku bi dosegli, če nam vlada predpiše maksimalno prodajno ceno 80,00 DE za 2 kg vrečko in 8,5 % DDV, če ostali elementi kalkulacije ostanejo nespremenjeni?

7.1.2 Sestavljena delitvena trgovinska kalkulacija

Sestavljeno kalkulacijo v **trgovskih gospodarskih družbah** sestavljamo takrat, ko od istega dobavitelja nabavljamo več vrst blaga in so nekateri stroški obračunani skupaj. Te stroške razdelimo premosorazmerno glede na količino nabavljenega blaga.



Nabavili smo 1 tono blaga A po ceni 50,00 DE za kg in 900 kg blaga B po ceni 70,00 DE za kg. Nabavni stroški znašajo skupaj 1.500,00 DE, marža za blago A je 25 %, za blago B pa 20 %. Davek na dodano vrednost za blago A je 20 %, za blago B pa 8,5 %. Kalo za blago A znaša 3 %. Kakšni bosta maloprodajni ceni blaga A in B?

Analiza naloge:

$NK_{A,B} = 1.000 \text{ kg}, 900 \text{ kg}$

$FC_{A,B} = 50,00 \text{ DE}, 70,00 \text{ DE}$

$STR = 1.500,00 \text{ DE}$

$M_{A,B} = 25 \%, 20 \%$

$DDV_{A,B} = 20 \%, 8,5 \%$

$K_A = 3 \%$

$MPC = ?$

Količina za blago:

	A	B
NK	1.000 kg	900 kg
– $K (3 \%)$	30 kg	–
= PK	970 kg	900 kg

Nabavni stroški za blago:

A	1.000 kg	$10x = 789,47 \text{ DE}$
B	900 kg	$\frac{9x}{1} = 710,53 \text{ DE}$
		$19x = 1.500,00 \text{ DE}$
		$x = 78,95 \text{ DE}$

Kalkulacija MPV v DE za blago	A	B
Fakturna vrednost.....	50.000,00	63.000,00
+ odvisni stroški	789,47	710,53
= Nabavna vrednost.....	50.789,47	63.710,53
+ marža (25 %, 20 %).....	12.697,37	12.742,11
= Prodajna vrednost.....	63.486,84	76.452,64
+ DDV (20 %, 8,5 %).....	12.697,37	6.498,47
= Maloprodajna vrednost.....	76.184,21	82.951,11

Izračuna maloprodajne cene za 1 kg blaga A in blaga B:

$$MPC_A = \frac{MPV}{PK} = \frac{76.184,21}{970} = 78,54 \text{ DE/kg} \quad MPC_B = \frac{MPV}{PK} = \frac{82.951,11}{900} = 92,17 \text{ DE/kg}$$

Odgovor: Maloprodajna cena blaga A znaša 78,54 DE/kg in 92,17 DE/kg za blago B.

7.2 PROIZVODNA KALKULACIJA

V gospodarski družbi moramo vzpostaviti tak stroškovni sistem, ki nam bom omogočil spremljanje in izračunavanje stroškov. Stroške moramo razporediti na ustrezne stroškovne nosilce, torej tiste, ki so stroške povzročili. Z izdelavo kalkulacij bomo lažje načrtovali stroške, prodajne cene in poslovni izid. Na osnovi izdelanih kalkulacij bo vodstvo lažje sprejemalo ekonomske odločitve v gospodarski družbi, ki temeljijo na povprečnih stroških (Kodrin, Fundak, 2005).

Kalkulacija v **proizvodnih gospodarskih družbah** je lahko:

- enostavna **delitvena kalkulacija** – izdelamo jo, če proizvajamo le en proizvod ali opravljamo le eno storitev
- kalkulacija z **ekvivalentnimi števili** – stroške porazdelimo na proizvode, ki so si zelo podobni ali so proizvedeni po enotnem proizvodnem postopku
- kalkulacija za **vezane proizvode** – uporabljamo jo, če pri proizvodnji glavnega proizvoda nastajajo še drugi učinki, ki jih je moč prodati
- kalkulacija z **dodatki** – uporabljamo jo, če proizvajamo večje število proizvodov, pri katerih so stroški deljeni na posredne in neposredne.

7.2.1 Enostavna delitvena kalkulacija

Enostavno delitveno kalkulacijo uporabljamo takrat, kadar proizvajamo samo en proizvod ali opravljamo le eno storitev. V tem primeru vse stroške preračunamo na en stroškovni nosilec, ne glede na to, kje so nastali. Povprečne stroške stroškovnega nosilca dobimo tako, da celotne stroške delimo s količino proizvodov.

$$\text{povprečni stroški} = \frac{\text{celotni stroški}}{\text{količina proizvodnje}}$$



V gospodarski družbi smo proizvedli 2.550 proizvodov. Pri proizvodnji smo imeli 10.250,00 DE stroškov, od tega 45 % materialnih stroškov, 30 % stroškov plač, 11 % stroškov nabave, ostalo so bili drugi stroški. Izračunajte povprečne stroške proizvoda.

Vrsta stroška	% celotnih stroškov	Stroški v DE	Količina	Povprečni stroški v DE
materialni stroški	45	4.612,50	2.550	1,81
plače	30	3.075,00		1,21
stroški nabave	11	1.127,50		0,44
drugi stroški	14	1.435,00		0,56
CELOTNI STROŠKI	100	10.250,00		4,02

Odgovor: Povprečni stroški proizvoda znašajo 4,02 DE.

7.2.2 Kalkulacija z ekvivalentnimi števili

Kalkulacijo uporabljamo pri **proizvodnji** sorodnih proizvodov, ki se med seboj razlikujejo po **količini vložkov**, kateri odločilno vplivajo na velikost posameznih stroškov. Izdelki, ki jih proizvedemo se razlikujejo po obliki, velikosti ali namembnosti. Stroški na enoto posameznega učinka so premosorazmerni s količino, zato izračunamo, koliko **pogojnimi enotam** ustreza ena dejanska enota proizvoda, nato pa razdelimo stroške. **Ekvivalentno število 1** dodelimo vedno ali najpomembnejši ali najpogostejši ali največji proizvodnji. Ostala ekvivalentna števila postavimo v **sorazmerje**, izračunamo pogojne enote in razdelimo stroške.



V proizvodnji, ki se ukvarja s proizvodnjo kock za otroke so proizvedli 150.000 kosov kock A volumna 21 cm³, 200.000 kosov kock B volumna 15 cm³ in 180.000 kosov kock C volumna 18 cm³. Celotni stroški proizvodnje so znašali 125.200,00 DE. Izračunajte povprečne stroške posamezne vrste kock po metodi ekvivalentnih števil glede na najmanjši volumen kocke.

Nalogo rešujemo po naslednjih korakih:

- Izračun ekvivalentnih števil nam omogoča nastavitve sorazmerja. Ekvivalentno število 1,00 predstavlja kocka z volumnom 15 cm³.

$$15 : 1 = 21 : x \quad x = 21/15 = 1,4$$

$$15 : 1 = 18 : x \quad x = 18/15 = 1,2$$
- Izračun pogojnih enot dobimo tako, da dejanske količine proizvodov pomnožimo z ekvivalentnimi števili.

$$\text{kocka A: } 150.000 \times 1,40 = 210.000$$
- Povprečne stroške pogojne enote dobimo tako, da celotne stroške delimo s številom pogojnih enot.

$$125.200 : 626.000 = 0,20 \text{ DE}$$
- Celotne stroške za posamezni proizvod dobimo tako, da povprečne stroške pogojne enote pomnožimo s pogojnimi enotami posameznega proizvoda.

$$\text{kocka A: } 0,20 \times 210.000 = 42.000,00 \text{ DE}$$

- Povprečne stroške za posamezni proizvod dobimo tako, da celotne stroške posameznega proizvoda delimo z dejanskimi količinami.

$$\text{kocka A: } 42.000,00 : 150.000 = 0,28 \text{ DE}$$

Proizvod	Količina	Ekvivalentna števila	Pogojne enote	Celotni stroški v DE	Povprečni stroški v DE
A – 21 cm ³	150.000	1,40	210.000	42.000,00	0,28
B – 15 cm ³	200.000	1,00	200.000	40.000,00	0,20
C – 18 cm ³	180.000	1,20	216.000	43.200,00	0,21
	530.000	–	626.000	125.200,00	–

Odgovor: Povprečni stroški kocke A z volumnom 21 cm³ znašajo 0,28 DE, za kocko B z volumnom 15 cm³ 0,20 DE in kocko C z volumnom 18 cm³ 0,21 DE.

7.2.3 Kalkulacija za vezane proizvode

Kalkulacijo uporabljamo takrat, ko pri proizvodnji enega ali več **glavnih proizvodov** (učinkov) nastajajo tudi **stranski proizvodi** (učinki), ki jih lahko prodamo in tako **zmanjšujejo celotne stroške** proizvodnje glavnega proizvoda. Najpogostejša proizvodna enota ima ekvivalentno število 1.



Pri žaganju hlodov v deske smo našagali deske A s kvadratur 1,3 dm² v obsegu 1.500 kosov in deske B s kvadratur 3,2 dm² v obsegu 1.200 kosov. Pri žaganju je nastal dodatni proizvod žagovina, ki jo lahko prodamo za 7.397,50 DE. Izračunajte, povprečne stroške obeh vrst desk, če znašajo skupni stroški žaganja 35.000,00 DE po metodi ekvivalentnih števil za vezane proizvode.

Nalogo rešujemo po enakem postopku, kot smo ga opisali v poglavju 7.2.2, vendar moramo upoštevati, da skupne stroške glavnega proizvoda zmanjšujejo stroški stranskega proizvoda.

$$35.000,00 - 7.397,50 = 27.602,40 \text{ DE}$$

Proizvod	Proizvodne enote	Ekvivalentna števila	Pogojne enote	Celotni stroški v DE	Povprečni stroški v DE
1,3 dm ²	1.500	1,00	1.500	9.300,00	6,20
3,2 dm ²	1.200	2,46	2.952	18.302,40	15,25
	2.700	–	4.452	27.602,40	–

Odgovor: Povprečni strošek za deske s kvadratur 1,3 dm² je 6,20 DE, za deske s kvadratur 3,2 pa 15,25 DE

7.2.4 Kalkulacija z dodatki

Pri tej vrsti kalkulacije dodajamo **neposrednim stroškom** postopoma po določenem **ključu odstotek posrednih stroškov**, ki so prenosorazmerni vrednosti izbranega ključa. Glede na kriterij delitve posrednih stroškov na stroškovne nosilce, ločimo **kalkulacijo z enotnim dodatkom** in **kalkulacijo z različnim dodatkom**.

7.2.4.1 Kalkulacija z enotnim dodatkom

Pri kalkulaciji z enotnim dodatkom uporabljamo za razporeditev vseh posrednih stroškov enoten kriterij delitve.



Pri proizvodnji smo imeli neposredne stroške v višini $\frac{1}{4}$ celotnih stroškov in sicer za proizvod A, B, C v razmerju 1 : 2 : 7. Posredni stroški znašajo $\frac{3}{4}$ celotnih stroškov, in smo jih delili glede na delavne ure, ki so potrebne za proizvodnjo blaga (A: 78 ur za 2.500 kosov, B: 73 ur za 2.250 kosov in C: 69 ur za 2.200 kosov). Celotni stroški so znašali 110.000,00 DE. Izračunajte povprečne stroške posameznega proizvoda.

Analiza naloge:

Proizvod	A	B	C	Skupaj
Količina	2.500	2.250	2.200	
Neposredni stroški				$\frac{1}{4}$
Posredni stroški				$\frac{3}{4}$
Delovne ure	78	73	69	

Nalogo rešujemo po naslednjih korakih:

- Izračun strukture stroškov:

$$\text{Neposredni stroški: } \frac{1}{4} \times 110.000,00 = 27.500,00 \text{ DE}$$

$$\text{Posredni stroški: } \frac{3}{4} \times 110.000,00 = 82.500,00 \text{ DE}$$

- Neposredne stroške razdelimo v razmerju 1 : 2 : 7.

$$x + 2x + 7x = 27.500,00 \quad x = 2.750,00 \quad \text{Opravimo razdelitev.}$$

- Izračunamo koeficient dodatka za posredne stroške tako, da celotne posredne stroške delimo s številom delovnih ur.

$$\text{Koeficient dodatka (K}_d\text{)} = \frac{\text{celotni posredni stroški}}{\text{delovne ure}} = \frac{82.500,00}{220} = 375,00 \text{ DE}$$

- Izračunani koeficient dodatka nam omogoča razdelitev posrednih stroškov na proizvode. Pomnožimo koeficient dodatka s številom delovnih ur za vse proizvode.

$$\text{Proizvod A: } 78 \times 375,00 = 29.250,00 \text{ DE}$$

- Celotne stroške za posamezni proizvod dobimo tako, da k neposrednim stroškom prištejemo posredne stroške za posamezni proizvod.

$$\text{Proizvod A: } 2.750,00 + 29.250,00 = 32.000,00 \text{ DE}$$

- Povprečne stroške za posamezni proizvod dobimo tako, da celotne stroške posameznega proizvoda delimo z dejanskimi količinami posameznega proizvoda.

$$\text{Proizvod A: } 32.000,00 : 2.500 = 12,80 \text{ DE}$$

Rešitev naloge:

Proizvod	A	B	C	Skupaj
Količina	2.500	2.250	2.200	
Neposredni stroški (1)	2.750,00	5.500,00	19.250,00	27.500

Delež posrednih stroškov (2)	29.250,00	27.375,00	25.875,00	82.500
Celotni stroški (1 + 2)	32.000,00	32.875,00	45.125,00	110.000,00
Povprečni stroški	12,80	14,61	20,51	

Odgovor: Povprečni stroški za proizvod A so 12,80 DE, za proizvod B 14,61 DE in za proizvod C 20,51 DE.

7.2.4.2 Kalkulacija z različnim dodatkom

Obravnavana kalkulacija se razlikuje od kalkulacije z enotnim dodatkom po tem, da za delitev posrednih stroškov uporabljamo različne ključne delitve, lahko tudi neposredne stroške. Koeficiente dodatka izračunamo glede na zahtevano delitev stroškov, vsakega z ustrezno osnovo.



Pri proizvodnji otroških majčk v treh velikostih (A: 110, B: 116, C: 124), smo imeli skupne stroške v višini 116.000,00 DE. Neposredni stroški za 2.500 kosov majčk A so bili 21.000,00 DE, za 2.250 kosov majčk B so bili 24.000,00 DE in za 2.000 kosov majčk C 30.000,00 DE. Posredne stroške v višini 41.000,00 DE sestavlja 50 % stroškov nabave, 30 % stroškov proizvodnje in 20 % ostalih posrednih stroškov. Za proizvodnjo majčk A potrebujemo 100 delavnih ur z neposrednimi materialnimi stroški 910,00 DE, za majčke B 80 delovnih ur z neposrednimi materialnimi stroški v višini 520,00 DE in za majčke C 50 delovnih ur z neposrednimi materialnimi stroški 830,00 DE. Za izračun vseh posrednih stroškov razen stroškov proizvodnje uporabite delovne ure, za izračun posrednih stroškov proizvodnje pa neposredne materialne stroške. Izračunajte povprečne stroške posameznega proizvoda.

Analiza naloge:

Proizvod	A	B	C	Skupaj
Količina	2.500	2.250	2.000	
Neposredni stroški	21.000,00	24.000,00	30.000,00	75.000,00
Neposr. mat. str.	910,00	520,00	830,00	2.260,00
Posredni stroški	50 %	30 %	20 %	41.000,00
Delovne ure	100	80	50	

Nalogo rešujemo po naslednjih korakih:

- Izračunamo posredne stroške po proizvodih:
 - za proizvod A: $0,50 \times 41.000,00 = 20.500,00$ DE
 - za proizvod B: $0,30 \times 41.000,00 = 12.300,00$ DE
 - za proizvod C: $0,20 \times 41.000,00 = 8.200,00$ DE
- Izračunamo koeficient dodatka za posredne stroške nabave (K_{d1}) in koeficient dodatka za ostale stroške (K_{d3}) s pomočjo delovnih ur, koeficient dodatka za posredne stroške proizvodnje (K_{d2}) pa s pomočjo neposrednih materialnih stroškov.

$$\text{Koeficient dodatka } (K_{d1}) = \frac{\text{posredni stroški nabave}}{\text{delovne ure}} = \frac{20.500,00}{230} = 89,13043478 \text{ DE}$$

$$\text{Koeficient dodatka } (K_{d2}) = \frac{\text{posredni stroški proizvodnje}}{\text{neposredni mat. stroški}} = \frac{12.300,00}{2.260} = 5,442477876 \text{ DE}$$

$$\text{Koeficient dodatka (K}_{d3}\text{)} = \frac{\text{ostali posredni stroški}}{\text{delovne ure}} = \frac{8.200,00}{230} = 35,65217391 \text{ DE}$$

- Izračunani koeficienti dodatka nam omogočajo razdelitev posrednih stroškov na proizvode. Pomnožimo koeficiente dodatka z ustrezno osnovo (s številom delovnih ur ali z neposrednimi nabavnimi stroški za vse proizvode). Prikazali bomo le izračun vseh posrednih stroškov za proizvod A.

$$\text{Proizvod A: } 89,13043478 \times 100 = 8.913,05 \text{ DE}$$

$$\text{Proizvod A: } 5,442477876 \times 910 = 4.952,65 \text{ DE}$$

$$\text{Proizvod A: } 35,65217391 \times 100 = 3.565,22 \text{ DE}$$

- Celotne stroške za posamezni proizvod dobimo tako, da k neposrednim stroškom prištejemo posredne stroške za posamezni proizvod.

$$\text{proizvod A: } 21.000,00 + 17.430,92 = 38.430,92 \text{ DE}$$

- Povprečne stroške za posamezni proizvod izračunamo tako, da celotne stroške posameznega proizvoda delimo z dejanskimi količinami.

$$\text{proizvod A: } 38.430,92 : 2.500 = 15,37 \text{ DE}$$

Rešitev naloge:

Proizvod	A	B	C	Skupaj
Količina	2.500	2.250	2.000	
Neposredni stroški	21.000,00	24.000,00	30.000,00	75.000,00
Posredni stroški nabave (1)	8.913,05	7.130,43	4.456,52	20.500,00
Posredni stroški proizvodnje (2)	4.952,65	2.830,09	4.517,26	12.300,00
Ostali posredni stroški (3)	3.565,22	2.852,17	1.756,39	8.200,00
Skupaj posredni stroški (1+2+3)	17.430,92	12.812,69	10.756,39	41.000,00
CELOTNI STROŠKI	38.430,92	36.812,69	40.756,39	116.000,00
Povprečni stroški	15,37	16,36	20,38	

Odgovor: Povprečni stroški majčk velikosti 110 so 15,37 DE, majčk velikosti 116 so 16,36 DE in majčk velikosti 124 so 20,38 DE.



7.2 Rešite naslednje naloge.

- a) Nabavili smo 5 ton blaga A po ceni 15,00 DE za kg in 2.800 kg blaga B po ceni 35,00 DE za kg. Nabavni stroški znašajo skupaj 850,00 DE, marža za blago A je 32,5 %, za blago B pa 20 %. Davek na dodano vrednost za blago A je 8,5 %, za blago B pa 20 %. Kalo za blago B znaša 2 %. Kakšni bosta maloprodajni ceni blaga A in B?
- b) V proizvodnji, ki se ukvarja s proizvodnjo ženskih oblek so proizvedli 2.000 kosov oblek velikosti 38, 5.000 kosov oblek velikosti 40 in 1.900 kosov oblek velikosti 42. Celotni stroški proizvodnje so znašali 25.500,00 DE. Izračunajte povprečne stroške posameznih ženskih oblek po metodi ekvivalentnih števil, glede na velikost obleke.

- c) Pri proizvodnji moških majic v treh velikostih (M, L, XL), smo imeli skupne splošne stroške v višini 12.425,00 DE. Neposredni stroški dela za majico velikosti M so bili 2.000,00 DE, za velikost L 2.400,00 DE in za velikost XL 3.055,00 DE. Izdelali smo 2.500 kosov majic velikosti M, 2.250 kosov majic velikosti L in 2.200 kosov majic velikosti XL. Celotni posredni stroški proizvodnje znašajo 40 % vrednosti skupnih stroškov. Kolikšni so povprečni stroški moških majic, če uporabljamo kot ključ delitve neposredne stroške dela?



UTRJUJEMO, RAZMIŠLJAMO, RAZISKUJEMO, VADIMO

1. Pojasnite osnovne pojme za sestavo enostavne kalkulacije. Pojme tudi razložite in povejte, kako se izračunajo.
2. Kakšne vrste kalkulacij poznate? Glede na vaše ugotovitve poiščite na internetnih straneh različne vrste kalkulacij in ugotovite, za kakšno vrsto kalkulacije gre.
3. Razmišljajte o smiselnosti uporabe kalkulacij v proizvodnih gospodarskih družbah. Poiščite in nadgradite svoje znanje o kalkulacijah pri drugih predmetih in s knjigo V. Potočnika: Kalkulacija in DDV.
4. V čem vidite smisel sestave kalkulacije po progresivni in v čem po retrogradni metodi?
5. Rešite še naloge iz petega poglavja Zbirke vaj iz poslovne matematike (Domjan 2008, 17–19).
6. Za vse dosedanje račune poslovne matematike najdete e-gradivo na naslednjih internetnih naslovih: www.doba.si/e-gradiva/pms, www.inter-es.si/met – odstotni račun in www.pia.si/resitve.cfm=pretekli_prod&6p3=ostal – poslovna matematika.

Za prodajalce in proizvajalce je zelo pomembno, da znajo izračunati pravilno ceno artikla oziroma izdelka, zato smo v poglavju kalkulacije spoznali, kako oblikujemo cene ob upoštevanju vseh stroškov prodaje oziroma proizvodnje. Svoje znanje bomo nadgradili tako, da bomo spremljali tudi predpise, ki veljajo za oblikovanje cen in davka na dodano vrednost, kar je za ekonomista še posebej pomembno. Omogoča mu osebno rast in razvoj. Pri sestavljanju enostavnih in sestavljenih kalkulacij je potrebno uporabljati znanje, ki smo ga pridobili pri obravnavi poglavja o kalkulacijah, sklepnem računu, razdelilnem računu in odstotnem računu, nič pa ne bo narobe, če bomo povezali tudi znanje, pridobljeno pri drugih predmetih.



8 OBRESTNI RAČUN

V poglavju bomo spoznali poleg osnovnih pojmov obrestnega računa (glavnica, obrestna mera, čas obrestovanja) še vrste obrestnih računov (navadni, obrestno obrestni račun), vrste obrestovanj (dekurzivno, anticipativno), vrste obrestnih mer (relativno, konformno) ter vrste kapitalizacij (celoletno, pogostejšo).

8 OBRESTNI RAČUN

Prijatelju, ki mu zaupate, boste posodili denar, ker ga trenutno nima, ve pa, da vam ga bo lahko vrnil čez določen čas. Ali boste posodili denar brez zavarovanja svojega tveganja ali mu boste za čas, ko ne boste imeli možnosti razpolaganja s svojim denarjem, zaračunali oškodnino – obresti? Če bi naše razmišljanje prenesli v poslovni svet, bi govorili o finančnih ustanovah (predvsem poslovnih bankah), katerih osnovni namen je posojanje kapitala. Trenutno v pogojih recesije preživljajo težko situacijo. Sreča je le v tem, da Slovenci nismo preveč zadolženi in v glavnem razpolagamo s kapitalom, ki ga imamo naloženega v poslovnih bankah. Zato bomo v nadaljevanju opredelili obrestni račun, ki nam omogoča izračun donosa neke naložbe. Če povemo preprosteje, z obrestnim računom izračunamo obresti, ki so odškodnina za posojeni denar. Z obrestnim računom se srečujemo kot fizične ali kot pravne osebe. Kot fizične osebe običajno posojamo denar finančnim ustanovam (osebni računi, vezane vloge, finančne naložbe), ki nam kot kreditojemalec ponuja odškodnino za posojen denar v obliki obresti. Banka lahko nastopa tudi v vlogi kreditodajalca, ko nam omogoča najem posojila, za katerega plačamo kot kreditojemalci odškodnino v obliki obresti. Če nastopamo v vlogi pravne osebe, je vloga banke enaka kot pri fizičnih osebah. Gospodarske družbe lahko banki posojajo denar ali si ga od nje izposojajo v obliki kreditov. Ni pomembno, za kakšne pravne ali fizične osebe gre, vedno nastopa na eni strani poslovnega odnosa oseba, ki ponuja denarna sredstva, na drugi strani pa oseba, ki denarna sredstva najema za dogovorjeno odškodnino. Če smo do sedaj obravnavali račune poslovne matematike, lahko zdaj govorimo o finančnem področju poslovanja in računih finančne matematike.

Osnovne količine v obrestnem računu so:

- **G – glavnica**, ki je osnova za izračun obresti in predstavlja osnovni znesek, katerega vložimo ali si ga izposodimo – torej kapital
- **p – obrestna mera ali obrestna stopnja** nam pove, koliko denarnih enot obresti dobimo na vsakih 100 DE glavnice v času enega kapitalizacijskega obdobja (enega leta). Podana je v odstotku in je definirana kot letna obrestna mera, vendar jo lahko reduciramo tudi na krajša časovna obdobja
- **o – obresti** so odškodnina ali denarno nadomestilo ali najemnina za posojeni denar. Obresti so torej cena denarja, ki jo plača dolžnik za izposojen denar upniku, s katerim razpolaga v dogovorjenem času.
- **l, m, d – čas obrestovanja** je lahko podan v letih (l), mesecih (m) ali dnevih (d).

Zaradi lažjega razumevanja obrestnega računa pojasnimo še nekaj osnovnih pojmov. Osnovne količine, ki smo jih omenjali v prejšnji delitvi, predstavljajo osnovo za izračun obresti, če ne nastopajo nobene posebnosti. Običajno pa ni tako. Pomagate si lahko tudi z e-gradivi, ki so dostopna na internetnem naslovu www.pia.si/resitve.cfm=pretekli_prod&6p3=ostal – finančna matematika.

Obrestno mero **p** lahko označimo na naslednje načine:

- **p. a.** – letna obrestna mera
- **p. s.** – semestralna ali polletna obrestna mera
- **p. q.** – kvartalna ali četrtletna obrestna mera
- **p. m.** – mesečna obrestna mera
- **p. d.** – dnevna obrestna mera.

Vprašanje se postavlja, zakaj toliko oznak obrestnih mer. Že prej smo omenili, da je v osnovi definirana letna obrestna mera in da se jo da preračunati oziroma reducirati na krajša časovna obdobja. To pomeni, da se kapitalizacija iz celoletne reducirana (prilagodi) na pogostejšo kapitalizacijo. Pri izračunu **redukcije obrestne mere** na predpisano kapitalizacijsko obdobje ločimo dva načina izračuna obrestne mere:

- **relativno** ali proporcionalno in
- **konformno**.

Kapitalizacija pomeni pripis obresti, **kapitalizacijsko obdobje** pa je časovno obdobje med dvema zaporednima pripisoma obresti h glavnici. Obresti lahko pripišemo na koncu kapitalizacijskega obdobja (dekurzivno obrestovanje) ali jih obračunamo na začetku kapitalizacijskega obdobja (anticipativno obrestovanje). Obresti se zato kapitalizirajo, glavnica pa se naobresti. Najkrajše časovno obdobje je en dan, najdaljše pa eno leto. Število kapitalizacijskih obdobji označimo z **m**. Naredimo pregled števila kapitalizacijskih obdobji:

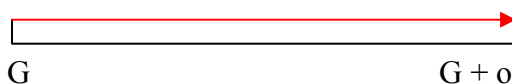
- **m = 1** celoletna kapitalizacija, obresti pripisujemo 1-krat letno
- **m = 2** semestralna kapitalizacija, obresti pripisujemo 2-krat letno
- **m = 4** kvartalna kapitalizacija, obresti pripisujemo 4-krat letno
- **m = 6** dvomesečna kapitalizacija, obresti pripisujemo 6-krat letno
- **m = 12** mesečna kapitalizacija, obresti pripisujemo 12-krat letno
- **m = 365** ali **m = 366** ali **m = 360** dnevna kapitalizacija, obresti pripisujemo vsak dan (odvisno od sistema štetja dni).

Dneve lahko štejemo po različnih **sistemih**:

- **(K, 365)** – dneve štejemo po koledarju, leto šteje 365 dni
- **(K, 366)** – dneve štejemo po koledarju, leto šteje 366 dni, saj gre za prestopno leto (vsaka 4 leta)
- **(30, 360)** – vsak mesec ima povprečno 30 dni, leto šteje 360 dni (način štetja dni tujih bank)
- **(K, 360)** – dneve štejemo po koledarju, število dni v letu je 360.

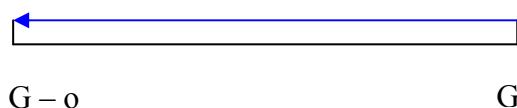
Vrste obrestovanja glede na **trenutek pripisa obresti** so:

- **dekurzivno obrestovanje**, pri katerem obresti pripišemo h glavnici na koncu (po preteku) kapitalizacijskega obdobja. Take obresti imenujemo dekurzivne obresti in se obračunavajo za nazaj od vrednosti glavnice, ki je vložena na začetku posameznega obdobja.



Slika 8: Dekurzivno obrestovanje

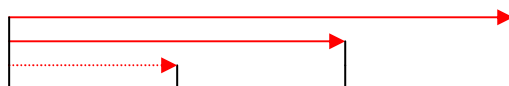
- **anticipativno obrestovanje**, pri katerem se obresti obračunajo (odštejejo) od glavnice na začetku kapitalizacijskega obdobja. Take obresti imenujemo anticipativne obresti in se odzamejo od glavnice že na začetku obrestovalnega obdobja. Postopek izračuna imenujemo diskontiranje glavnice. Osnova za izračuna anticipativnih obresti je končna vrednost glavnice posameznega kapitalizacijskega obdobja, kar pomeni, da obresti plačamo v naprej.

 $G - o$ G

Slika 9: Anticipativno obrestovnje

Vrste obrestnega računa glede na **kapitalizacijo obresti** v obračunskem obdobju:

- **navadni obrestni račun (NOR)**. Obresti se ves čas obrestovanja računajo od začetne vrednosti glavnice. Vsako kapitalizacijsko obdobje prinaša upniku enake obresti, zato je rast glavnice enakomerna (linearna – graf funkcije je premica). Gre za princip aritmetičnega zaporedja, kjer je diferenca med sosednjimi členi zaporedja konstanta (obresti).



1. leto

2. leto

3. leto

 G G_1 G_2 G_3

$$G_1 = G + o \quad G_2 = G + 2 \cdot o \quad G_3 = G + 3 \cdot o$$

Slika 10: Navadni obrestni račun

- **obrestnoobrestni račun (OOR)**. Obresti se sproti pripisujejo h glavnici, torej se kapitalizirajo in predstavljajo osnovo za izračun novih obresti v naslednjem kapitalizacijskem obdobju. Rast glavnice pri tem načinu obrestovanja predstavlja geometrijsko zaporedje, kar pomeni eksponentno rast glavnice.



1. leto

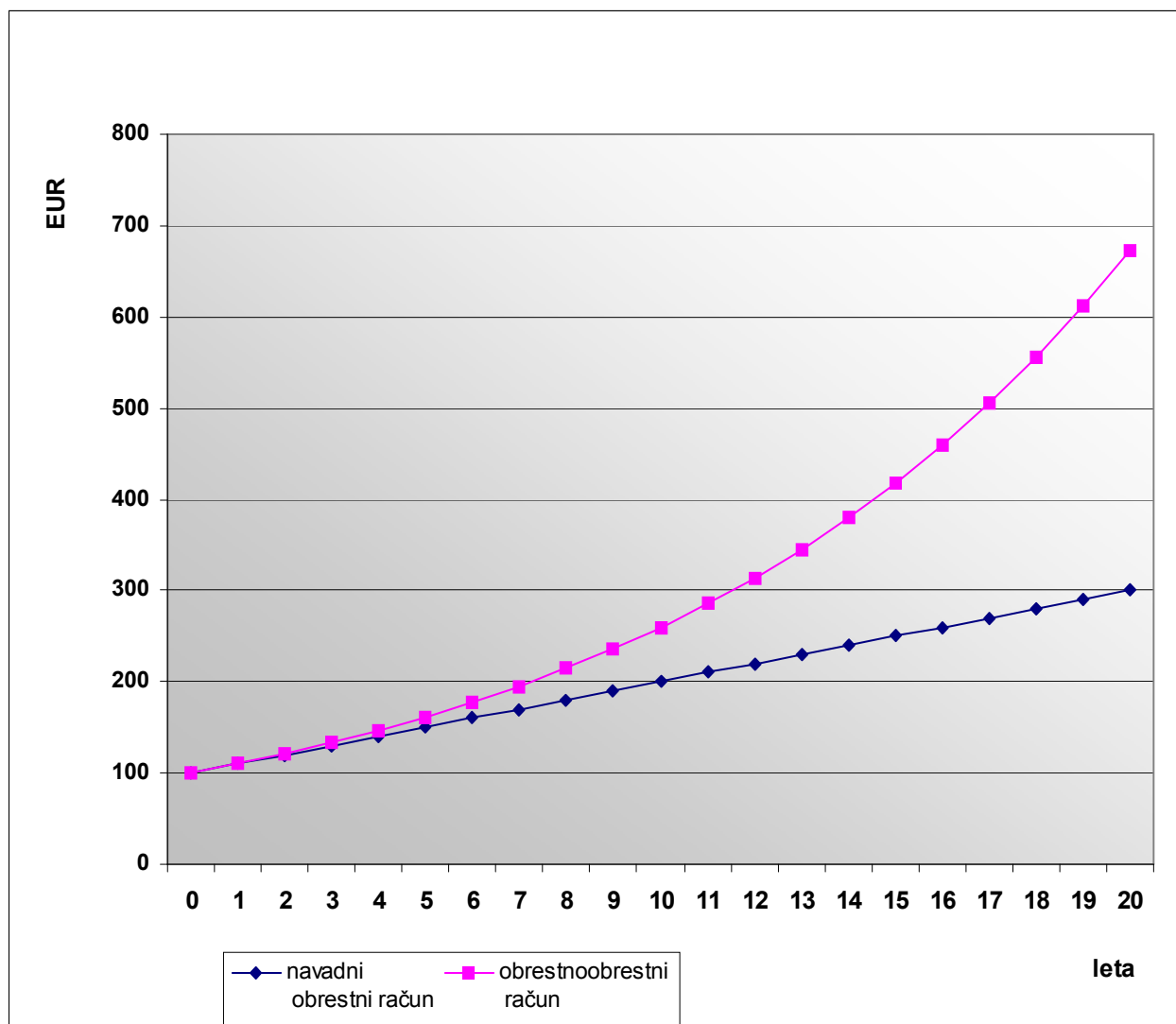
2. leto

3. leto

 G G_1 G_2 G_3

$$G_1 = G + o \quad G_2 = G_1 + o \quad G_3 = G_2 + o$$

Slika 11: Obrestnoobrestni račun



Slika 12: Primerjava navadnega in obrestnoobrestnega računa

Vir: Kodrin, Fundak 2005

Iz navedene delitve obrestovanj sledi še označevanje vrednosti glavnice glede na vrsto obrestnega računa:

➤ navadni obrestni račun:

- **G** – **glavnica** – čista glavnica ali osnova za izračun obresti
- **G⁺** – **povečana glavnica** – $G^+ = G + o$ (dekurzivno obrestovanje)
- **G⁻** – **zmanjšana glavnica** – $G^- = G - o$ (anticipativno obrestovanje)

➤ obrestno obrestni račun:

- **G_n** – **končna vrednost glavnice**
- **G₀** – **začetna vrednost glavnice**

Navrgli smo veliko novih izrazov, ki opredeljujejo osnovne pojme obrestnega računa. Najprej se lotimo obravnave navadnega obrestnega računa, temu pa bo sledila še obravnava obrestnoobrestnega računa.

8.1 NAVADNI OBRESTNI RAČUN

Navadni obrestni račun je račun, pri katerem računamo **obresti** ves čas obrestovanja od **prvotne** (začetne, čiste) **glavnice** ne glede na to, koliko kapitalizacijskih obdobj je preteklo od nastanka dolga do vračila glavnice. Ker smo v uvodnem delu pojasnili osnovne pojme navadnega obrestnega računa, se lotimo metod reševanja nalog navadnega obrestnega računa. Vso predhodno znanje obravnavanih računov v poslovni matematiki bomo s pridom uporabili pri izpeljavi obrazcev za izračun obresti.

Preden pa to storimo, bi radi opozorili na razliko med odstotnim in obrestnim računom. Osnovno enačbo za izračun deleža v odstotnem računu že poznamo. Če delež nadomestimo z obrestmi, celoto z glavnico, odstotno mero pa za obrestno mero in vključimo čas obrestovanja (v letih), dobimo osnovno enačbo za izračun obresti, če je čas podan v letih.

$$d = \frac{C \times p}{100} \rightarrow \begin{matrix} \nearrow G - \text{glavnica} \\ \searrow o - \text{obresti} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{p - \text{obrestna mero}} \end{matrix} \quad \boxed{o = \frac{G \times p \times l}{100}}$$



Poskusimo uporabiti naše dosedanje znanje in z različnimi metodami izračuna izpeljati osnovni obrazec za obresti.

Direktno sklepanje:

100 DE glavnice, 1 letu	p DE obresti
1 DE glavnice, 1 letu.....	$\frac{p}{100}$ DE obresti
G DE glavnice, 1 letu.....	$\frac{p \times G}{100}$ DE obresti
G DE glavnice, 1 letu.....	$\frac{p \times G \times l}{100}$ DE obresti



$$\boxed{o = \frac{G \times p \times l}{100}}$$

Sklepna shema:

$\uparrow$ 100 DE.....	$\uparrow$ 1 leto.....	$\uparrow$ p DE obresti
G DE.....	1 letih.....	x DE obresti

$$o = \frac{G \times p \times l}{100}$$

Sorazmerje:

$$100 : G = p : o$$

$$= 1 : 1$$

$$100 : G = (p \times l) : (o \times 1)$$

$$o = \frac{G \times p \times l}{100}$$

Linearna enačba:

$$y = k \times x \quad k - \text{konstanta, ki je v našem primeru } \frac{p}{100}$$

$$y = \frac{p \times x}{100} \quad y - \text{obresti} \quad x - G, \text{ ki da obresti v 1 letu } (G \times 1) \quad o = \frac{G \times p \times l}{100}$$

Prišli smo do pomembne ugotovitve, da so vse količine med seboj v prenosorazmerni odvisnosti. Po kakršnikoli metodi rešujemo naloge obrestnega računa, vedno pridemo do istega rezultata, ki je podan v obliki **obrazca**. Zato bomo naše znanje za naprej gradili na uporabi in izpeljavi obrazcev.

Kot smo že uvodoma omenili, je časovno obdobje v obrestnem računu lahko podano v letih, mesecih ali dneh. Do sedaj smo izpeljali osnovni obrazec za obresti, ko je bil čas podan v letih. Poglejmo še osnovna obrazca, ko je čas podan v:

- **mesecih** (eno leto ima 12 mesecev, zato je pretvornik za mesece $12 \times 100 = 1.200$)

$$o = \frac{G \times p \times m}{1.200}$$



Koliko obresti nam bo pripisala banka za vloženi znesek 10.000,00 DE za dobo 16 mesecev, če je letna obrestna mera 7 %, obrestovanje pa je navadno?

Analiza naloge:

$$G = 10.000,00 \text{ DE}$$

$$m = 16$$

$$p = 7 \%$$

$$o = ?$$

$$o = \frac{G \times p \times m}{1.200} = \frac{10.000,00 \times 7 \times 16}{1.200} = 933,33 \text{ DE}$$

Odgovor: Banka nam bo za vlogo 10.000,00 DE v 16 mesecih pripisala 933,33 DE obresti, če je dogovorjena obrestna mera 7 %.

- **dneh** (eno leto ima običajno 365 dni, zato je pretvornik za dneve $365 \times 100 = 36.500$
eno leto ima lahko 366 dni (prestopno), zato je pretvornik za dneve $366 \times 100 = 36.600$
eno leto ima lahko 360 dni (hitri izračun), zato je pretvornik za dneve $360 \times 100 = 36.000$)

$$o = \frac{G \times p \times d}{36.500}$$

$$o = \frac{G \times p \times d}{36.600}$$

$$o = \frac{G \times p \times d}{36.000}$$

Ker nam izpeljave obrazcev običajno delajo težave, bomo iz osnovnega obrazca za leta izpeljali vse obrazce za ostale količine podane v letih, vse izpeljane končne obrazce za ostala obdobja pa zapisali v tabeli 6, vi pa jih boste izpeljali sami.

Izraziti želimo **glavnico**, obrestno mero in čas obrestovanja v letih. Začnimo z izpeljavo obrazca za glavnico.

$$o = \frac{G \times p \times l}{100}$$

Glavnica se nahaja na desni strani naše enačbe, ki je zapisana v obliki ulomka. Zato je prvi korak, da odpravimo ulomek (desno in levo stran enačbe pomnožimo s 100).

$$100 \times o = G \times p \times l$$

Običajno izrazimo iskano neznano količino na levi strani enačbe, zato strani enačbe obrnemo.

$$G \times p \times l = 100 \times o$$

Iščemo neznanko G (glavnico), ki se nahaja na levi strani enačbe. Neznanka je množena s produktom obrestne mere in let ($p \times l$), zato ga moramo odpraviti tako, da celotno enačbo delimo z omenjenim produktom in dobimo:



$$G = \frac{100 \times o}{p \times l}$$



Kakšen znesek moramo vložiti v banko, če želimo dobiti po 250 dneh obrestovanja 2.250,00 DE obresti, če je obrestna mera 4,5 %, obrestovanje pa je navadno?

Analiza naloge:

$o = 2.250,00$ DE

$d = 250$

$p = 4,5 \%$

$G = ?$

$$G = \frac{36.500 \times o}{p \times d} = \frac{36.500 \times 2.250,00}{4,5 \times 250} = 73.000,00 \text{ DE}$$

Odgovor: V banko moramo vložiti 73.000,00 DE, če želimo, da nam bo za čas 240 dni pripisala 2.250,00 DE obresti, če je obrestna mera 4,5 %.

Če iščemo neznanko **p (obrestno mero)**, postopek ponovimo, vendar dobimo iskano neznanko tako, da enačbo, v kateri smo odpravili ulomek, delimo s produktom glavnice in let ($G \times l$) ter dobimo:

$$p = \frac{100 \times o}{G \times l}$$



Glavnica, ki se je obrestovala 3 leta, je iz začetne vrednosti 12.550,00 DE narasla na 18.524,00 DE. Po kakšni letni obrestni meri se je obrestovala?

Analiza naloge:

$$G = 12.550,00 \text{ DE}$$

$$l = 3$$

$$G^+ = 18.524,00 \text{ DE}$$

$$p = ?$$

$$o = ? \quad G^+ = G + o \quad o = G^+ - G = 18.524,00 - 12.550,00 = 5.974,00 \text{ DE}$$

$$p = \frac{100 \times o}{G \times l} = \frac{100 \times 5.974,00}{12.550,00 \times 3} = 15,87 \%$$

Odgovor: Banka nam bo v treh letih obračunala obresti po 15,87 % obrestni meri, da bo glavnica 12.550,00 DE narasla na 18.524,00 DE.

In še zadnji korak izpeljave, kjer iščemo **čas obrestovanja** l (leta). Postopek ponovimo in izhajamo iz enačbe, v kateri smo odpravili ulomek tako, da enačbo delimo s produktom glavnice in obrestne mere ($G \times p$) ter dobimo:

$$l = \frac{100 \times o}{G \times p}$$



7. februarja 2009 se bomo pri banki zadolžili za 20.000,00 DE. Katerega dne moramo najkasneje vrniti denar, da ne bomo plačali skupaj več kot 22.000,00 DE, če je letna obrestna mera 8,5 %?

Analiza naloge:

$$G = 20.000,00 \text{ DE}$$

$$G^+ = 22.000,00 \text{ DE}$$

$$p = 8,5 \%$$

$$d = ? \quad G^+ = G + o \quad o = G^+ - G = 22.000,00 - 20.000,00 = 2.000,00 \text{ DE}$$

$$o = ?$$

$$d = \frac{36.500 \times o}{G \times p} = \frac{36.500 \times 2.000,00}{20.000,00 \times 8,5} = 429 \text{ dni}$$

Izračunamo datum vloge tako, da 7. 2. 2008 prištejemo 429 dni:

$$7. 2. 2009 + 365 = 7. 2. 2010 + 64 \text{ dni ali } 64 - (21 + 31) = 12. \text{ april } 2010$$

Odgovor: Če ne želimo plačati več kot 22.000,00 DE, moramo denar vrniti najkasneje 12. aprila 2010, če je obrestna mera 8,5 %.

Pojasnili smo postopek izpeljave osnovnih količin iz osnovnega obrazca, ko je bil čas podan v letih. Iz tabele 6 so razvidni vsi obrazci osnovnih količin, ko je čas podan v letih, mesecih ali dnevih.

Tabela 6: Osnovni obrazci za količine obrestnega računa

Označba količine	Čas v l	Čas v m	Čas v d
obresti – o	$o = \frac{G \times p \times l}{100}$	$o = \frac{G \times p \times m}{1.200}$	$o = \frac{G \times p \times d}{36.500}$
glavnica – G	$G = \frac{100 \times o}{p \times l}$	$G = \frac{1.200 \times o}{p \times m}$	$G = \frac{36.500 \times o}{p \times d}$
obrestna mera – p	$p = \frac{100 \times o}{G \times l}$	$p = \frac{1.200 \times o}{G \times m}$	$p = \frac{36.500 \times o}{G \times d}$
čas obrestovanja – l, m, d	$l = \frac{100 \times o}{G \times p}$	$m = \frac{1.200 \times o}{G \times p}$	$d = \frac{36.500 \times o}{G \times p}$



V banko, ki obrestuje vloge po 3 % letni obrestni meri, smo vložili 13. marca 2008 znesek v višini 7.500,00 DE. Koliko obresti nam bo banka pripisala 20. junija 2008, če gre za navadni obrestni račun?

Analiza naloge:

$G = 7.500,00 \text{ DE}$

$d = 13. 3. - 20. 6. 2008 = 18 + 30 + 31 + 20 = 99$

$p = 3 \%$

$o = ?$

$$o = \frac{G \times p \times d}{36.600} = \frac{7.500,00 \times 3 \times 99}{36.600} = 60,86 \text{ DE}$$

Odgovor: Banka nam bo času od 1. marca do 20. junija 2008 pripisala 60,86 DE obresti, če je dogovorjena obrestna mera 3 %.

Velikokrat nas zanimajo začetne vloge, ki jih vlagamo vsak mesec, da lahko na koncu določenega časovnega obdobja dvignemo le-te, oplemenitene za obresti. V tem delu poglavja bomo vloge izračunavali z navadnim obrestnim računom, v nadaljevanju pa še z obrestno obrestnim računom oziroma periodičnimi denarnimi tokovi. **Mesečne vloge** bomo označili z **a**, **privarčevani znesek** pa s **S**. Na podoben način lahko izračunamo katerokoli neznano vrednost.



V banko, ki obrestuje vloge po letni obrestni meri 6,5 %, smo na začetku vsakega meseca od januarja do decembra vlagali določen znesek. Ob koncu leta smo imeli v banki 55.000,00 DE. Kakšne so bile naše mesečne vloge, če banka uporablja navadni obrestni račun?

Analiza naloge:

$p = 6,5 \%$

$S = 55.000,00 \text{ DE}$

$m = \text{od januarja do decembra } (12+11+10+9+\dots+2+1=78)$

$a = ?$

$$S = a + \frac{a \cdot p \cdot 12}{1.200} + a + \frac{a \cdot p \cdot 11}{1.200} + \dots + a + \frac{a \cdot p \cdot 1}{1.200}$$

$$S = 12a + \frac{a \times p \times 78}{1.200}$$

$$S = \frac{a(14.400 + 78 \times p)}{1200} \quad a = \frac{1.200 \times S}{14.400 + 78 \times p} = \frac{1.200 \times 55.000,00}{14.400 + 78 \times 6,5} = 4.427,45 \text{ DE ali}$$

$$S = a \left(12 + \frac{6,5 \times 78}{1.200} \right) \quad 55.000,00 = 12,42 \times a \quad a = 4.427,45 \text{ DE}$$

Odgovor: Na začetku vsakega meseca moramo vložiti 4.427,45 DE, da bomo imeli na koncu leta 55.000,00 DE, če je obrestna mera 6,5 %, obrestovanje pa navadno.



8.1 Rešite naslednje naloge. Pazite, leto 2008 je prestopno.

- Katera glavnica je dala v času obrestovanja od 3. februarja 2008 do 11. novembra 2008 pri dogovorjeni obrestni meri 4,52 %, obresti v višini 252,14 DE?
- Po kakšni obrestni meri se je obrestovala glavnica 3.250,00 DE, da je v 18 mesecih narasla na 3.755,16 DE?
- Kdaj moramo najkasneje vrniti denar, da ne bomo plačali več kot 25,50 DE obresti, če smo 8. avgusta 2008 vložili v banko 1.570,35 DE, obrestna mera pa je 4,25 %?

8.1.1 Povečana glavnica in navadni obrestni račun

Že pri razlagi osnovnih pojmov smo povedali, da poznamo **dekurzivno obrestovanje**, kar pomeni, da obresti pripisujemo na koncu kapitalizacijskega obdobja. V primeru, da poznamo le povečano glavnico, lahko s pomočjo linearne enačbe izpeljemo obrazce za izračun ostalih neznanih količin (čisto glavnico, obrestno mero, čas obrestovanja, obresti).

$$\boxed{G^+ = G + o}$$

Prikazali bomo izpeljavo obrazcev za neznane količine, če je čas podan v letih. Namesto oznake za obresti vstavimo obrazec za obresti in dobimo:

$$G^+ = G + \frac{G \times p \times l}{100}$$

Izpeljati želimo obrazec za **čisto glavnico (G)**. Čista glavnica se nahaja na desni strani enačbe v obeh členih (torej dvakrat), zato jo lahko izpostavimo:

$$G^+ = G \left(1 + \frac{p \times l}{100} \right)$$

Izraz v oklepaju je dvočlenik, kar pomeni, da ga razširimo na skupni imenovalce, ki je v našem primeru 100:

$$G^+ = G \left(\frac{100 + p \times l}{100} \right)$$

V zadnjem koraku se znebimo ulomka na desni strani enačbe tako, da levo stran delimo z izrazom v oklepaju, kar pa pomeni isto, kot če izraz v oklepaju pomnožimo z njegovo obratno vrednostjo. Istočasno pa zamenjamo levo in desno stran enačbe, ker je običajno iskana neznana količina na levi strani enačbe in dobimo:

$$G = \frac{G^+ \times 100}{100 + p \times l}$$



15. maja 2008 smo vložili v banko nek znesek, 26. junija 2008 pa smo z obrestmi vred dvignili 11.962,94 DE. Obrestna mera, po kateri se je vloga obrestovala, je bila 12 %, obrestovanje z navadnim obrestnim računom. Kakšen je bil znesek vloge?

Analiza naloge:

$$d = 15. 5. - 26. 6. 2008 = 16 + 26 = 42$$

$$G^+ = 11.962,94 \text{ DE}$$

$$p = 12 \%$$

$$G = ?$$

$$G = \frac{G^+ \times 36.600}{36.600 + p \times d} = \frac{11.962,94 \times 36.600}{36.600 + 12 \times 42} = 11.800,44 \text{ DE}$$

Odgovor: 15. maja 2008 smo vložili znesek 11.800,44 DE, da smo lahko 26. junija dvignili z obrestmi vred 11.962,94 DE, če je bila obrestna mera 12 %.

Prikazali bomo še postopek izpeljave obrazca za izračun **obresti (o)**, ostale končne obrazce pa najdete v tabeli 7 in jih boste izpeljali sami.

Ponovno izhajamo iz izhodiščnega obrazca za povečano glavnico, ki je:

$$G^+ = G + o$$

V osnovno linearno enačbo bomo namesto oznake za čisto glavnico vstavili obrazec za G, ki ga že poznamo, in dobili:

$$G^+ = \frac{100 \times o}{p \times l} + o$$

Naš namen je izpeljava obrazca za obresti, ki se pojavljajo na desni strani enačbe v obeh členih, zato jih lahko izpostavimo:

$$G^+ = o \left(\frac{100}{p \times l} + 1 \right)$$

V oklepaju smo dobili dvočlenik z različnima imenovalcema, zato ga razširimo na skupni imenovalec ($p \times l$) in dobimo:

$$G^+ = o \left(\frac{100 + p \times l}{p \times l} \right)$$

Obrazec za obresti izpeljemo tako, da desno stran enačbe delimo z izrazom v oklepaju, kar pa pomeni isto, kot če levo stran enačbe pomnožimo z obratno vrednostjo izraza. Istočasno obrnemo še levo in desno stran, da dobimo iskano neznano količino na levi strani enačbe:

$$o = \frac{G^+ \times p \times l}{100 + p \times l}$$



Pojasnili smo postopek izpeljave osnovnih količin iz osnovnega obrazca, če je čas podan v letih. Iz tabele 7 pa so razvidni vsi obrazci osnovnih količin, če je čas podan v letih, mesecih ali dnevih.

Tabela 7: Osnovni obrazci za izračun osnovnih količin iz povečane glavnice

Označba količine	Čas v l	Čas v m	Čas v d
obresti – o	$o = \frac{G^+ \times p \times l}{100 + p \times l}$	$o = \frac{G^+ \times p \times m}{1.200 + p \times m}$	$o = \frac{G^+ \times p \times d}{36.500 + p \times d}$
glavnica – G	$G = \frac{G^+ \times 100}{100 + p \times l}$	$G = \frac{G^+ \times 1.200}{1.200 + p \times m}$	$G = \frac{G^+ \times 36.500}{36.500 + p \times d}$
obrestna mera – p	$p = \frac{100(G^+ - G)}{G \times l}$	$p = \frac{1.200(G^+ - G)}{G \times m}$	$p = \frac{36.500(G^+ - G)}{G \times d}$
čas obrestovanja – l, m, d	$l = \frac{100(G^+ - G)}{G \times p}$	$m = \frac{1.200(G^+ - G)}{G \times p}$	$d = \frac{36.500(G^+ - G)}{G \times p}$



Koliko mesecev se je obrestovala glavnica 4.500,00 DE, da je dala 275,00 DE obresti, če je dogovorjena obrestna mera 8,50 %, dekurzivno obrestovanje z navadnim obrestnim računom?

Analiza naloge:

$G = 4.500,00$ DE

$o = 275,00$ DE

$p = 8,50 \%$

$G^+ = ?$

$m = ?$

$G^+ = G + o = 4.500,00 + 275,00 = 4.775,00$ DE

$$m = \frac{1.200(G^+ - G)}{G \times p} = \frac{1.200(4.775,00 - 4.500,00)}{4.500,00 \times 8,5} = 8,63 \text{ mes} = 8 \text{ mes } 19 \text{ dni}$$

Odgovor: Glavnica 4.500,00 DE se je obrestovala malo več kot 8 mesecev, da je dala 275,00 DE obresti, če je obrestna mera 8,50 %.



Po kakšni letni obrestni meri, se je obrestovala glavnica, da je narasla na 5.500,00 DE v 2 letih, če smo vložili 4.700,00 DE pri dekurzivnem obrestovanju z navadnim obrestnim računom?

Analiza naloge:

$$G = 4.700,00 \text{ DE}$$

$$G^+ = 5.500,00 \text{ DE}$$

$$l = 2$$

$$p = ?$$

$$p = \frac{100(G^+ - G)}{G \times l} = \frac{100(5.500,00 - 4.700,00)}{4.700,00 \times 2} = 8,51 \%$$

Odgovor: Glavnica 4.700,00 DE se je obrestovala po obrestni meri 8,51 %, da je v dveh letih narasla na 5.500,00 DE.



8.1.1 Rešite naslednje naloge. Pazite, leto 2008 je prestopno.

- Katera glavnica je narasla na 15.725,16 DE v 8 mesecih pri dogovorjeni obrestni meri 4,52 %, dekurzivno obrestovanje z navadnim obrestnim računom? Izvedite obrazec za izračun.
- Po kakšni obrestni meri se je obrestovala glavnica 3.250,00 DE, da je v 3 letih dala 752,96 DE obresti? Nalogo rešite z izvedbo obrazca za dekurzivno obrestovanje iz povečane glavnice.
- Kdaj smo si izposodili denar (datum), če smo imeli 8. avgusta 2008 v banki 1.570,08 DE in smo za to plačali 120,57 DE obresti, dogovorjena obrestna mera dekurzivnega obrestovanja je bila 8,88 %? Izvedite obrazec za izračun časa obrestovanja.

8.1.2 Zmanjšana glavnica in navadni obrestni račun

Spomnimo se osnovne opredelitve **anticipativnega obrestovanja**, ki pravi, da obresti obračunamo (odštujemo) na začetku kapitalizacijskega obdobja, kar pomeni, da razpolagamo z zneskom, ki je zmanjšan za obresti. Temu postopku pravimo diskontiranje glavnice, obrestni meri pa diskontirana obrestna mera. V primeru, da poznamo le zmanjšano glavnico, lahko s pomočjo linearne enačbe izpeljemo vse obrazce za izračun neznanih količin (čisto glavnico, obrestno mero, čas obrestovanja, obresti).

Izhajamo iz osnovne enačbe za anticipativno obrestovanje, ki je:

$$G^- = G - o$$



Namesto oznake za obresti vstavimo obrazec za obresti in dobimo:

$$G^- = G - \frac{G \times p \times l}{100}$$

Izpeljati želimo obrazec za **čisto glavnico (G)**. Postopek izpeljave smo spoznali že v poglavju 8.1.1, zato prikažimo le izpeljavo:

$$G^- = G \left(1 - \frac{p \times l}{100} \right) \quad G^- = G \left(\frac{100 - p \times l}{100} \right) \quad G = \frac{G^- \times 100}{100 - p \times l}$$



Kakšen znesek posojila smo najeli pri banki pred 423 dnevi, če je diskontirana letna obrestna mera 12 %? Banka uporablja navadni obrestni račun in nam je izplačala 275.498,08 DE posojila?

Analiza naloge:

$$G^- = 275.498,08 \text{ DE}$$

$$p = 12 \%$$

$$d = 423$$

$$G = ?$$

$$G = \frac{G^- \times 36.500}{36.500 - p \times d} = \frac{275.498,08 \times 36.500}{36.500 - 12 \times 423} = 320.000,00 \text{ DE}$$

Odgovor: Pri banki smo najeli posojilo v višini 320.000,00 DE za dobo 423 dni.

Ostalih obrazcev ne bomo izpeljevali, prikazali bomo le pregled obrazcev v tabeli 8, ki prikazuje možen izračun neznanih količin iz zmanjšane glavnice. Vi pa jih izpeljite sami.

Tabela 8: Osnovni obrazci za izračun osnovnih količin iz zmanjšane glavnice

Označba količine	Čas v l	Čas v m	Čas v d
obresti – o	$o = \frac{G^- \times p \times l}{100 - p \times l}$	$o = \frac{G^- \times p \times m}{1.200 - p \times m}$	$o = \frac{G^- \times p \times d}{36.500 - p \times d}$
glavnica – G	$G = \frac{G^- \times 100}{100 - p \times l}$	$G = \frac{G^- \times 1.200}{1.200 - p \times m}$	$G = \frac{G^- \times 36.500}{36.500 - p \times d}$
obrestna mera – p	$p = \frac{100(G - G^-)}{G \times l}$	$p = \frac{1.200(G - G^-)}{G \times m}$	$p = \frac{36.500(G - G^-)}{G \times d}$
čas obrestovanja – l, m, d	$l = \frac{100(G - G^-)}{G \times p}$	$m = \frac{1.200(G - G^-)}{G \times p}$	$d = \frac{36.500(G - G^-)}{G \times p}$



Kakšne obresti smo morali plačati za najeti kredit, če banka uporablja anticipativno obrestovanje z navadnim obrestnim računom in razpolagamo s 45.456,00 DE pri dogovorjeni diskontirani letni obrestni meri 7,5 % za dobo 3 let? Kakšen je bil znesek najetega kredita?

Analiza naloge:

$$G^- = 45.456,00 \text{ DE}$$

$$p = 7,5 \%$$

$$l = 3$$

$$o = ? \quad G = ?$$

$$o = \frac{G^- \times p \times l}{100 - p \times l} = \frac{45.456,00 \times 7,5 \times 3}{100 - 7,5 \times 3} = 13.196,90 \text{ DE}$$

$$G = G^- + o = 45.456,00 + 13.196,90 = 58.652,90 \text{ DE}$$

Odgovor: Anticipativne obresti najetega kredita v višini 58.652,90 DE znašajo 13.196,90 DE, če je obrestna mera 7,5 % in smo razpolagali s 45.456,00 DE.



8.1.2 Rešite naslednje naloge. Pazite, leto 2008 je prestopno.

- Kakšen znesek kredita smo najeli, če nam je banka na naš račun nakazala 5.265,78 DE za dobo 23 mesecev, če je dogovorjena diskontirana obrestna mera 5,75 %? Izvedite obrazec za izračun čiste glavnice anticipativnega obrestovanja.
- Kakšne obresti moramo plačati banki, če želimo kredit, ki smo ga najeli do 18. decembra 2008, poravnati že 8. avgusta 2008 v znesku 2.320,15 DE, če je dogovorjena diskontna obrestna mera 4,32 %, obrestovanje pa anticipativno? Nalogo rešite z izvedbo obrazca za izračun obresti.
- Kakšna je diskontna obrestna mera za najeti kredit v obdobju 3 let, če nam je banka na naš račun nakazala 9.250,00 DE, zanj pa smo plačali 1.325,17 DE obresti? Dogovorjeni način obrestovanja je anticipativen. Izvedite obrazec za izračun obrestne mere.

8.2 OBRESTNOOBRESTNI RAČUN

Obrestnoobrestni račun je račun, pri katerem se kapitalizirajo tudi obresti. Za razliko od navadnega obrestnega računa, kjer se obresti računajo vedno od prvotne glavnice, se pri obrestnoobrestnem računu računajo obresti vedno od predhodne glavnice (povečane za pripadajoče obresti v preteklem kapitalizacijskem obdobju).

Preden so lotimo obravnave obrestnoobrestnega računa, pojasnimo **osnovne pojme**:

G_0 – začetna vrednost glavnice

G_n – končna vrednost glavnice

o – obresti

p – dekurzivna obrestna mera

r – dekurzivni obrestovalni faktor

π – anticipativna obrestna mera (π)

ρ – anticipativni obrestovalni faktor (ρ)

n – čas obrestovanja v letih

m – kapitalizacijsko obdobje ali kapitalizacija

Obrestnoobrestni račun pozna dva osnovna načina obrestovanja v bankah in ostalih finančnih institucijah:

- **dekurzivno obrestovanje** – obresti se pripisujejo h glavnici na koncu kapitalizacijskega obdobja
- **anticipativno obrestovanje** – obresti se računajo v naprej, na začetku kapitalizacijskega obdobja.
- **zvezno obrestovanje** – njegova uporaba je primerna za primerjalne analize naraščanja glavnice v času visoke inflacije (zelo pogoste kapitalizacije) oziroma je poseben primer zakona naravne rasti. Več o tem bomo spregovorili pri statistiki. Tiste, ki zanima zvezno obrestovanje lahko najdejo dodatne informacije v učbeniku J. A. Čibeja: Poslovna matematika, II. del.

Obrestna mera je lahko definirana kot:

- **relativna** ali proporcionalna – ob redukciji pomeni upoštevanje in prilagajanje obrestne mere na krajša kapitalizacijska obdobja (zato jo delimo s številom kapitalizacij)
- **konformna** – ob redukciji jo prilagodimo tako, da obrestovalni faktor korenimo s pripadajočo kapitalizacijo.

Naša obravnava obrestnoobrestnega računa se bo nadaljevala po logičnem zaporedju obravnave, torej najprej dekurzivno obrestovanje, kateremu bo sledila obravnava anticipativnega obrestovanja, v obeh primerih s celoletno kapitalizacijo. Obe vrsti obrestovanja bomo obravnavali tudi pri pogostejši kapitalizaciji, najprej s pomočjo relativne obrestne mere, na koncu se bomo ustavili še pri obravnavi konformne obrestne mere.

8.2.1 Dekurzivni način obrestovanja – celoletna kapitalizacija

Obresti se pri dekurzivnem načinu obrestovanja prištevajo h glavnici na koncu kapitalizacijskega obdobja. Navedeno trditev zapišimo v matematični obliki z oznakami za navadni obrestni račun $G^+ = G + o$. Za obrestnoobrestni račun uvajamo oznake, kjer glavnice številčimo po vrsti ali jih označimo v splošni obliki. Zapis je ekvivalenten zapisu v navadnem obrestnem računu: $G_l = G_0 + o$. Če razmislimo, se pripis obresti v prvem letu pri navadnem obrestnem in obrestnoobrestnem računu ne razlikuje, saj je kapitalizacija celoletna. Zato zapišimo splošno enačbo navadnega obrestnega računa tako, da namesto oznake za obresti vstavimo obrazec za obresti:

$$G_l = G_0 + \frac{G_0 \times p \times l}{100}$$

Ker smo zapisali pripis obresti v enem letu, lahko oznako za leta izpustimo, saj je ta enaka ena. Istočasno pa izpostavimo skupno vrednost (G_0) na desni strani enačbe:

$$G_l = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Zaradi lažjega zapisa bomo izraz v oklepaju nadomestili z oznako r (dekurzivni obrestovalni faktor) in dobili: $G_l = G_0 \times r$. Razmišljamo, kaj se bo zgodilo v drugem letu obrestovanja. Glavnica v drugem letu se bo obrestovala tako, da se bo glavnica prvega leta obrestovala

naprej: $G_2 = G_1 + o$. Če logično razmišljamo, lahko izvedemo izpeljavo obrazca z analogijo reševanja v prvem letu obrestovanja. Poglejmo postopek:

$$G_2 = G_1 + \frac{G_1 \times p \times l}{100} = G_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Isti zapis bi lahko zapisali tako, da bi namesto G_1 vstavili prej izračunano vrednost za G_1 :

$$G_2 = G_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right) = G_0 \times r \times r = G_0 \times r^2$$

Iz navedenega razmišljanja lahko izpeljemo osnovni obrazec za izračun **končne vrednosti** glavnice dekurzivnega obrestovanja, če je **kapitalizacija celoletna**:

$$G_n = G_0 \times r^n$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$



S kakšnim zneskom razpolagamo po 5 letih varčevanja, če smo v banko, ki obrestuje vloge po obrestni meri 4,50 % p. a. vložili 12.000,00 DE? Obrestovanje je dekurzivno, kapitalizacija celoletna. Koliko znašajo obresti?

Analiza naloge:

$$G_0 = 12.000,00 \text{ DE}$$

$$p = 4,50 \% \text{ p.a.}$$

$$n = 5$$

$$G_n = ? \quad G_n = G_0 \times r^n = 12.000,00 \times 1,045^5 = 14.954,18 \text{ DE}$$

$$o = G_n - G_0 = 14.954,18 - 12.000,00 = 2.954,18 \text{ DE}$$

Odgovor: Po petih letih varčevanja razpolagamo z zneskom 14.954,18 DE, če smo vložili 12.000,00 DE po obrestni meri 4,50 %. Obresti znašajo 2.954,18 DE.



Isto nalogo rešimo tudi s pomočjo navadnega obrestnega računa.

Analiza naloge:

$$G = 12.000,00 \text{ DE}$$

$$p = 4,50 \% \text{ p.a.}$$

$$n = 5$$

$$G^+ = ?$$

$$G^+ = G + \frac{G \times p \times l}{100} = 12.000,00 + \frac{12.000,00 \times 4,5 \times 5}{100} = 14.700,00 \text{ DE}$$

$$o = G^+ - G = 14.700,00 - 12.000,00 = 2.700,00 \text{ DE}$$

Odgovor: Glavnica 12.000,00 DE bo v petih letih pri navadnem obrestnem računu narasla na 14.700,00 DE in prinesla 2.700,00 DE.

Iz prikazanega primera lahko ugotovimo osnovno zakonitost, da so **obresti pri navadnem obrestnem računu vedno manjše od obresti pri obrestnoobrestnem računu**, kar je logično, saj se pri navadnem obrestnem računu obresti računajo vedno od začetne glavnice, medtem ko pri obrestnoobrestnem od predhodne glavnice.

V nadaljevanju bomo izpeljali še ostale osnovne količine, ki jih lahko izračunamo iz osnovnega obrazca (začetna vrednost glavnice, obrestna mera, čas obrestovanja).

Začetno vrednost glavnice izvedemo iz osnovnega obrazca:



$$G_n = G_0 \times r^n \longrightarrow \boxed{G_0 = \frac{G_n}{r^n}}$$



Koliko DE je potrebno danes vložiti v banko, da bomo imeli čez 7 let pri dekurzivnem obrestovanju, celoletni kapitalizaciji in letni obrestni meri 8 % na računu 3.500,00 DE? Kakšne obresti nam je pripisala banka?

Analiza naloge:

$$G_n = 3.500,00 \text{ DE}$$

$$p = 8 \% \text{ p.a.}$$

$$n = 7$$

$$G_0 = ? \qquad G_0 = \frac{G_n}{r^n} = \frac{3.500,00}{1,08^7} = 2.042,22 \text{ DE}$$

$$o = G_n - G_0 = 3.500,00 - 2.042,22 = 1.457,78 \text{ DE}$$

Odgovor: Pred sedmimi leti smo morali v banko, ki obrestuje vloge po 8 % p.a. vložiti 2.042,22 DE, da nam je banka pripisala 1.457,78 DE obresti.

Izvedimo še obrazec za **obrestno mero**, po kateri se obrestuje začetna glavnica iz osnovnega obrazca $G_n = G_0 \times r^n$. Obrestna mera se skriva v dekurzivnem obrestovalnem faktorju r , zato najprej izrazimo vrednost za r . Potenco osnove r bomo odpravili z obratno operacijo potenciranja, to je s korenjenjem:

$$G_n = G_0 \times r^n \qquad r^n = \frac{G_n}{G_0} \qquad r = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$$

Dekurzivni obrestovalni faktor r je enak $r = 1 + p/100$. Za prikaz obrestne mere lahko uporabljamo dva načina izračuna. Iz izračunanega dekurzivnega obrestovalnega faktorja r lahko neposredno odčitamo višino obrestne mere ali pa si pomagamo z enačbo $p = (r - 1)100$. Če pa želimo obrestno mero izračunati s pomočjo končno izvedenega obrazca, uporabljamo naslednji način. V enačbo bomo namesto faktorja r vstavili vrednost za r in izvedli obrazec tako, da bomo 1 prenesli preko enačaja na drugo stran in odpravili imenovalce 100 (celo enačbo pomnožili s 100).

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} \qquad \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \qquad \boxed{p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right)}$$





V banko smo vložili 10.000,00 DE in po 12 letih ugotovili, da so nam pripisali 45.750,00 DE obresti. Po kakšni letni obrestni meri se je obrestovala vloga, če banka uporablja dekurzivno obrestovanje z letno kapitalizacijo in obrestnoobrestni račun?

Analiza naloge:

$$G_0 = 10.000,00 \text{ DE}$$

$$o = 45.750,00 \text{ DE}$$

$$n = 12$$

$$G_n = ?$$

$$p = ?$$

$$G_n = G_0 + o = 10.000,00 + 45.750,00 = 55.750,00 \text{ DE}$$

$$p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right) = 100 \left(\sqrt[12]{\frac{55.750,00}{10.000,00}} - 1 \right) = 15,40 \%$$

Odgovor: Glavnica 10.000,00 DE je narasla v 12 letih na 55.750,00 DE pri letni obrestni meri 15,40 %.

Ostane nam še izpeljava **časa obrestovanja**. Izhajamo iz izhodiščnega obrazca za izračun končne vrednosti glavnice. Čas obrestovanja najdemo v eksponentu osnove dekurzivnega obrestovalnega faktorja r . Če želimo izraziti čas obrestovanja, ki je podan v letih, moramo vsak člen enačbe logaritmirati.

$$G_n = G_0 \times r^n \quad \log G_n = \log G_0 + n \times \log r$$

V enačbi zamenjamo levo in desno stran, saj želimo izraziti čas obrestovanja. Logaritem G_0 prenesemo preko enačaja na drugo stran (dobi nasproten predznak) in dobljeno vrednost delimo z logaritmom r .



$$n \times \log r = \log G_n - \log G_0$$

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log r} = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log r}$$



Koliko časa (let, dni) se je obrestovala glavnica 75.000,00 DE, da je pri letni dekurzivni obrestni meri 7,50 % in celoletni kapitalizaciji obrestnoobrestnega obrestovanja narasla na 112.000,00 DE?

Analiza naloge:

$$G_0 = 75.000,00 \text{ DE}$$

$$G_n = 112.000,00 \text{ DE}$$

$$p = 7,50 \% \text{ p.a.}$$

$$n = ?$$

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log r} = \frac{\log \left(\frac{112.000,00}{75.000,00} \right)}{\log 1,075} = 5,54 \text{ let}$$

Izračunali smo, da se glavnica obrestuje 5,54 let, kar znaša 5 let in 197 dni ($0,54 \times 365 = 197$ dni).

Odgovor: Glavnica 75.000,00 DE je narasla v 5 letih in 197 dneh na 112.000,00 DE pri letni obrestni meri 7,50 % in celoletni kapitalizaciji.



Kakšne obresti je dala glavnica 7.555,12 DE v 5 letih pri obrestni meri 6,51 %, če je kapitalizacija letna, obrestovanje pa dekurzivno? Obresti izračunajte neposredno.

Analiza naloge:

$$G_0 = 7.555,12 \text{ DE}$$

$$m = 1$$

$$p = 6,51 \% \text{ p.a.}$$

$$n = 5$$

$$o = ?$$

$$o = G_n - G_0 \qquad o = G_0 \times r^n - G_0 \qquad o = G_0 (r^n - 1)$$

$$o = 7.555,12 \cdot (1,0651^5 - 1) = 2.800,91 \text{ DE}$$

Odgovor: Glavnica 7.555,12 DE je v 5 letih dala pri letni obrestni meri 6,51 % in celoletni kapitalizaciji 2.800,91 DE obresti.



8.2.1 Rešite naslednje naloge.

- Katera glavnica je narasla v obdobju 5 let pri dogovorjeni obrestni meri 4,52 %, na 4.252,14 DE, če je obrestovanje dekurzivno, kapitalizacija pa letna?
- Po kakšni letni obrestni meri se je obrestovala glavnica 3.250,00 DE, da je v 3 letih narasla na 3.755,16 DE pri dekurzivnem obrestovanju in letni kapitalizaciji?
- Kdaj moramo najkasneje vrniti denar, da ne bomo plačali več kot 225,50 DE obresti, če smo 8. avgusta 2008 vložili v banko 1.570,35 DE, obrestna mera pa je 4,25 %, obrestovanje je dekurzivno, kapitalizacija pa letna?

8.2.2 Anticipativni način obrestovanja – celoletna kapitalizacija

Obresti se pri **anticipativnem načinu obrestovanja** obračunavajo vnaprej, ob začetku kapitalizacijskega obdobja. Obresti se od končne glavnice **odštejejo**, zato je konec obrestovanja pri njeni začetni vrednosti. Navedeno trditev zapišimo v matematični obliki z oznakami za navadni obrestni račun: $G = G - o$. Če povežemo naše znanje z navadnim obrestnim računom, ugotovimo, da se obresti pri obrestnoobrestnem računu ne razlikujejo, saj je kapitalizacija celoletna.

Zapišimo splošno enačbo navadnega obrestnega računa tako, da namesto oznake za obresti vstavimo obrazec za obresti:

$$G_0 = G_1 - \frac{G_1 \times \pi \times l}{100}$$

Ker smo zapisali obračun za obresti v enem letu, lahko oznako za leta izpustimo, saj je enaka 1. Istočasno pa izpostavimo skupno vrednost glavnice (G_1) na desni strani enačbe:

$$G_0 = G_1 \left(1 - \frac{\pi}{100} \right) \qquad G_0 = G_1 \left(\frac{100 - \pi}{100} \right)$$

Ker nas zanima končna vrednost glavnice (G_1) jo bomo izrazili tako, da bomo izraz v oklepaju delili z vrednostjo izraza oziroma pomnožili z njegovo obratno vrednostjo.

$$G_1 = G_0 \left(\frac{100}{100 - \pi} \right)$$

Razmišljamo, kaj se bo zgodilo v drugem letu obrestovanja. Glavnica v drugem letu se bo obrestovala tako, da se bo glavnica iz prvega leta obrestovala naprej: $G_1 = G_2 - o$. Če logično razmišljamo, lahko izvedemo izpeljavo obrazca z analogijo reševanja v prvem letu obrestovanja. Poglejmo postopek:

$$G_2 = G_1 \left(\frac{100}{100 - \pi} \right) \longrightarrow \text{anticipativni obrestovalni faktor } (\rho)$$

Isti zapis bi lahko zapisali tako, da bi namesto G_1 vstavili prej izračunano vrednost za G_1 :

$$G_2 = G_1 \left(\frac{100}{100 - \pi} \right) = G_0 \left(\frac{100}{100 - \pi} \right) \left(\frac{100}{100 - \pi} \right)$$

Zaradi lažjega zapisa bomo izraz v oklepaju nadomestili z oznako ρ (anticipativni obrestovalni faktor) in dobili $G_2 = G_0 \times \rho \times \rho = G_0 \times \rho^2$. Iz navedenega razmišljanja lahko izpeljemo osnovni obrazec za izračun **končne vrednosti** glavnice anticipativnega načina obrestovanja, če je **kapitalizacija celoletna**:

$$\boxed{G_n = G_0 \times \rho^n} \qquad \rho = \frac{100}{100 - \pi}$$



Banka nam je za čas 5 letih, ko obrestuje vloge po letni anticipativni obrestni meri 4,50 %, izplačala 12.000,00 DE. Koliko bomo morali vrniti po izteku posojilnega roka, če je kapitalizacija celoletna? Koliko znašajo obresti?

Analiza naloge:

$$G_0 = 12.000,00 \text{ DE}$$

$$\pi = 4,50 \%$$

$$n = 5$$

$$G_n = ?$$

$$G_n = G_0 \times \rho^n = 12.000,00 \cdot \left(\frac{100}{100 - 4,5} \right)^5 = 15.106,52 \text{ DE}$$

$$o = G_n - G_0 = 15.106,52 - 12.000,00 = 3.106,52 \text{ DE}$$

Odgovor: Po petletnem preteku posojilnega roka moramo vrniti kredit v višini 15.106,52 DE, če smo ob najemu razpolagali z 12.000,00 DE po obrestni meri 4,50 %. Obresti znašajo 3.106,52 DE.

Če primerjamo izračun obresti dekurzivnega in anticipativnega načina obrestovanja ugotovimo, da pri anticipativnem obrestovanju plačamo večje obresti pri isti obrestni meri in istem času obrestovanja. Za posojilojemalca je **anticipativni način** obrestovanja bistveno **dražji** od dekurzivnega in zato manj ugoden.

V nadaljevanju bomo izpeljali še ostale osnovne količine, ki jih lahko izračunamo iz osnovnega obrazca anticipativnega načina obrestovanja (začetna vrednost glavnice, obrestna mera, čas obrestovanja). **Začetno vrednost glavnice** izvedemo iz osnovnega obrazca:



$$G_n = G_0 \times \rho^n \longrightarrow \boxed{G_0 = \frac{G_n}{\rho^n}}$$



Koliko DE posojila smo imeli na voljo ob sklenitvi pogodbe, če smo čez 9 let pri anticipativnem obrestovanju, celoletni kapitalizaciji in letni obrestni meri 8 % morali vrniti 22.000,00 DE?

Analiza naloge:

$$G_n = 22.000,00 \text{ DE}$$

$$\pi = 8 \%$$

$$n = 9$$

$$G_0 = ?$$

$$G_0 = \frac{G_n}{\rho^n} = \frac{22.000,00}{\left(\frac{100}{100 - 8} \right)^9} = 10.387,55 \text{ DE}$$

Odgovor: Pred devetimi leti smo v banki najeli posojilo in razpolagali z zneskom 10.387,55 DE, ki se je obrestoval po 8 % letni anticipativni obrestni meri, zato smo morali vrniti po 9 letih 22.000,00 DE.

Izvedimo še obrazec za **obrestno mero** iz osnovnega obrazca $G_n = G_0 \times \rho^n$. Obrestna mera se skriva v anticipativnem obrestovalnem faktorju ρ , zato najprej izrazimo vrednost za ρ :

$$G_n = G_0 \times \rho^n \qquad \rho^n = \frac{G_n}{G_0} \qquad \rho = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$$

Anticipativni obrestovalni faktor ρ je enak $100/100 - \pi$. V enačbo bomo namesto faktorja vstavili vrednost za ρ in izvedli obrazec tako, da bomo odpravili imenovalc $100 - \pi$.

$$\frac{100}{100 - \pi} = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} \quad 100 = \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} \right) (100 - \pi)$$

Ker želimo izraziti vrednost anticipativne obrestne mere π , bomo desno stran enačbe delili z vrednostjo korena oziroma pomnožili z njegovo obratno vrednostjo. Obe strani enačbe obrnemo, ker je običajno neznanka na levi strani enačbe in odpravimo vrednost 100 tako, da jo prenesemo preko enačaja na levo stran enačbe:

$$(100 - \pi) = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}} \right) \quad -\pi = \left[100 \left(\sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}} \right) \right] - 100$$

Ker se pojavlja faktor 100 v dveh členih, ga lahko istočasno izpostavimo:

$$-\pi = 100 \left(\left(\sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}} \right) - 1 \right)$$

Na levi strani enačbe smo že dobili iskano neznanko, vendar ima negativen predznak, kar pomeni, da celo enačbo pomnožimo še z -1 in jo uredimo:

$$\pi = 100 \left(\left(-\sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}} \right) + 1 \right) \quad \boxed{\pi = 100 \left(1 - \sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}} \right)}$$



Isti izračun anticipativne obrestne mere dobimo, če jo izrazimo z anticipativnim faktorjem ρ , ki smo ga izračunali iz osnovnega obrazca:

$$\rho = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} \quad \boxed{\pi = \frac{100(\rho - 1)}{\rho}}$$



Najeli smo posojilo v višini 3.000,00 DE pri anticipativnem načinu obrestovanja in celoletni kapitalizaciji za dobo 7 let. Začetni dolg je znašal 2.000,00 DE. Kakšna je bila dogovorjena anticipativna letna obrestna mera?

Analiza naloge:

$G_0 = 2.000,00$ DE

$G_n = 3.000,00$ DE

$n = 7$
 $\pi = ?$

$$\pi = 100 \left(1 - \sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}} \right) = 100 \left(1 - \sqrt[7]{\frac{2.000,00}{3.000,00}} \right) = 5,63 \%$$

Isto nalogo bomo rešili tudi na drugi način.

$$\rho = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} = \sqrt[7]{\frac{3.000,00}{2.000,00}} = 1,059634023$$

$$\pi = \frac{100(\rho - 1)}{\rho} = \frac{100(1,059634023 - 1)}{1,059634023} = 5,63 \%$$

Odgovor: Obrestna mera za najeto posojilo v višini 3.000,00 DE znaša 5,63 %.

Ostane nam še izpeljava obrazca za **čas obrestovanja**. Izhajamo iz osnovnega obrazca za izračun končne vrednosti glavnice. Čas obrestovanja najdemo v eksponentu z osnovo obrestne mere. Če želimo izraziti čas obrestovanja, ki je podan v letih, moramo vsak člen enačbe logaritmirati.

$$G_n = G_0 \times \rho^n$$

$$\log G_n = \log G_0 + n \times \log \rho$$

V enačbi zamenjamo levo in desno stran, saj želimo izraziti čas obrestovanja kot neznanko. Logaritem G_0 prenesemo preko enačaja na drugo stran (dobi nasproten predznak) in dobljeno vrednost delimo z logaritmom ρ .

$$n \times \log \rho = \log G_n - \log G_0$$



$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log \rho} = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log \rho} = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log \left(\frac{100}{100 - \pi} \right)}$$



Koliko časa (let, dni) se je obrestovala glavnica 75.000,00 DE, da je pri letni anticipativni obrestni meri 7,50 % in celoletni kapitalizaciji obrestnoobrestnega obrestovanja narasla na 112.000,00 DE?

Analiza naloge:

$G_0 = 75.000,00$ DE

$G_n = 112.000,00$ DE

$\pi = 7,50 \%$

$n = ?$

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log \rho} = \frac{\log \left(\frac{112.000,00}{75.000,00} \right)}{\log \left(\frac{100}{100 - 7,5} \right)} = 5,14 \text{ let}$$

Izračunali smo, da se glavnica obrestuje 5,14 let, kar znaša 5 let in 51 dni ($0,14 \times 365 = 51$)

Odgovor: Glavnica 75.000,00 DE je narasla v 5 letih in 51 dneih na 112.000,00 DE pri anticipativni letni obrestni meri 7,50 % in celoletni kapitalizaciji.



8.2.2 Rešite naslednje naloge.

- Kakšen znesek kredita smo najeli, če nam je banka na naš račun nakazala 5.265,78 DE za dobo 3 let, če je dogovorjena diskontirana obrestna mera 5,75 %, kapitalizacija je letna, obrestovanje anticipativno?
- Kakšne obresti moramo plačati banki, če želimo kredit, ki smo ga najeli pred 5 leti, poravnati že po 3 letih v znesku 2.320,15 DE, če je dogovorjena diskontna obrestna mera 4,32 %, obrestovanje pa anticipativno, kapitalizacija letna?
- Kakšna je diskontna obrestna mera za najeti kredit v obdobju 3 let, če nam je banka na naš račun nakazala 9.250,00 DE, zanj pa smo plačali 1.325,17 DE obresti? Dogovorjeni način obrestovanja je anticipativen, kapitalizacija je letna.

8.2.3 Pogostejša kapitalizacija

Kot smo omenili že v uvodu poglavja v obrestnoobrestni račun, je lahko **kapitalizacijsko obdobje m** (obdobje med dvema zaporednimi pripisoma obresti) krajše od enega leta. Spomnimo se, da je lahko kapitalizacija semestralna ($m = 2$), kvartalna ($m = 4$), dvomesečna ($m = 6$), mesečna ($m = 12$) ali dnevna ($m = 356$ za navadno leto, $m = 366$ za prestopno leto). Poglejmo, kaj se dogaja z ostalimi osnovnimi količinami.

Preden se lotimo obravnave enačb, povejmo še, da je lahko obrestna mera pri pogostejši kapitalizaciji:

- **relativna** ali proporcionalna
- **konformna**.

8.2.3.1 Relativna obrestna mera

Osnova razmišljanja o izračunu katerekoli osnovne količine pri pogostejši kapitalizaciji je prilagoditev obrestne mere pogostejši kapitalizaciji. Prilagojeno relativno obrestno mero bomo označili z r' za **dekurzivni način obrestovanja** in s π' za **anticipativni način obrestovanja**. Prilagojeno relativno obrestno mero dobimo tako, da letno obrestno mero delimo s številom kapitalizacijskih obdobj. Če to zapišemo matematično:

- dekurzivno obrestovanje
$$p' = \frac{p}{m}$$
- anticipativno obrestovanje
$$\pi' = \frac{100}{100 - \frac{\pi}{m}}$$

Ker v obrazcih za izračun količin uporabljamo faktorje obrestovanja (ki jih računamo na osem decimalnih mest natančno) prikažimo, kako zgleda njihov izračun za:

- dekurzivno obrestovanje
$$r' = 1 + \frac{\frac{p}{m}}{100} = 1 + \frac{p}{100 \times m}$$
- anticipativno obrestovanje
$$\rho' = \frac{100}{100 - \frac{\pi}{m}}$$



Izračunajte dnevno, mesečno, kvartalno in semestralno relativno obrestno mero, če veste, da je letna obrestna mera 10 %, obrestovanje dekurzivno. Zapišite tudi dekurzivne obrestovalne faktorje.

Analiza naloge:

p.a. = 10 %

p. d. = ?	p. d. = $10/365 = 0,02739726 \%$	$r' = 1,00027397$
p. m. = ?	p. m. = $10/12 = 0,83333333 \%$	$r' = 1,00833333$
p. q. = ?	p. q. = $10/4 = 2,5 \%$	$r' = 1,025$
p. s. = ?	p. s. = $10/2 = 5 \%$	$r' = 1,05$

Izračunane **obrestne mere** so prilagojene in označene z **odstotki**, medtem ko so obrestovalni faktorji neimenovana števila.



V banko smo vložili 25.000,00 DE. Banka obrestuje vloge po 4 % p.a. z relativno dekurzivno obrestno mero in z mesečno kapitalizacijo. Koliko denarja bomo imeli v banki čez 5 let? Koliko obresti so nam pripisali?

Analiza naloge:

$G_0 = 25.000,00$ DE

$m = 12$

$n = 5$

$p = 4 \%$ p.a.

$$G_n = ? \quad G_n = G_0 \times r'^{n \times m} = 25.000,00 \cdot \left(1 + \frac{4}{100 \times 12}\right)^{5 \cdot 12} = 30.524,91 \text{ DE}$$

$$o = G_n - G_0 = 30.524,91 - 25.000,00 = 5.524,91 \text{ DE}$$

Odgovor: Glavnica 25.000,00 DE je narasla na 30.524,91 DE in dala 5.524,91 DE obresti.

Poglejmo si, kakšne obresti bi nam pripisali, če bi bilo besedilo naloge enako, s tem da bi bila kapitalizacija celoletna.

Analiza naloge:

$G_0 = 25.000,00$ DE

$m = 1$

$$n = 5 \quad G_n = G_0 \times r^n = 25.000,00 \times 1,04^5 = 30.416,32 \text{ DE}$$

$$\underline{p = 4 \% \text{ p.a.}} \quad o = G_n - G_0 = 30.416,32 - 25.000,00 = 5.416,32 \text{ DE}$$

$G_n = ?$

Odgovor: Glavnica 25.000,00 DE je narasla na 30.416,32 DE in dala 5.416,32 DE obresti.

Iz navedenega primera lahko ugotovimo, da nam **relativna obrestna mera** pri pogostejši **kapitalizaciji** daje **večje obresti** kot relativna obrestna mera pri **celoletni kapitalizaciji**, kar je logično, saj se obresti pripisujejo h glavnici večkrat v kapitalizacijskem obdobju. Po osnovnem načelu obrestnoobrestnega računa bi morale biti obresti pri pogostejši kapitalizaciji enake celoletni (gre za sistemsko napako, ker deluje relativna obrestna mera po principu navadnega obrestnega računa). To napako lahko popravimo, če uporabljamo konformno obrestno mero.

Obrazcev za izpeljavo neznanih količin (začetne vrednosti glavnice, končne vrednosti glavnice, časa obrestovanja, obrestne mere) ne bomo izpeljevali, ker smo to počeli v prejšnjih dveh poglavjih in jih je potrebno samo prilagoditi pogostejši kapitalizaciji. Pregled možnih obrazcev je prikazan v tabeli 9.

Tabela 9: Osnovni obrazci pri pogostejši kapitalizaciji – relativna obrestna mera

Označba količine	Dekurzivno obrestovanje	Anticipativno obrestovanje
Končna vrednost glavnice – G_n	$G_n = G_0 \times r'^{n \times m}$	$G_n = G_0 \times \rho'^{n \times m}$
Začetna vrednost glavnice – G_0	$G_0 = \frac{G_n}{r'^{n \times m}}$	$G_0 = \frac{G_n}{\rho'^{n \times m}}$
Obrestna mera – p, π	$p = 100 \times m \left(\sqrt[n \times m]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right)$	$\pi = 100 \times m \left(1 - \sqrt[n \times m]{\frac{G_0}{G_n}} \right)$
Čas obrestovanja – n	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{m \times \log r'}$	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{m \times \log \left(\frac{100}{100 - \frac{\pi}{m}} \right)}$

Primerov za izračun ostalih osnovnih količin pri pogostejši kapitalizaciji in relativni obrestni meri ne bomo navajali.

8.2.3.2 Konformna obrestna mera

Konformna obrestna mera prinese v enem letu enake obresti kot letna obrestna mera pri celoletni kapitalizaciji. Izhajamo iz osnovne trditve ekvivalence (enakosti), ki pravi, da so obresti, ki jih prinese letna obrestna mera (p) pri dekurzivnem obrestovanju enake obrestni meri pri pogostejši kapitalizaciji (p_k):

$$\left(1 + \frac{p_k}{100} \right)^m = \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Izpeljimo obrazec za izračun **konformne obrestne mere** dekurzivnega obrestovanja:

$$\left(1 + \frac{p_k}{100} \right) = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} \quad \frac{p_k}{100} = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \quad p_k = 100 \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

Ker pa v obrazcih za izračun neznanih količin (začetne glavnice, končne glavnice, časa obrestovanja, obrestne mere) potrebujemo obrestovalne faktorje, povejmo, da je obrestovalni faktor dekurzivnega konformnega obrestovanja

$$r_k = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}}$$



Dekurzivni konformni faktor lahko zapišemo tudi v $\left(\sqrt[m]{r}\right)^n = r^{n/m}$.

Druga vrednost dekurzivnega obrestovalnega konformnega faktorja je zapisana kot potenca, ki ima za eksponent ulomek in je zato primernejša za hiter izračun s pomočjo kalkulatorja. Opozoriti pa velja na dejstvo, da pomeni **n** število kapitalizacijskih obdobj in ne let.



Izračunajte dnevne, mesečne, kvartalne in semestralne konformne obrestovalne faktorje, če veste, da je letna obrestna mera 10 %, obrestovanje dekurzivno. Zapišite tudi konformne obrestne mere.

Analiza naloge:

p.a. = 10 %

$$p. d. = ? \quad r_d = \sqrt[365]{1,10} = 1,000261158 \quad p. d. = 0,0261158 \%$$

$$p. m. = ? \quad r_m = \sqrt[12]{1,10} = 1,00797414 \quad p. m. = 0,797414 \%$$

$$p. q. = ? \quad r_q = \sqrt[4]{1,10} = 1,024113689 \quad p. q. = 2,4113689 \%$$

$$p. s. = ? \quad r_s = \sqrt[2]{1,10} = 1,048808848 \quad p. s. = 4,8808848 \%$$

Ustavimo se pri zapisu osnovnega obrazca za izračun končne vrednosti glavnice, če je obrestovanje dekurzivno, obrestna mera konformna, kapitalizacija pa pogostejša.

$$G_n = G_0 \left(\sqrt[m]{r}\right)^n \quad \text{ali} \quad \boxed{G_n = G_0 \times r^{n/m}}$$



V banko smo vložili 25.000,00 DE. Banka obrestuje vloge po 4 % p.a. z dekurzivno konformno obrestno mero in dnevno kapitalizacijo. Koliko denarja bomo imeli v banki čez 230 dni? Koliko obresti so nam pripisali?

Analiza naloge:

$G_0 = 25.000,00$ DE

$m = 365$

$d = 230$

$$p = 4 \% \text{ p.a.} \quad G_n = G_0 \times r^{n/m} = 25.000,00 \times 1,04^{230/365} = 25.625,56 \text{ DE}$$

$$G_n = ? \quad o = G_n - G_0 = 25.625,56 - 25.000,00 = 625,56 \text{ DE}$$

Odgovor: Glavnica 25.000,00 DE je narasla na 25.625,56 DE in dala 625,56 DE obresti.

Obrazcev za izpeljavo neznanih količin (začetne vrednosti glavnice, končne vrednosti glavnice, časa obrestovanja, obrestne mere) ne bomo izpeljevali, ker smo to počeli v prejšnjih dveh poglavjih in jih je potrebno samo prilagoditi pogostejši kapitalizaciji ter konformni obrestni meri. Pregled možnih obrazcev prikazuje tabela 10.

Tabela 10: Osnovni obrazci pri pogostejši kapitalizaciji – konformna obrestna mera

Označba količine	Dekurzivno obrestovanje	Anticipativno obrestovanje
Končna vrednost glavnice – G_n	$G_n = G_0 \times r^{n/m}$	$G_n = G_0 \times \rho^{n/m}$
Začetna vrednost glavnica – G_0	$G_0 = \frac{G_n}{r^{n/m}}$	$G_0 = \frac{G_n}{\rho^{n/m}}$
obrestna mera – p, π	$p = 100 \left(\left(\frac{G_n}{G_0} \right)^{m/n} - 1 \right)$	$\rho = \left(\frac{G_n}{G_0} \right)^{m/n} \quad \pi = \frac{100(\rho - 1)}{\rho}$
čas obrestovanja – n	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log r} \times m$	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log \left(\frac{100}{100 - \pi} \right)} \times m$



Koliko smo vložili v banko, ki obrestuje vloge po 7,5 % p.a. z dekurzivno konformno obrestno mero in mesečno kapitalizacijo, če smo po 5 mesecih zasledili stanje na našem računu v višini 65.320,15 DE?

Analiza naloge:

$$G_n = 65.320,15 \text{ DE}$$

$$m = 12$$

$$m = 5$$

$$p = 7,5 \% \text{ p.a.}$$

$$G_0 = ? \quad G_0 = \frac{G_n}{r^{n/m}} = \frac{65.320,15}{1,075^{5/12}} = 63.381,18 \text{ DE}$$

Odgovor: V petih mesecih je naša vloga 63.381,18 DE narasla na 65.320,15 DE, če je bilo obrestovanje dekurzivno s konformno obrestno mero 7,5 % p.a.



Koliko časa (leta, meseci, dnevi) se je obrestovala vloga 17.223,65 DE, da je narasla na 25.000,00 DE, če je obrestovanje dekurzivno, konformna letna obrestna mera 8 %, kapitalizacija pa kvartalna?

Analiza naloge:

$$G_n = 25.000,00 \text{ DE}$$

$$G_0 = 17.223,65 \text{ DE}$$

$$m = 4$$

$$p = 8 \% \text{ p.a.}$$

$$n = ? \quad n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log r} \times m = \frac{\log \left(\frac{25.000,00}{17.223,65} \right)}{\log 1,08} \times 4 = 19,37 \text{ kvartalov}$$

$$n = 4 \text{ leta } 10 \text{ mesecev } 2 \text{ dni } (19,37 \text{ mes}/4 = 4,84 \text{ let } 0,84 \times 12 = 10,08 \text{ mes } 0,08 \text{ mes} \times 30 = 2 \text{ dni})$$

Odgovor: Vloga 17.223,65 DE se je obrestovala 1 leto 7 mesecev in 10 dni, da je pri 8 % letni konformni obrestni meri narasla na 25.000,00 DE.



Po kakšni dekurzivni konformni letni obrestni meri se je obrestovala glavnica 33.120,00 DE, da je narasla v 5 letih na 55.750,00 DE pri semestralni kapitalizaciji?

Analiza naloge:

$$G_n = 55.750,00 \text{ DE}$$

$$G_0 = 33.120,00 \text{ DE}$$

$$m = 2$$

$$n = 5$$

$$p.a. = ? \quad p = 100 \left(\left(\frac{G_n}{G_0} \right)^{m/n} - 1 \right) = 100 \left(\left(\frac{55.750,00}{33.120,00} \right)^{2/5 \times 2} - 1 \right) = 10,98 \%$$

Odgovor: Glavnica 33.120,00 DE se je obrestovala 5 let po letni konformni obrestni meri 10,98 % pri dekurzivnem načinu obrestovanja.

V dosedanjih primerih smo se ukvarjali le z dekurzivnim obrestovanjem pri konformni obrestni meri in pogostejši kapitalizaciji. V nadaljevanju pogledjmo še naloge anticipativnega načina obrestovanja s konformno obrestno mero in pogostejšo kapitalizacijo.



Banka nam je za najeti kredit na naš račun izplačala 25.000,00 DE. Banka obrestuje vloge po 4 % letni anticipativni konformni obrestni meri z dnevno kapitalizacijo. Na kakšen znesek se je glasil 230 dnevni kredit ob najemu?

Analiza naloge:

$$G_0 = 25.000,00 \text{ DE}$$

$$m = 365$$

$$d = 230$$

$$\pi = 4 \%$$

$$G_n = ? \quad G_n = G_0 \times \rho^{n/m} = 25.000,00 \left(\frac{100}{100 - 4} \right)^{230/365} = 25.651,43 \text{ DE}$$

Odgovor: Znesek kredita, ki smo ga najeli za 230 dni pri 4 % letni anticipativni meri in dnevni kapitalizaciji je znašal 25.651,43 DE.



Za poravnavo dolga nam je dobavitelj izročil menico v vrednosti 333.250,00 DE, ki je vnovčljiva čez 90 dni. Ker denar potrebujemo takoj, smo se z banko dogovorili, da odkupi našo terjatev. Banka za take posle obračunava 12 % letne anticipativne obresti po konformni obrestni meri. Koliko denarja nam bo izplačala banka, če ostalih bančnih stroškov, razen stroškov diskontiranja menice, ne upoštevamo?

Analiza naloge:

$$G_n = 333.250,00 \text{ DE}$$

$$m = 365$$

$$d = 90$$

$$\pi = 12 \%$$

$$G_0 = ? \quad G_0 = \frac{G_n}{\rho^{n/m}} = \frac{333.250,00}{\left(\frac{100}{100-12}\right)^{90/365}} = 322.909,60 \text{ DE}$$

Odgovor: Znesek predčasnega odkupa menice bo znašal 322.909,60 DE za čas 90 dni po anticipativnem načinu obrestovanja in konformni obrestni meri 12 %.



Po kakšni anticipativni letni obrestni meri se je obrestoval kredit, ki smo ga najeli za dobo 181 dni, če so znašale diskontirane obresti 7.250,15 DE, razpolagali pa smo z zneskom kredita v višini 212.000,00 DE, če je kapitalizacija dnevna?

Analiza naloge:

$$G_0 = 212.000,00 \text{ DE}$$

$$m = 365$$

$$d = 181$$

$$o = 7.250,15 \text{ DE}$$

$$\pi = ?, G_n = ?$$

$$G_n = G_0 + o = 212.000,00 + 7.250,15 = 219.250,15 \text{ DE}$$

$$G_n = G_0 \times \rho^{n/m} \quad \rho^{n/m} = \frac{G_n}{G_0} \quad \rho = \left(\frac{G_n}{G_0}\right)^{m/n}$$

$$\rho = \left(\frac{219.250,15}{212.000,00}\right)^{365/181} = 1,070163495$$

$$\pi = \frac{100(\rho - 1)}{\rho} = \frac{100(1,070163495 - 1)}{1,070163495} = 6,56 \%$$

Odgovor: Obrestna mera za najeti 181 dnevni kredit je znašala 6,56 % pri anticipativnem načinu obrestovanja pri najetem posojilu v višini 219.250,15 DE.



Za koliko časa (leta, dnevi) smo najeli kredit v višini 250.000,00 DE, če smo morali plačati 75.250,00 DE obresti in če smo se dogovorili za anticipativno obrestovanje s 15 % konformno letno obrestno mero in mesečno kapitalizacijo?

Analiza naloge:

$$G_n = 250.000,00 \text{ DE}$$

$$o = 75.250,00 \text{ DE}$$

$$m = 12$$

$$\pi = 15 \%$$

$$n = ?$$

$$G_0 = ?$$

$$G_0 = G_n - o = 250.000,00 - 75.250,00 = 174.750,00 \text{ DE}$$

$$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_o} \right)}{\log \left(\frac{100}{100 - \pi} \right)} \times m = \frac{\log \left(\frac{250.000,00}{174.750,00} \right)}{\log \left(\frac{100}{100 - 15} \right)} \times 12 = 26,44 \text{ mes}$$

$$n = 2 \text{ leti } 73 \text{ dni} \quad (26,44 \text{ mes}/12 = 2,20 \text{ let} \quad 0,20 \text{ let} \times 365 = 73 \text{ dni})$$

Odgovor: Najeti kredit v višini 250.000,00 DE, za katerega smo plačali 75.250,00 DE obresti pri obrestni meri 15 % in anticipativnem načinu obrestovanja, je bil najet za 2 leti in 74 dni.



8.2.3 Rešite naslednje naloge.

- Kakšen znesek smo vložili v banko pred 4 leti, če imamo danes na računu 5.222,15 DE? Dogovorjeni pogoji obrestovanja so bili: obrestna mera 5,75 %, kapitalizacija semestralna, obrestovanje dekurzivno, obrestna mera relativna?
- Kakšni sta bili dogovorjeni obrestni meri, če smo vložili 1.750,00 DE in po 5 letih imeli na računu 2.129,17 DE, če je bilo obrestovanje dekurzivno in računano enkrat po relativni, drugič pa po konformni obrestni meri? V obeh primerih je bila kapitalizacija kvartalna.
- Kakšna je diskontna obrestna mera za najeti kredit v obdobju 3 let, če nam je banka na naš račun nakazala 9.250,00 DE, zanj pa smo plačali 1.325,17 DE obresti? Dogovorjeni način obrestovanja je anticipativen, kapitalizacija je semestralna, obrestna mera konformna. Izvedite tudi obrazec za izračun anticipativne obrestne mere.
- Koliko časa (l, m, d) se je obrestovala glavnica 15.005,17 DE, da je narasla na 17.250,18 DE, če je relativna letna obrestna mera 7,55 %, kapitalizacija dnevna, anticipativno obrestovanje? Izvedite obrazec za izračun časa obrestovanja.

8.2.4 Ekvivalentna in povprečna obrestna mera

Opozorili bi še na nekaj posebnosti, ki se pojavljajo pri obrestnoobrestnem računu. Gre za področje primerjave obrestovalnih načinov naložb, kjer nas predvsem zanima, kakšna obrestna mera ustreza pripadajoči obrestni meri v drugem obrestovalnem načinu. Primerjali bi lahko obrestovanje naložb in preračunavali obrestne mere iz enega načina obrestovanja v drugi način tako, da bi ostal **donos naložbe enak**. Zanima nas primerjava **ekvivalentnih (enakovrednih) obrestnih mer dekurzivnega z anticipativnim načinom obrestovanja**. Obrestno mero izračunamo s pomočjo primerjave obrestovalnih faktorjev (prikažemo njihovo ekvivalenco).

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{100}{100 - \pi}$$

Iz izhodiščne enačbe lahko izpeljemo obrazec za dekurzivno obrestno mero p ali anticipativno obrestno mero π . Izvedli bomo le obrazec za dekurzivno obrestno mero p, če je čas podan v letih, za anticipativno pa prikazali le rezultat izpeljave.

Iz leve strani enačbe moramo odpraviti 1 tako, da 1 prenesemo preko enačaja na drugo stran, kjer dobi nasprotni predznak. V naslednjem koraku izpeljave desno stran enačbe razširimo na skupni imenovalac, ki je $100 - \pi$ in uredimo števec:

$$\frac{p}{100} = \frac{100}{100 - \pi} - 1 \quad \frac{p}{100} = \frac{100}{100 - \pi} - \frac{100 - \pi}{100 - \pi} \quad \frac{p}{100} = \frac{100 - 100 + \pi}{100 - \pi}$$

V zadnjem koraku odpravimo iz leve strani enačbe še imenovalac 100 tako, da enačbo na obeh straneh enačbe pomnožimo s 100 in dobimo:

$$p = \frac{100 \times \pi}{100 - \pi}$$



Ekvivalentno anticipativno obrestno mero dekurzivni obrestni meri bomo izračunali po obrazcu:

$$\pi = \frac{100 \times p}{100 + p}$$



Sami pa za vajo izpeljite obrazec za izračun anticipativne obrestne mere.

Če razmišljamo še naprej, lahko ugotovimo, da je čas obrestovanja lahko podan tudi v mesecih ali dnevih. Iz tabele 11 so razvidni obrazci za izračun ekvivalentnih obrestnim mer za različna časovna obdobja navadnega obrestovanja.

Razmišljamo lahko tudi tako, da primerjamo obrestno mero konformnega obrestovanja in obrestno mero navadnega obrestovanja (Čibej, 2004). Izziv za vas, vredno je poskusiti. Če ne gre, si lahko pomagate z učbenikom Čibej A. Poslovna matematika 2. del, 2004 (poglavje Obrestovanje naložb).

Tabela 11: Osnovni obrazci za izračun ekvivalentnih obrestnih mer

Označba časa	Dekurzivno obrestovanje	Anticipativno obrestovanje
leta (l)	$p = \frac{100 \times \pi}{100 - \pi}$	$\pi = \frac{100 \times p}{100 + p}$
meseci (m)	$p = \frac{1.200 \times \pi}{1.200 - \pi \times m}$	$\pi = \frac{1.200 \times p}{1.200 + p \times m}$
dnevi (d)	$p = \frac{36.500 \times \pi}{36.500 - \pi \times d}$	$\pi = \frac{36.500 \times p}{36.500 + p \times d}$



Katera anticipativna obrestna mera je ekvivalentna dekurzivni letni obrestni meri 7 %?

Analiza naloge:

$$p = 7\% \\ \pi = ?$$

$$\pi = \frac{100 \times p}{100 + p} = \frac{100 \times 7}{100 + 7} = 6,54 \%$$

Odgovor: Dekurzivni letni obrestni meri 7 % je ekvivalentna anticipativna letna obrestna mera 6,54 %.



Kakšna je pri 200 dnevnem kreditu dekurzivna obrestna mera, ki je ekvivalentna anticipativni letni obrestni meri 7 %?

Analiza naloge:

$$d = 200$$

$$\pi = 7 \%$$

$$p = ?$$

$$p = \frac{36.500 \times \pi}{36.500 - \pi \times d} = \frac{36.500 \times 7}{36.500 - 7 \cdot 200} = 7,28 \%$$

Odgovor: Ekvivalentna dekurzivna obrestna mera za 200 dnevni kredit je 7,28 %.

Iz rešenih primerov lahko ugotovimo, da je dekurzivna obrestna mera vedno višja od anticipativne obrestne mere, ne glede na to, za kakšen način obrestovanja gre.

Razmislimo še, kaj se dogaja z našim depozitom (naložbo, vlogo) v pogojih, ko se obrestna mera spreminja. Izračun končne vrednosti glavnice moramo izračunati postopoma za vsako obdobje, ko se je glavnica spremenila. To že znamo. Imamo pa tudi drugo možnost, da izračunamo **povprečno obrestno mero**, ki bo v proučevanem obdobju ustvarila enako končno glavnico.

Izhajamo iz osnovne enačbe: $G_n = G_0 \times r_1^{n_1} \times r_2^{n_2} \times \dots \times r_k^{n_k}$ ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$)

Osnovno enačbo lahko zapišemo tudi v obliki: $G_n = G_0 \times (\bar{r})^n$

Zanima nas povprečna obrestna mera, ki je ne moremo izračunati kot ponderirano aritmetično sredino, temveč s pomočjo obrestovalnega faktorja po naslednjem postopku:

$$(\bar{r})^n = r_1^{n_1} \times r_2^{n_2} \times \dots \times r_k^{n_k}$$

Odpravimo n-to potenco obrestovalnega faktorja z obratno funkcijo potenciranja (korenjenjem):

$$\bar{r} = \sqrt[n]{r_1^{n_1} \times r_2^{n_2} \times \dots \times r_k^{n_k}} \quad (n = n_1 + n_2 + \dots + n_k)$$

Iz obrestovalnega faktorja znamo izvesti obrestno mero, saj vemo, da je $r = 1 + p/100$. Zato dobimo končni obrazec za izračun povprečne obrestne mere:

$$\bar{p} = 100 \left(\sqrt[n]{r_1^{n_1} \times r_2^{n_2} \times \dots \times r_k^{n_k}} - 1 \right)$$

$$(n = n_1 + n_2 + \dots + n_k)$$



Opozorimo, da so lahko časovna obdobja proučevanega primera podana v letih, mesecih ali dnevih, zato to upoštevamo pri nastavitvi obrazca.



Izračunajmo povprečno obrestno mero za glavnico, ki se je obrestovala najprej 30 dni po 7 % p.a., nato 31 dni po obrestni meri 11,5 % p.a. in še 25 dni po obrestni meri 5 % p.a.

Analiza naloge:

$$\begin{array}{ll} d_1 = 30 & p_1 = 7 \% \text{ p.a.} \\ d_2 = 31 & p_2 = 11,5 \% \text{ p.a.} \\ d_3 = 25 & p_3 = 5 \% \text{ p.a.} \\ \hline \bar{p} = ? & \end{array}$$

$$\bar{p} = 100 \left(\sqrt[n]{r_1^{n_1} \times r_2^{n_2} \times \dots \times r_k^{n_k}} - 1 \right) \quad n = 30 + 31 + 25 = 86$$

$$\bar{p} = 100 \left(\sqrt[86]{1,07^{30} \cdot 1,115^{31} \cdot 1,05^{25}} - 1 \right) = 8,01 \%$$

Odgovor: Povprečna obrestna mera za glavnico znaša 8,01 %.



Izračunajmo povprečno obrestno mero za glavnico, ki se je obrestovala najprej 2 meseca po 12 % p.a., 1 mesec po obrestni meri 4,5 % p.a., 3 mesece po 15 % p.a. in nato 5 mesecev po obrestni meri 6,5 % p.a.

Analiza naloge:

$$\begin{array}{ll} m_1 = 2 & p_1 = 12 \% \text{ p.a.} \\ m_2 = 1 & p_2 = 4,5 \% \text{ p.a.} \\ m_3 = 3 & p_3 = 15 \% \text{ p.a.} \\ m_4 = 5 & p_4 = 6,5 \% \text{ p.a.} \\ \hline \bar{p} = ? & \end{array}$$

$$\bar{p} = 100 \left(\sqrt[n]{r_1^{n_1} \times r_2^{n_2} \times \dots \times r_k^{n_k}} - 1 \right) \quad n = 2 + 1 + 3 + 5 = 11$$

$$\bar{p} = 100 \left(\sqrt[11]{1,12^2 \cdot 1,045^1 \cdot 1,15^3 \cdot 1,065^5} - 1 \right) = 9,57 \%$$

Odgovor: Povprečna obrestna mera za glavnico znaša 9,57 %.



8.2.4 Rešite naslednje naloge.

a) Kakšna anticipativna ekvivalentna letna obrestna mera pripada dekurzivni letni obrestni meri 8,15 %? Izvedite obrazec za izračun ekvivalentne obrestne mere.

b) Kakšna dekurzivna ekvivalentna šestmesečna obrestna mera pripada anticipativni šestmesečni obrestni meri 6,25 %?

c) Izračunajte povprečno obrestno mero za glavnico, ki se je obrestovala najprej 2 leti po 7,55 % p.a., 1 leto po obrestni meri 4,05 % p.a., 3 leta po 6,67 % p.a. in nato 5 let po obrestni meri 6,53 % p.a.

**UTRJEMO, RAZMIŠLJAMO, RAZISKUJEMO, VADIMO**

1. Pojasnite osnovne količine obrestnega računa. Narišite graf odvisnosti za navadni in obrestno obrestni račun.
2. Kakšne vrste obrestnega računa poznate in kakšne načine obrestovanja? Utemeljite vaše znanje na primeru.
3. S pomočjo interneta raziščite pojme: SIOM, SITIBOR, EURIBOR, EONIA, LIBOR. Pomagate si lahko z internetnimi stranmi poslovnih bank ali Banke Slovenije. Zakaj mislite, da jih nismo posebej omenjali pri razlagi poglavja obrestni račun?
4. Pojasnite osnovno razliko med navadnim in obrestnoobrestnim računom.
5. Pojasnite, kakšne obrestne mere ločimo pri obrestnoobrestnem računu.
6. V čem vidite razliko obrestovanja pri pogostejši kapitalizaciji med relativno in konformno obrestno mero?
7. Na primeru predstavite pomen ekvivalentne obrestne mere in uporabno vrednost povprečne obrestne mere.
8. Za utrjevanje znanja rešite še naloge šestega poglavja Zbirke vaj iz poslovne matematike (Domjan 2008, 20–24).

V poglavju obrestni račun, smo se naučili izračunavati obresti kot odškodnino za posojeni denar. Spoznali smo, da je pomembno, v kakšni vlogi nastopamo – ali denar posojamo (kreditodajalci) ali si denar izposojamo (kreditojemalci). Spoznali smo, da je obrestnoobrestni račun za nas bolj donosen, če smo kreditodajalci, ali drag, če smo kreditojemalci. Ob tem igra pomembno vlogo še način obrestovanja – anticipativen ali dekurziven, kapitalizacija in seveda čas obrestovanja.



9 HRANILNE IN PERIODIČNE VLOGE

V poglavju bomo spoznali različne načine obračunavanja obresti kontokorenta, razliko med progresivno ter stopnjevalno metodo obračuna obresti. Posebne vrsta varčevanja, ki jih bomo še omenjali, so tudi periodični denarni tokovi ter rente.

9 HRANILNE IN PERIODIČNE VLOGE

Ste že kdaj pomislili, kako vam obračunavajo obresti na vašem osebnem računu? Ali veste, kdaj vam pripišejo obresti in v kakšni višini? V tem poglavju boste spoznali dva načina izračuna obresti za denarne vloge (nakazila, vplačila) in dvige (izplačila). Ali poznate pojme rentno varčevanje, štipendijsko varčevanje, dodatno pokojninsko zavarovanje? Ali je to tisto, kar nam ponujajo banke in zavarovalnice? Zakaj so rentna varčevanja tako dolgoročno naravnana? Na vsa vprašanja bomo dobili odgovore v tem poglavju, kjer se bomo naučili izračunati višino obresti za kapital, ki ga imamo naloženega pri poslovni banki na osebnem računu različnih oblik ali pri zavarovalni družbi. Prikazali bomo nekaj načinov varčevanja s pomočjo periodičnih denarnih tokov.

Banke so po Zakonu o bančništvu banke in hranilnice, ki vodijo transakcijske račune strank. Bančna stranka (pravna oseba, zasebnik, fizična oseba – posameznik) ima pri banki račun, na katerem se zapisujejo vse vloge in vplačila nanj ter vsi dvigi in izplačila iz njega (www.bsi.si/podatki/tec-bs.asp). Vrste računov, ki jih vodijo banke, so:

- **transakcijski računi** – denarni računi, ki so namenjeni tekočemu poslovanju z vlogami, dvigi ter nakazilom z računa tretjim osebam, skratka vsem tekočim transakcijam. Imetje na transakcijskem računu ni namenjeno izključno varčevanju, zato se praviloma ne obrestuje, oziroma se obrestuje simbolično (do 1 %). V bistvu so transakcijski računi vloge na vpogled in jih je lahko več vrst (navadni osebni račun, osebni račun s knjižico in podobno). Transakcijski račun je zamenjava izraza za prejšnje »tekoče račune« ali »žiro račune«.
- **posebni računi** – računi, ki morajo biti odprti, ko neka pravna ali fizična oseba opravlja posle za račun drugih oseb, sredstva pa so ločena od sredstev na transakcijskem računu osebe, ki te posle opravlja.
- **varčevalni računi** – so namenjeni varčevanju denarnih sredstev in ne tekočemu izvajanju plačil
- **vezane vloge** – del sredstev stranka iz svojega računa (transakcijskega, varčevalnega ali drugega) zaupa banki kot vezano vlogo v zameno za plačilo višjih obresti, kot jih prejema za sredstva na tem računu. V ta namen se podpiše pogodba. Ob koncu obdobja vezave banka ta vezana sredstva (povečana za obresti) sprosti oziroma jih izplača stranki, kar je odvisno od dogovora v pogodbi.

9.1 VLOGE IN DVIGI

Finančni račun, odprt pri poslovni banki, imenujemo kontokorent. 30. junija 2003 smo v Sloveniji zamenjali tekoče račune, žiro račune, devizne račune in hranilno knjižico z **osebnimi računi** (transakcijskimi računi). Prikazali bomo primer izračuna stanja na osebnem računu. Preden se lotimo prikaza, omenimo, da spada osebni račun v skupino računov, ki lahko omogočajo imetniku računa tudi **varčevanje**. Promet v dobro prikazuje pozitivno stanje na računu (**vplačila**), promet v breme (**dvigi** oziroma **izplačila**) pa zmanjševanje pozitivnega stanja. Če se zgodi, da so dvigi večji od vplačil, preidemo v tako imenovani **limit** (dovoljeno negativno stanje, ki ga banka imenuje kreditni limit in ga določa glede na prilive komitenta). Za limit (negativno stanje denarnih sredstev) plačujemo obresti (približno 12 % aktivna obrestna mera), ki so višje od obresti pozitivnega stanja (od 0 do 1 % pasivna obrestna mera). Obrestno mero za pozitivna in negativna stanja na osebnem računu določa vsaka banka posebej, kar omogoča njihovo konkurenčnost. Banke za vodenje osebnih računov obračunavajo tudi stroške vodenja računov, v zadnjem času pa tudi provizijo za poslovanje

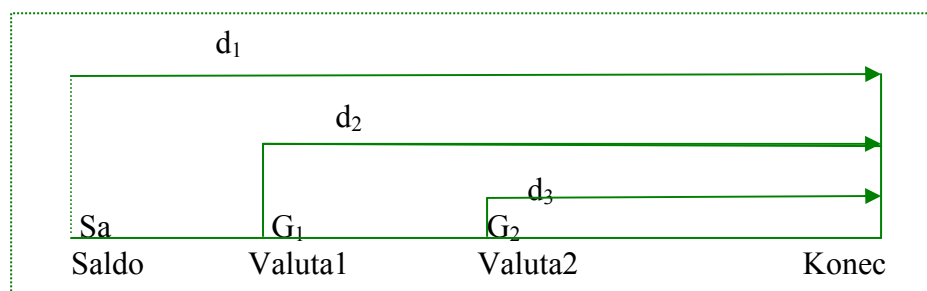
preko trajnih nalogov in bankomatov. Za izračun obresti denarnih vlog uporabljajo banke navadni obrestni račun.

Izračune obresti za vloge in dvige lahko banke izračunavajo po dveh metodah:

- **progresivna metoda** – pri tej metodi posebej obračunavamo obresti od vlog in posebej od dvigov za čas od nastanka poslovnega dogodka do dneva, ko saldiramo stanje na osebnem računu (pripišemo obresti). Skupne letne obresti so razlika med obrestmi zneskov vlog in zneskov dvigov in se h glavnici prištejejo ob koncu leta.
- **stopnjevalna metoda** – omogoča sprotno izračunavanje obresti, kjer stanje (saldo) obrestujemo za čas od ene do druge spremembe salda oziroma transakcije. Seštevek obračunanih obresti ob koncu obračunskega obdobja nam da skupne letne obresti.

9.1.1 Progresivna metoda

Po progresivni (nemški) metodi izračunavamo obresti za vsako vlogo in dvig posebej od dospelka (valute) do konca obračunskega obdobja (običajno do konca leta). Pri tem so obresti za vloge pozitivne, za dvige pa negativne. Saldo obresti ob koncu obračunskega obdobja je razlika med pozitivnimi in negativnimi obrestmi.



Slika 13: Shematski prikaz progresivne metode

V nadaljevanju prikazujemo primer izračuna po progresivni metodi, ko je letna obrestna mera enojna. Opozorimo tudi na to, da je leto 2008 prestopno.



Izračunajmo obresti in stanje na računu ob koncu leta 2008, če je obrestna mera za pozitivne obresti 0,22 % in smo na osebnem računu imeli naslednji promet: saldo 31.12.2007 je 1.240,00 DE, nakazilo 18.2.2008 je 4.000,00 DE, dvig 25.4.2008 je 3.500,00 DE, polog 26.7.2008 je 738,25 DE, dvig 5.11.2008 je 2.400,00 DE in nakazilo 27.11.2008 je 1.800,00 DE. Stroški vodenja računa so 1,96 DE, zaključevanje je letno (konec obračunskega obdobja je 31.12.2008).

Postopek reševanja naloge:

- Podatke vlog in dvigov vpišemo v kontokorent – pologe in nakazila kot promet v dobro, dvige in plačila kot promet v breme.
- Izračunamo dneve varčevanja in KOŠ.
- Ugotovimo saldo KOŠ-a.
- Izračunamo skupne obresti.
- Izračunamo končni saldo na koncu obračunskega obdobja.

Datum (valuta)	Promet		Stanje (saldo)	Dni	KOŠ		Saldo KOŠ
	Promet v dobro	Promet v breme			+	-	
31.12.07	1.240,00		1.240,00	366	4.538,40		4.538,40
18.2.08	4.000,00		5.240,00	317	12.680,00		17.218,40
25.4.08		3.500,00	1.750,00	250		8.750,00	8.468,40
26.7.08	738,25		2.478,25	158	1.166,44		9.634,84
5.11.08		2.400,00	78,25	56		1.344,00	8.290,84
27.11.08	1.800,00		1.878,25	34	612,00		8.902,84
Obresti:	5,35		1.883,60	Skupaj:	18.996,84	10.094,00	
Stroški:		1,96	1.881,64				
Saldo:			1.881,64				

Izračun dni:

$$d_1 = 31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 366$$

$$d_2 = 11 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 317$$

$$d_3 = 5 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 250$$

$$d_4 = 5 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 158$$

$$d_5 = 25 + 31 = 56$$

$$d_6 = 3 + 31 = 34$$

Pri izračunu skupnih obresti si lahko pomagamo s krajšanimi obrestnimi števili (KOŠ). KOŠ izračunamo po obrazcu:

$$KOŠ = \frac{G \times d}{100}$$



Obresti po tej metodi so natančne samo pri enojni obrestni meri (za pozitivno stanje). Saldo obresti izračunamo po obrazcu, ki ga izvedemo po naslednjem postopku:

$$Sa_o = \sum o_K - \sum o_D = \frac{p}{365} \times \sum KOŠ_K - \frac{p}{365} \times \sum KOŠ_D = \frac{p}{365} (\sum KOŠ_K - \sum KOŠ_D)$$

$$Sa_o = \frac{p \times \sum KOŠ}{365}$$



Izračun skupnih obresti:

$$Sa_o = \frac{p \times \sum KOŠ}{366} = \frac{0,22 \times 8.902,84}{366} = 5,35 \text{ DE}$$

Odgovor: Banka nam bo ob navedenih pogojih pripisala 5,35 DE ob koncu obračunskega obdobja, naše stanje na osebnem računu pa znaša 1.881,64 DE.

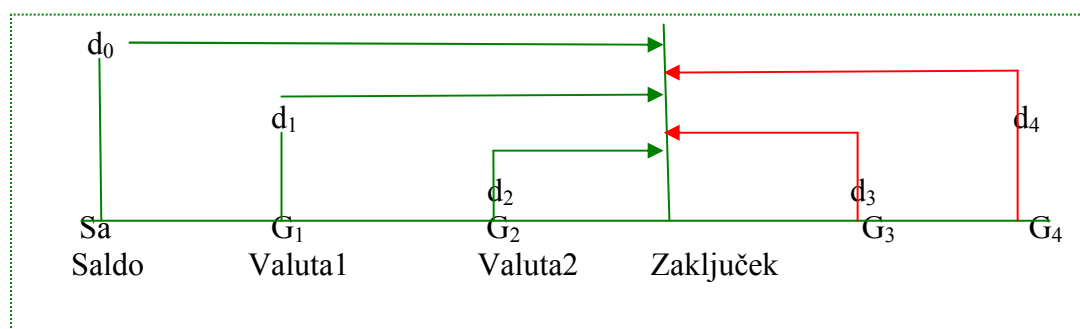
Drug primer izračuna obresti po progresivni metodi bo prikazan na istem primeru s sprotim izračunom obresti brez uporabe KOŠ. Obresti računamo sproti za vsako postavko, ob koncu seštejemo vse obresti in razliko obresti za vloge ter dvige prištejemo k skupnemu saldu.



Izračunajmo obresti in stanje na računu ob koncu leta 2008, če je obrestna mera za pozitivne obresti 0,22 % in smo na osebnem računu imeli naslednji promet: saldo 31.12.2007 je 1.240,00 DE, nakazilo 18.2.2008 je 4.000,00 DE, dvig 25.4.2008 je 3.500,00 DE, polog 26.7.2008 je 738,25 DE, dvig 5.11.2008 je 2.400,00 DE in nakazilo 27.11.2008 je 1.800,00 DE. Stroški vodenja računa so 1,96 DE, zaključevanje je letno (konec obračunskega obdobja je 31.12.2008).

Datum (valuta)	Dnevi	Transakcija	Vloga	Dvig	Stanje	Obresti za vloge	Obresti za dvige
31.12.07	366	saldo	1.240,00		1.240,00	2,73	
18.2.08	317	nakazilo	4.000,00		5.240,00	7,62	
25.4.08	250	dvig		3.500,00	1.750,00		5,26
26.7.08	158	polog	738,25		2.478,25	0,70	
5.11.08	56	dvig		2.400,00	78,25		0,81
27.11.08	34	nakazilo	1.800,00		1.878,25	0,37	
		obresti	5,35		1.893,60	11,42	6,07
		stroški		1,96	1.881,64		
1.1.09		saldo			1.881,64		

Zaključevanje kontokorenta je lahko tudi med letom (običajno ob koncu leta), kar pomeni, da ugotovljamo trenutno stanje na določen dan. V tem primeru vsako postavko, katere valuta je pred začetkom zaključka kontokorenta naobrestimo do konca obračunskega obdobja, ostale nedospele postavke pa razobrestimo (diskontiramo) na isti datum. Pri nedospelih postavkah bomo dneve in KOŠ pisali na ustrezno stran z negativnim predznakom.



Slika 14: Shematski prikaz progresivne metode z razobrestovanjem

Poglejmo še takšen primer.



Izračunajmo obresti in stanje na računu ob koncu leta 2008, če je obrestna mera za pozitivne obresti 0,22 % in smo na osebnem računu imeli naslednji promet: saldo 31.12.2007 je 1.240,00 DE, nakazilo 18.2.2008 je 4.000,00 DE, dvig 25.4.2008 je 3.500,00 DE, polog 26.7.2008 je 738,25 DE, dvig 5.10.2008 je 2.400,00 DE in 27.12.2008 je 1.800,00 DE. Stroški vodenja računa so 1,96 DE, konec obračunskega obdobja je 30. 9. 2008.

Datum (valuta)	Promet		Stanje (saldo)	Dni	KOŠ		Saldo KOŠ
	Promet v dobro	Promet v breme			+	-	
31.12. 07	1.240,00		1.240,00	274	3.397,60		3.397,60
18.2.08	4.000,00		5.240,00	225	9.000,00		12.397,60
25.4.08		3.500,00	1.750,00	158		5.530,00	6.867,60
26.7.08	738,25		2.478,25	66	487,25		7.354,85
5.10.08		2.400,00	78,25	-5		-120,00	7.474,85
27.12.08	1.800,00		1.878,25	-88	-1.584,00		5.890,85
Obresti:	3,54		1.881,79	Skupaj:	11.300,85	5.410,00	
Stroški:		1,96	1.879,83				
Saldo:			1.879,83				

Izračun dni:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 31+29+31+30+31+30+31+31+30 &= 274 \\
 d_2 &= 11+31+30+31+30+31+31+30 &= 225 \\
 d_3 &= 5+31+30+31+31+30 &= 158 \\
 d_4 &= 5+31+30 &= 66 \\
 d_5 &= -5 &= -5 \\
 d_6 &= -31-30-27 &= -88
 \end{aligned}$$

$$\text{Izračun skupnih obresti: } Sa_o = \frac{p \times \sum KOŠ}{366} = \frac{0,22 \times 5.890,85}{366} = 3,54 \text{ DE}$$

Odgovor: Banka nam bo ob navedenih pogojih pripisala 3,54 DE ob koncu obračunskega obdobja. Naše stanje na osebnem računu pa znaša 1.879,83 DE.



9.1.1 Rešite naslednjo nalogo.

Izračunajte isti primer naloge brez pomoči KOŠ.

9.1.2 Stopnjevalna metoda

Stopnjevalna (angleška) metoda je metoda, pri kateri obrestujemo trenutni saldo od postavke do naslednje postavke. Ker obrestujemo vedno saldo, so obresti računanane po tej metodi natančne tudi takrat, če je obrestna mera dvojna, saldo pa negativen. Izračunati je potrebno čas v dnevih med eno in drugo transakcijo oziroma spremembo. Obresti so izračunane za stanje v zelenem trenutku.

V prvem primeru bomo prikazali izračun obresti s pomočjo KOŠ s sprotnim izračunom obresti, s podatki iste naloge kot pri progresivni metodi.



Izračunajmo obresti in stanje na računu ob koncu leta 2008, če je obrestna mera za pozitivne obresti 0,22 % in smo na osebnem računu imeli naslednji promet: saldo 31.12.2007 je 1.240,00 DE, nakazilo 18.2.2008 je 4.000,00 DE, dvig 25.4.2008 je 3.500,00 DE, plog 26.7.2008 je 738,25 DE, dvig 5.11.2008 je 2.400,00 DE in nakazilo 27.11.2008 je 1.800,00 DE. Stroški vodenja računa so 1,96 DE, zaključevanje je letno (konec obračunskega obdobja je 31.12.2008).

Datum (valuta)	Promet		Stanje (saldo)	Dni	KOŠ
	Promet dobro	Promet breme			
31.12.07	1.240,00		1.240,00	49	607,60
18.2.08	4.000,00		5.240,00	67	3.510,80
25.4.08		3.500,00	1.750,00	92	1.610,00
26.7.08	738,25		2.478,25	102	2.527,82
5.11.08		2.400,00	78,25	22	17,22
27.11.08	1.800,00		1.878,25	34	638,61
Obresti:	5,36		1.883,61	Skupaj:	8.912,05
Stroški:		1,96	1.881,65		
Saldo:			1.881,65		

Izračun skupnih obresti:

$$Sa_o = \frac{p \times \sum KOŠ}{366} = \frac{0,22 \times 8.912,05}{366} = 5,36 \text{ DE}$$

V drugem primeru bomo prikazali izračun s pomočjo stopnjevalne metode s sprotnim izračunom obresti s podatki iste naloge.



Izračunajmo obresti in stanje na računu ob koncu leta 2008, če je obrestna mera za pozitivne obresti 0,22 % in smo na osebnem računu imeli naslednji promet: saldo 31.12.2007 je 1.240,00 DE, nakazilo 18.2.2008 je 4.000,00 DE, dvig 25.4.2008 je 3.500,00 DE, polog 26.7.2008 je 738,25 DE, dvig 5.11.2008 je 2.400,00 DE in nakazilo 27.11.2008 je 1.800,00 DE. Stroški vodenja računa so 1,96 DE, zaključevanje je letno (konec obračunskega obdobja je 31.12.2008).

Datum (valuta)	Dnevi	Transakcija	Vloga	Dvig	Stanje	Obresti
31.12.07	49	saldo	1.240,00		1.240,00	0,37
18.2.08	67	nakazilo	4.000,00		5.240,00	2,11
25.4.08	92	dvig		3.500,00	1.750,00	0,97
26.7.08	102	polog	738,25		2.478,25	1,52
5.11.08	22	dvig		2.400,00	78,25	0,01
27.11.08	34	nakazilo	1.800,00		1.878,25	0,38
		obresti	5,36		1.883,61	5,36
		stroški		1,96	1.881,65	
		saldo 31.12.08			1.881,65	

Odgovor: Banka nam bo ob navedenih pogojih pripisala 5,36 DE ob koncu obračunskega obdobja, naše stanje na osebnem računu pa znaša 1.881,65 DE.

Iz navedenih prikazov lahko sklepamo, da sta obe metodi ekvivalentni, kajti pri izračunu po obeh metodah dobimo enak izračun stanja in obresti na računu.

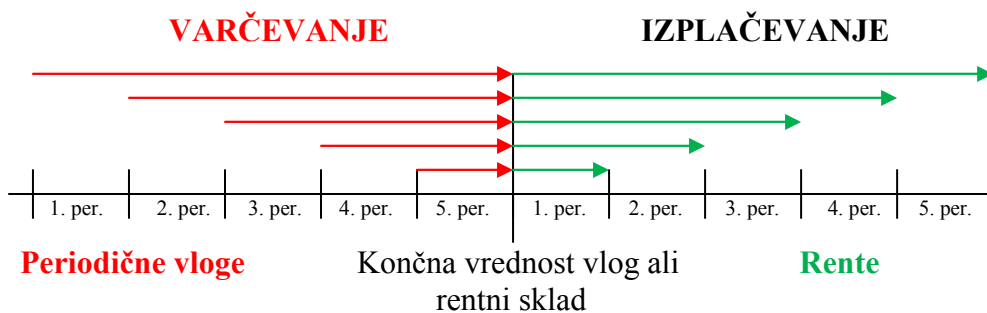


9.1.2 Rešite naslednje naloge.

- a) Na osebnem računu za mesec februar 2009 zasledimo naslednje stanje: prenos salda iz meseca januarja na dan 31. 1. 2009 v znesku 2.685,25 DE, dvig dne 5. 2. 2009 v znesku 2.000,00 DE, z dne 6. 2. 2009 nakazilo v znesku 1.320,42 DE, nakazilo dne 17. 2. 2009 v znesku 1.892,50 DE, nakazilo dne 23. 2. 2009 v znesku 1.700,00 DE, dvig gotovine 24. 2. 2009 v znesku 3.000,00 DE, dvig dne 27. 2. 2009 v znesku 1.490,66 DE. Naredite obračun prometa na računu po stopnjevalni metodi na dan 28. 2. 2009, če banka uporablja za pozitivna stanja na računu obrestno mero 0,20 % p.a.
- b) Na osebnem računu za leto 2009 zasledimo naslednje stanje: prenos salda iz meseca decembra na dan 31. 12. 2008 v znesku 1.250,15 DE, dvig dne 5. 2. 2009 v znesku 200,00 DE, z dne 6. 5. 2009 nakazilo v znesku 1.520,42 DE, nakazilo dne 7. 8. 2009 v znesku 252,50 DE, dvig dne 23. 9. 2009 v znesku 1.115,00 DE, polog gotovine 24. 11. 2009 v znesku 3.000,00 DE, dvig dne 28. 12. 2009 v znesku 2.560,68 DE. Naredite obračun prometa na računu po progresivni metodi na dan 31. 12. 2009, če banka uporablja za pozitivna stanja na računu obrestno mero 0,22 % p.a, stroški vodenja računa so 1,69 DE.

9.2 PERIODIČNI DENARNI TOKOVI IN RENTE

S pojmom periodični denarni tokovi razumemo **prilive** denarnih sredstev, ki dospevajo na nek račun v enakomernih nominalnih vrednostih v enakih časovnih periodah (obdobjih, intervalih), in **rente**, ki so periodična izplačila (odlivi) denarnih sredstev, ki se v enakih časovnih periodah in v enaki nominalni vrednosti črpajo iz denarnega sklada ter izplačujejo na naslov rentnega upravičenca. Zaradi lažjega razumevanja lahko prikažemo periodične denarne tokove na časovni premici.



Slika 15: Shematski prikaz rentnega varčevanja

Iz prikazane slike lahko razberemo, da so **periodične vloge** tisti del denarnih tokov, kjer varčujemo. Periodične vloge so nominalno enake in dospevajo v istih časovnih periodah. Čas ene periode je čas med dvema zaporednima vlogama oziroma dvema zaporednima izplačiloma rent. V nadaljevanju poglavja jih bomo označili z oznako **a**. Po končanem varčevanju se oblikuje končna vrednost periodičnih vlog, ki je istočasno osnova za izplačilo rent ali tako imenovani rentni sklad. Rente so nominalno med seboj enake.

Pri reševanju nalog moramo upoštevati naslednje:

- Pripravimo številsko premico, na kateri označimo opazovano obdobje. Oznako obdobja pišemo na sredino periode.
- Izberemo trenutek, na katerega preračunamo vse zneske.
- Upoštevamo ekonomsko načelo, da je vsota vseh vplačil enaka vsoti vseh izplačil.

- Vmesnih rezultatov ne zaokrožujemo, zaokrožimo le končni izračun.
- Upoštevamo način obrestovanja, ki je lahko dekurziven ali anticipativen, računano po navadnem ali obrestnoobrestnem računu, pri tem pa so obresti lahko izračunane po relativni ali konformni obrestni meri.
- Za reševanje nalog uporabljamo geometrijsko zaporedje, ki ima splošno obliko

$$vsota = \text{prvi člen} \times \frac{\text{količnik}^{\text{število členov}} - 1}{\text{količnik} - 1}$$

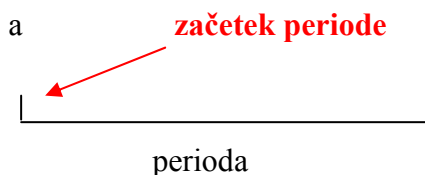


Prvi člen zaporedja je izpostavljen člen v geometrijski vrsti (Čibej, 2004, 95). Količnik zaporedja je razlika med dvema zaporednima členoma zaporedja, število členov pa je število vlog ali število členov odplačevanja posojila (število členov v oklepaju).

9.2.1 Periodične vloge

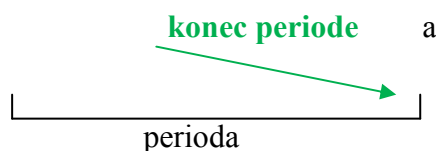
Periodične vloge so prilivi denarnih sredstev, ki dospevajo v enakih nominalnih vrednostih v enakih časovnih periodah. Vsaka perioda ima svoj začetek in svoj konec. Glede na to dejstvo ločimo:

- **prenumerandne vloge**, ki dospevajo na **začetku** periode.



Slika 16: Prenumerandna vloga

- **postnumerandne vloge**, ki dospevajo na **koncu** periode.

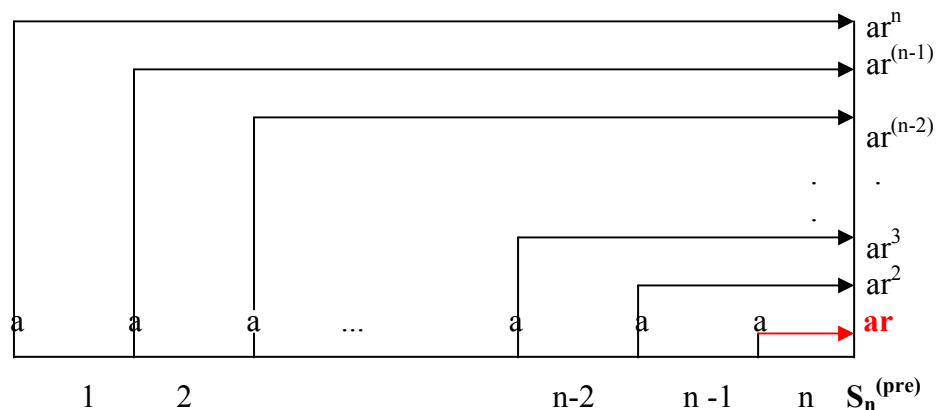


Slika 17: Postnumerandna vloga

V nadaljevanju bomo obravnavali izračun končne vrednosti prenumerandnih in postnumerandnih vlog.

9.2.1.1 Končna vrednost prenumerandnih vlog

Prenumerandne vloge dospevajo na **začetku** posameznega kapitalizacijskega obdobja (periode). Zanima nas skupna končna vrednost prenumerandnih vlog ($S_n^{(pre)}$) n enakih zneskov, ki označujejo vloge z a DE, obrestovane s p % na periodo. Da bi si lažje predstavljali zastavljeno nalogo, si pripravimo časovno premico.



Slika 18: Preračun prenumerandnih zneskov na konec obdobja

Vir: Čibej, 2004, 96

Spomnimo se pravila ekvivalence glavnice: $S_n^{(pre)} = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$ in ga uredimo v tako obliko, da bomo lahko zapisali obrazec za vsoto geometrijskega zaporedja.

$$S_n^{(pre)} = ar(1 + r + \dots + r^{n-2} + r^{n-1})$$

Po tako pripravljenem geometrijskem zaporedju lahko zapišemo obrazec za vsoto n členov, če je kapitalizacija celoletna, pri čemer predstavlja **prvi člen** vrednost **ar** , količnik **r** in število členov **n** .

$$S_n^{(pre)} = ar \frac{r^n - 1}{r - 1}$$



Kolikšna bo končna vrednost vlog po 20 letih pri obrestni meri 5 % p.a., če vsako leto na začetku leta vložimo 1.500,00 DE, kapitalizacija je letna?

Analiza:

$a = 1.500,00$ DE

$n = 20$

$p = 5\%$ $r = 1,05$

$m = 1$

$S_n^{(pre)} = ?$ $S_n^{(pre)} = ar + ar^2 + \dots + ar^{19} + ar^{20}$ $S_n^{(pre)} = ar(1 + r + r^2 + \dots + r^{18} + r^{19})$

$$S_n^{(pre)} = ar \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1.500,00 \times 1,05 \frac{1,05^{20} - 1}{1,05 - 1} = 52.078,88 \text{ DE}$$

Odgovor: Ob koncu 20 leta bomo imeli na računu 52.078,88 DE.

Pri periodičnih vlogah je kapitalizacija lahko tudi **pogostejša**. Zato je potrebno prilagoditi obrestno mero kapitalizacijskemu obdobju in načinu obračuna obresti. Obrestovalni faktor r (relativna obrestna mera) mora ustrezati kapitalizacijskemu obdobju, čas obrestovanja n pa šteje obdobja kapitalizacije in ne števila let ($n \times m$).



Nekdo je v banko, ki obrestuje vloge po 7,5 % obrestni meri, 10 let na začetku vsakega meseca vlagal 200,00 DE. Koliko je imel na svojem računu ob koncu desetega leta, če banka uporablja:

a. mesečno kapitalizacijo z relativno obrestno mero

b. mesečno kapitalizacijo s konformno obrestno mero?

a. Analiza:

$$a = 200,00 \text{ DE}$$

$$n = 10$$

$$p = 7,5 \% \quad r = 1 + p/100 \times m = 1 + 7,5/100 \times 12 = 1,00625$$

$$m = 12$$

$$S_n^{(\text{pre})} = ? \quad S_n^{(\text{pre})} = ar + ar^2 + \dots + ar^{119} + ar^{120} \quad S_n^{(\text{pre})} = ar(1 + r + r^2 + \dots + r^{118} + r^{119})$$

$$S_n^{(\text{pre})} = ar \frac{r^n - 1}{r - 1} = 200,00 \times 1,00625 \frac{1,00625^{120} - 1}{1,00625 - 1} = 35.808,48 \text{ DE}$$

Odgovor: Ob koncu 10 leta bo imel na svojem računu 35.808,48 DE.

b. Analiza:

$$a = 200,00 \text{ DE}$$

$$n = 10$$

$$p = 7,5 \% \quad r = \sqrt[12]{1,075} = 1,006044919$$

$$m = 12$$

$$S_n^{(\text{pre})} = ? \quad S_n^{(\text{pre})} = ar + ar^2 + \dots + ar^{119} + ar^{120} \quad S_n^{(\text{pre})} = ar(1 + r + r^2 + \dots + r^{118} + r^{119})$$

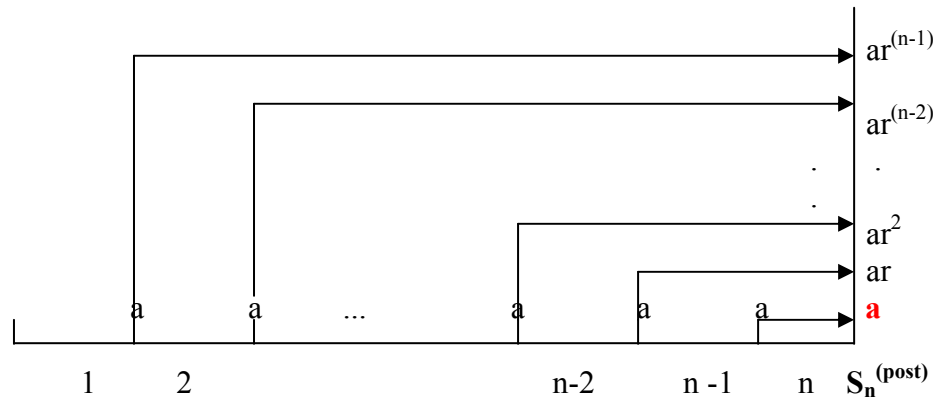
$$S_n^{(\text{pre})} = ar \frac{r^n - 1}{r - 1} = 200,00 \times 1,006044919 \frac{1,006044919^{120} - 1}{1,006044919 - 1} = 35.317,11 \text{ DE}$$

$$\text{ali } S_n^{(\text{pre})} = a \times \sqrt[n]{r} \frac{(\sqrt[n]{r})^n - 1}{\sqrt[n]{r} - 1} = 200,00 \times \sqrt[12]{1,075} \frac{(\sqrt[12]{1,075})^{10 \times 12} - 1}{\sqrt[12]{1,075} - 1} = 35.317,11 \text{ DE}$$

Odgovor: Ob koncu 10 leta bomo imeli na računu 35.317,11 DE.

9.2.1.2 Končna vrednost postnumerandnih vlog

Postnumerandne vloge dospevajo na **koncu** posameznega kapitalizacijskega obdobja (periode). Zanima nas skupna končna vrednost postnumerandnih vlog ($S_n^{(\text{post})}$), n enakih zneskov, ki označujejo vloge z a DE, obrestovanimi s p % na periodo. Grafični prikaz teh vlog nam prikazuje slika 17.



Slika 19: Preračun postnumerandnih zneskov na konec obdobja

Vir: Čibej, 2004, 96

Spomnimo se pravila ekvivalence glavnice: $S_n^{(post)} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ in ga uredimo: $S_n^{(post)} = a(1 + r + \dots + r^{n-2} + r^{n-1})$. Po tako pripravljenem geometrijskem zaporedju lahko zapišemo obrazec za vsoto n členov, če je kapitalizacija celoletna, pri čemer predstavlja prvi člen a , količnik r in število členov n .

$$S_n^{(post)} = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$$



Kolikšna bo končna vrednost vlog po 20 letih pri obrestni meri 5 % p.a., če vsako leto na koncu leta vložimo 1.500,00 DE, kapitalizacija je celoletna?

Analiza:

$$a = 1.500,00 \text{ DE}$$

$$n = 20$$

$$p = 5 \%$$

$$r = 1,05$$

$$S_n^{(post)} = a + ar + \dots + ar^{19} + ar^{20} \quad S_n^{(post)} = a(1 + r + r^2 \dots + r^{18} + r^{19})$$

$$m = 1$$

$$S_n^{(post)} = ?$$

$$S_n^{(post)} = a \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1.500,00 \times \frac{1,05^{20} - 1}{1,05 - 1} = 49.598,93 \text{ DE}$$

Odgovor: Ob koncu 20 leta bomo imeli na računu 49.598,93 DE.



Nekdo je v banko, ki obrestuje vloge po 7,5 % obrestni meri, 10 let na koncu vsakega meseca vlagal 200,00 DE. Koliko je imel na svojem računu ob koncu desetega leta, če banka uporablja:

a. mesečno kapitalizacijo z relativno obrestno mero

b. mesečno kapitalizacijo s konformno obrestno mero?

a. Analiza:

$$a = 200,00 \text{ DE}$$

$$n = 10$$

$$p = 7,5 \%$$

$$r = 1 + p/100 \times m = 1 + 7,5/100 \times 12 = 1,00625$$

$$m = 12$$

$$S_n^{(post)} = ?$$

$$S_n^{(post)} = a + ar + \dots + ar^{118} + ar^{119}$$

$$S_n^{(post)} = a(1 + r + r^2 \dots + r^{118} + r^{119})$$

$$S_n^{(\text{post})} = a \frac{r^n - 1}{r - 1} = 200,00 \times \frac{1,00625^{120} - 1}{1,00625 - 1} = 35.586,07 \text{ DE}$$

Odgovor: Ob koncu 10 leta bomo imeli na računu 355.860,68 DE.

b. Analiza:

$a = 200,00 \text{ DE}$

$n = 10$

$p = 7,5 \%$ $r = \sqrt[12]{1,075} = 1,006044919$

$\frac{m}{n} = \frac{12}{10}$

$S_n^{(\text{post})} = ?$

$$S_n^{(\text{post})} = a + ar + \dots + ar^{118} + ar^{119} \quad S_n^{(\text{post})} = a(1 + r + r^2 + \dots + r^{118} + r^{119})$$

$$S_n^{(\text{post})} = a \frac{r^n - 1}{r - 1} = 200,00 \times \frac{1,006044919^{120} - 1}{1,006044919 - 1} = 35.104,91 \text{ DE}$$

Odgovor: Ob koncu 10 leta bomo imeli na računu 35.104,91 DE.

9.2.2 Periodična izplačila

Rente so zrcalna slika periodičnih vlog. Rente so **periodična izplačila** (odlivi) denarnih sredstev, ki se v enakih časovnih intervalih in v enaki nominalni vrednosti **črpajo iz rentnega sklada**. Začetna vrednost **rentnega sklada** je **enaka** končni vrednosti **periodični vlog**. Rente vsebujejo torej nominalno vrednost vključno s pripadajočimi obrestmi, ki so odvisne od časa obrestovanja in obrestne mere. Vsaka izplačana renta vsebuje osnovno rento in pripadajoče obresti, ki se na ostanek rentnega sklada obrestujejo za čas od rente do rente. Če razmislimo, lahko omenjeni izračun uporabljamo tudi, če nas zanima začetna vrednost prenumerandnih ali postnumerandnih vlog bodočih investicij.

Rente delimo po dveh kriterijih:

➤ glede na **trajanje izplačevanja**:

- končne rente** – pri katerih je čas izplačevanja (število let) natančno določen, zato se denarni sklad z izplačilom zadnje rente izprazni
- večne rente** – denarni sklad se ohranja, izplačujejo se le obresti rentnega sklada. Čas izplačevanja je nedoločen in neodvisen od denarnega sklada.

➤ glede na **začetek izplačevanja**:

- neposredne rente** – izplačevanje rent se začne takoj (neposredno) po oblikovanju denarnega (rentnega) sklada
- odložene rente** – izplačevanje rent se prične po določenem (dogovorjenem) času (odlogu) po oblikovanju denarnega (rentnega) sklada.

9.2.2.1 Začetna vrednost prenumerandnih vlog

Današnja vrednost nekega zneska, ki dospe v prihodnosti, je enaka njegovi vrednosti v trenutku dospelja, primerjani s potenco obrestovalnega faktorja, ki označuje kapitalizacijska obdobja od danes do valute tega zneska. Če želimo izračunati **začetno vrednost** ($S_0^{(pre)}$) predvidenega denarnega toka, moramo zneske razobrestiti, vloge pa se bodo izplačevale na **začetku** kapitalizacijskega obdobja.

$$S_0^{(pre)} = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \dots + \frac{a}{r^{n-1}} \quad S_0^{(pre)} = \frac{a}{r^{n-1}} (1 + r + \dots + r^{n-2} + r^{n-1})$$

Po tako pripravljenem geometrijskem zaporedju lahko zapišemo obrazec za vsoto n členov, če je kapitalizacija celoletna, pri čemer predstavlja prvi člen a/r^{n-1} , količnik r in število členov n.

$$S_0^{(pre)} = \frac{a}{r^{n-1}} \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$



Kolikšna bo sedanja skupna vrednost desetih letnih prenumerandnih zneskov po 700,00 DE, če upoštevamo letno obrestno mero 5 % ob celoletni kapitalizaciji?

Analiza:

$a = 700,00$ DE

$n = 10$

$p = 5\%$ $r = 1,05$

$m = 1$

$S_0^{(pre)} = ?$

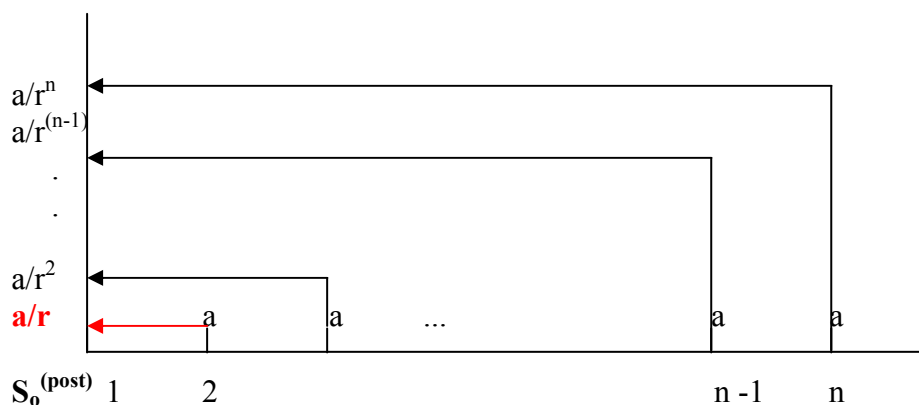
$$S_0^{(pre)} = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \dots + \frac{a}{r^9} \quad S_0^{(pre)} = \frac{a}{r^9} (1 + r + r^2 + \dots + r^9)$$

$$S_0^{(pre)} = \frac{a}{r^{n-1}} \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{700,00}{1,05^9} \times \frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1} = 5.675,48 \text{ DE}$$

Odgovor: Sedanja vrednost desetih letnih vlog, vloženih na začetku leta je 5.675,48 DE.

9.2.2.2 Začetna vrednost postnumerandnih vlog

Postnumerandne vloge dospevajo na **koncu** posameznega kapitalizacijskega obdobja (periode). Zanima nas začetna vrednost postnumerandnih vlog ($S_0^{(post)}$) **n** enakih zneskov, ki označujejo vloge z **a** DE in se obrestujejo po **p** % na periodo. Časovno premico za izračun predstavlja slika 18.



Slika 20: Preračun postnumerandnih vlog na začetek obdobja
Vir: Čibej, 2004, 96

Zapišimo geometrijsko zaporedje in ga uredimo v obliko za pripravo končnega obrazca:

$$S_0^{(post)} = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \dots + \frac{a}{r^{n-1}} + \frac{a}{r^n} \quad S_0^{(post)} = \frac{a}{r^n} (1 + r + \dots + r^{n-1})$$

Po tako pripravljenem geometrijskem zaporedju lahko zapišemo obrazec za vsoto n členov, če je kapitalizacija celoletna, pri čemer predstavlja prvi člen a/r^n , količnik r in število členov n .



$$S_0^{(post)} = \frac{a}{r^n} \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$



Koliko je potrebno danes vložiti v banko, da bomo po 20 letih pri obrestni meri 5 % p.a., vsako leto na koncu leta prejeli 1.500,00 DE in je kapitalizacija celoletna?

Analiza:

$a = 1.500,00$ DE

$n = 20$

$p = 5\%$ $r = 1,05$

$m = 1$

$$S_0^{(post)} = ? \quad S_n^{(post)} = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \dots + \frac{a}{r^{19}} + \frac{a}{r^{20}} \quad S_0^{(post)} = \frac{a}{r^{20}} (1 + r + r^2 + \dots + r^{18} + r^{19})$$

$$S_0^{(post)} = \frac{a}{r^n} \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{1.500,00}{1,05^{20}} \times \frac{1,05^{20} - 1}{1,05 - 1} = 18.693,32 \text{ DE}$$

Odgovor: Da bomo 20 let ob koncu vsakega leta prejeli 1.500,00 DE, moramo danes vložiti v banko 18.693,32 DE.

9.2.3 Rentno varčevanje

Vedno več zavarovanj in varčevanj ima obliko rentnega varčevanja, zato je smiselno, da se seznanimo tudi s tem področjem. Prikazali bomo nekaj primerov izračuna neposrednih in odloženih rent.



Koliko moramo vložiti v banko, da bomo lahko tri leta od danes naprej na koncu vsakega meseca (postnumerandno) prejeli štipendijo po 100,00 DE, če je dogovorjena obrestna mera 5 % letno, med letom pa se uporablja navadni obrestni račun?

Analiza:

$$a = 100,00 \text{ DE}$$

$$n = 3$$

$$p = 5 \% \quad r = 1,05$$

$$m = \text{od januarja do decembra } (11+10+9+\dots+2+1=66)$$

$$A = ?$$

$$x = ?$$

Decembrska vloga se ne obrestuje, ker vloge dospevajo postnumerandno:

$$A = a + a + \frac{a \times p \times 11}{1.200} + a + \frac{a \times p \times 10}{1.200} + \dots + a + \frac{a \times p \times 1}{1.200}$$

$$A = 12a + \frac{a \times p \times 66}{1.200} \quad A = \frac{a(14.400 + 66 \times p)}{1200}$$

S tem smo določili vloge enega leta. Ker se rente izplačujejo tri leta, moramo izračunani letni faktor prilagoditi obdobju treh let:

$$S_3 = A \times \frac{r^3 - 1}{r - 1} = \frac{a(14.400 + 66 \times p)}{1.200} \times \frac{r^3 - 1}{r - 1}$$

Upoštevamo še načelo ekvivalence glavnice:

$$x \times r^3 = \frac{a(14.400 + 66 \times p)}{1.200} \times \frac{r^3 - 1}{r - 1}$$

Izrazimo iskano neznanko x:

$$x = \frac{a(14.400 + 66 \times p)}{1.200} \times \frac{r^3 - 1}{r^3(r - 1)}$$

$$x = \frac{100,00(14.400 + 66 \times 5)}{1.200} \times \frac{1,05^3 - 1}{1,05^3(1,05 - 1)} = 3.342,79 \text{ DE}$$

Odgovor: Da bi lahko prejeli željeno rento tri leta na koncu vsakega meseca, moramo danes vložiti v banko 3.342,79 DE.



Koliko moramo danes vložiti v banko, da bomo lahko čez tri leta začeli prejemati 5 let trajajočo postnumerandno rento v višini 100,00 DE mesečno, če je obrestna mera 5 %, konformni način obračuna obresti in mesečna kapitalizacija?

Analiza:

$$a = 100,00 \text{ DE}$$

$$n = 3 + 5$$

$$p = 5 \% \quad r = \sqrt[12]{1,05} = 1,004074124$$

$$\underline{m = 12}$$

$$x = ?$$

Vlogo x preračunamo na začetni termin z odlogom izplačevanja 3 leta ($3 \times 12 = 36$) in s časom izplačevanja 5 let ($3 + 5 = 8 \times 12 = 96$)

$$\frac{a}{r^{37}} + \frac{a}{r^{38}} + \dots + \frac{a}{r^{96}} = \frac{a}{r^{96}} \times \frac{r^{60} - 1}{r - 1}$$

$$x = \frac{100,00}{1,004074124^{96}} \cdot \frac{1,004074124^{60} - 1}{1,004074124 - 1} = 4.589,90 \text{ DE}$$

Odgovor: Če bi želeli prejemati tri leta odloženo rento za dobo izplačevanja petih let, bi morali danes vložiti v banko 4.589,90 DE.

Če ne želimo, da bi bili začetni pologi visoki, je bolje, da rentno varčujemo s postopnim polnjenjem denarnega sklada in s kasnejšim postopnim praznjenjem le-tega.



Kakšna bo mesečna renta, ki traja tri leta in se prvič izplača eno leto po zadnji vlogi petletnega varčevanja s pologi 2.000,00 DE (postnumerandno), če je obrestna mera 5 % letno, konformni obračun, kapitalizacija mesečna?

Analiza:

$$a = 2.000,00 \text{ DE}$$

$$n = 3 + 5$$

$$p = 5 \% \quad r = \sqrt[12]{1,05} = 1,004074124$$

$$\underline{m = 12}$$

$$x = ?$$

Vloge preračunamo na trenutek konca varčevanja ($3 \times 12 = 36$) in to izenačimo z izplačili rent (enoletni odlog ($36 + 11 = 47$) + izplačilo 5 let ($5 \times 12 - 1 = 106$)). Tako dobimo enačbo:

$$x + xr + \dots + xr^{35} = ar^{47} + ar^{48} + \dots + ar^{106}$$

$$x \times \frac{r^{36} - 1}{r - 1} = ar^{47} \times \frac{r^{60} - 1}{r - 1}$$

$$x = \frac{ar^{47} (r^{60} - 1)}{r^{36} - 1} = \frac{2.000,00 \times \left(\sqrt[12]{1,05}\right)^{47} \left(\left(\sqrt[12]{1,05}\right)^{60} - 1\right)}{\left(\sqrt[12]{1,05}\right)^{36} - 1} = 4.243,73 \text{ DE}$$

Odgovor: Mesečna renta, ki jo bomo prejemali 3 leta, bo v znesku 4.243,73 DE.



9.2 Rešite naslednje naloge.

- a) Nekdo je v banko, ki obrestuje vloge po 7,5 % obrestni meri, 5 let na začetku vsakega meseca vlagal 200,00 DE. Koliko je imel na svojem računu ob koncu petega leta, če banka uporablja:

- mesečno kapitalizacijo z relativno obrestno mero
 - mesečno kapitalizacijo s konformno obrestno mero?
- b) Kolikšna bo končna vrednost vlog po sedmih letih pri obrestni meri 3,55 % p.a., če vsako leto na koncu leta vložimo 170,00 DE, kapitalizacija je letna, obrestovanje dekurzivno? Koliko obresti so nam pripisali?
- c) Koliko moramo vložiti v banko, da bomo lahko štiri leta od danes naprej na začetku vsakega meseca (prenumerandno) prejeli štipendijo po 200,00 DE, če je dogovorjena obrestna mera 4,25 % letno, obrestovanje znotraj leta pa z navadnim obrestnim računom?



UTRJEMO, RAZMIŠLJAMO, RAZISKUJEMO, VADIMO

1. Pojasnite v čem vidite pomen in vlogo osebnih računov v vsakdanjem življenju?
2. S pomočjo internetnih strani poslovnih bank primerjajte pogoje poslovanja z osebnimi računi. Vaše ugotovitve predstavite na vajah iz poslovne matematike.
3. Pojasnite razliko med obračunavanjem obresti na osebnih računih, če se obresti računajo po stopnjevalni ali po progresivni metodi.
4. Pojasnite pojem prenumerandno in postnumerandno. V čem je osnovna razlika pri uporabi v praktičnih nalogah in kaj ta razlika pomeni za osebo, ki varčuje?
5. Kakšna je razlika med periodičnimi vplačili in rentami? Pojasnite, v čem vidite pomen poznavanja varčevanja in kje boste pridobljeno znanje lahko uporabili.
6. Rešite naloge iz sedmega poglavja Zbirke vaj iz poslovne matematike (Domjan 2008, 25–27).

V poglavju smo uporabili vso dosedanje znanje obrestnega računa in ga nadgradili z znanjem za izračun stanja na transakcijskem računu v določenem obračunskem obdobju z znanimi pogoji obrestovanja ali s stopnjevalno ali s progresivno metodo. Naučili smo se izračunavati tudi vloge in rente, če se namesto poslovanja z osebnim računom odločimo za varčevanje.



10 POSOJILA

V poglavju bomo spoznali posojila, sestavine amortizacijskega načrta ter oba načina vračanja posojil – anuitetni in obročni način.

10 POSOJILA

Pojem posojila nam je seveda znan. Vemo, da nam nekdo (pa čeprav starši) posodi določen kapital za neko časovno obdobje in ga moramo v skladu z dogovorom tudi vrniti. Če se dobro pogajamo, lahko iztržimo v tem primeru več kot pri finančnih ustanovah, saj je plačilo tako najetega posojila vračljivo tudi v dobrih delih in pomoči pri večjih opravilih. Če pa želimo sklepati prave posle, se moramo odpraviti ali v poslovno banko ali na zavarovalnico, saj vemo, da na področje poslovanja bank kot aktivni posel spada kreditno poslovanje. Gre za poslovni odnos med banko, ki nastopa kot kreditodajalec (posojilodajalec) in med najemnikom kredita (posojila), ki je v tem primeru kreditojemalec (posojilojemalec) in je lahko tako pravna kot fizična oseba. V tem poglavju se bomo naučili izdelati amortizacijski načrt na dva načina, izračunati višino obrokov posojila ob upoštevanju dogovorjenega časa vračila posameznih obrokov, spoznali bomo pojem razdolžnina, anuiteta in ostanek dolga ter znali izračunati ustrezne obresti na najeti kredit.

Ko se dogovorimo za posojilo (kredit), podpisemo posojilno (kreditno) **pogodbo**. V njej se dogovorimo o višini kredita, času in načinu odplačevanja, številu obrokov, višini obrestne mere, stroških najema in stroških zavarovanja posojila (kredita) ter o višini posameznega obroka. Banka nam na osnovi pogodbe pripravi načrt vračanja (odplačevanja) posojila (kredita), ki ga imenujemo **amortizacijski načrt**. Na internetnih straneh večine poslovnih bank lahko najdete računalniške programčke za izdelavo amortizacijskih načrtov, vendar pa je prav, da jih znamo sestaviti tudi sami.

Opredelimo osnovne pojme, ki jih bomo srečali pri najemu posojila (kredita):

- **dolg** – je nominalni (celotni) znesek posojila. Na začetku odplačevanja srečamo izraz **začetni dolg** (D_0), ob odplačevanju posameznih obrokov (anuitet) pa **ostanek dolga** (D_i). Od začetnega dolga ali od ostanka dolga izračunavamo obresti (osnova za izračun obresti).
- **amortizacija dolga** – je odplačevanje dolga, ki poteka v obrokih
- **razdolžnina** – je del dolga. Vsota vseh razdolžnin je enaka začetnemu dolgu ali izplačanemu posojilu (kreditu).
- **obresti** – so nadomestilo za izposojen denar, saj se računajo za obdobje med dvema zaporednima anuitetama. Osnova za izračun obresti je ostanek dolga po prejšnjem vračilu.
- **anuiteta** – je obrok posojila (kredita). Vsebuje znesek dela dolga (razdolžnine) in obresti nevrnjenega dolga.

Banke obračunavajo posojila (kredite) po dveh **metodah**:

- **metoda enakih razdolžnin** – pravimo ji tudi obročni način vračanja posojila. Ta način vračanja posojila (kredita) uporabljajo banke za poslovanje z gospodarskimi družbami in drugimi pravnimi osebami. Metoda pozna fiksni znesek razdolžnin, na katerega vsakič dodamo obresti. Zaradi tega pada skupni znesek posojila (kredita). Največja je prva anuiteta, obresti so najvišje, saj jih računajo od začetnega dolga. Ker ostanek dolga počasi pada, padajo tudi obresti v posameznem letu vračanja posojila (kredita).
- **metoda enakih anuitet** – pravimo ji tudi anuitetni način vračanja posojila. Banke uporabljajo ta način za poslovanje s fizičnimi osebami (občani). Posojilojemalec bo odplačeval enake zneske posojila s tem, da se bo povečeval delež razdolžnine, zmanjševal pa delež obresti, ki se računajo vedno od manjšega ostanka dolga.

Anuitete lahko dospevajo **prenumerandno** (na začetku obdobja) ali **postnumerandno** (na koncu obdobja). V praksi se običajno uporablja postnumerandno dospevanje vlog, zato bomo v nadaljevanju poglavja obravnavali le dekurzivnem načinu obrestovanja, ki je pogostejši od anticipativnega (tega pa glede na naše predhodno znanje že obvladamo in bi ga znali uporabiti tudi pri amortizacijskem načrtu).

Običajno mora posojilojemalec, preden prejme kredit, položiti določen znesek - **polog** (P) kot lastno udeležbo pri najemu kredita (Kodrin, Fundak, 2002). Za posamezne kredite je določena **stopnja pologa** (q) v odstotkih glede na višino kredita.

$$P = \frac{D \times q}{100}$$

Seveda je lahko kredit tudi brez pologa. Posojilodajalec običajno upošteva polog kot znesek, za katerega se kredit zmanjša. Obresti računa od preostalega zneska – glavnice (G).

$$G = D - P$$

Koliko kredita bo dobil posojilojemalec, je odvisno od višine njegove mesečne plače oziroma njegovih denarnih prejemkov (M). Določen je tako imenovani **faktor administrativne prepovedi** (k), ki pove, kolikšen del povprečne mesečne plače oziroma prejemkov je mogoče posojilojemalcu odtegniti za plačevanje obrokov. V zvezi s tem definiramo pojem **kreditna sposobnost** - S, ki pove, kolikšen znesek bi lahko plačal posojilojemalec v celoti v določenem času. Čas pri kreditnem računu navadno merimo v mesecih - m.

$$S = M \times m \times k$$

$$M = \frac{S}{m \times k}$$



Vračilo dolga (dolga G z obrestmi vred) ne sme preseči kreditne sposobnosti $S \geq G + o$. V primeru, ko je $G + o = S$, dobimo:

$$G + o = S = M \times m \times k$$

$$M = \frac{G + o}{m \times k}$$



Izračunajte kreditno sposobnost posojilojemalca, ki ima povprečno 1.000,00 EUR plače, če zaprosi za devetmesečno posojilo in je $k = \frac{1}{3}$!

Analiza naloge:

$M = 1.000,00$ EUR

$k = \frac{1}{3}$

$m = 9$

$$S = M \times m \times k$$

$S = ?$

$$S = 1.000 \times 9 \times \frac{1}{3} = 3.000,00 \text{ EUR}$$

Odgovor: Kreditna sposobnost posojilojemalca je 3.000,00 EUR.

10.1 METODA ENAKIH RAZDOLŽNIN

Kot smo že omenili, metoda enakih razdolžnin pomeni obročni način vračanja posojil. Pojasnimo osnovne oznake količin, ki jih bomo uporabljali pri nastavitvi obrazcev:

- a_i – nominalna vrednost i-te anuitete
- i – števec obrokov
- R_i – nominalna vrednost i-te razdolžnine
- o_i – nominalne obresti i-tega obdobja obračuna
- D_0 – začetni dolg
- D_i – ostanek dolga po plačani i-ti anuiteti
- n – število let odplačevanja posojila
- p – dekurzivna obrestna mera
- r – dekurzivni obrestovalni faktor.



Dolg 20.000,00 DE želimo vrniti s petimi enakimi postnumerandnimi razdolžninami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 12,15 %. Sestavite amortizacijski načrt.

Izračun **razdolžnine** opravimo na osnovni osnovne predpostavke, da so vse razdolžnine nominalno med seboj enake (konstantne), kar pomeni, da bomo nominalno vrednost razdolžnine izračunali tako, da bomo začetni dolg delili s številom let odplačevanja posojila:

$$R_i = \frac{D_0}{n} = \frac{20.000,00}{5} = 4.000,00 \text{ DE}$$



Ostanek dolga (D_i) bomo izračunali tako, da bomo predhodni dolg zmanjšali za nominalno vrednost razdolžnine ali tako, da bomo začetni dolg zmanjšali za nominalno vrednost razdolžnine, pomnožene z i-tim števcem obrokov:

$$D_i = D_0 - i \times R \quad \text{ali} \quad D_i = D_{i-1} - R$$



$$D_1 = D_{1-1} - R = 20.000,00 - 4.000,00 = 16.000,00 \text{ DE}$$

$$D_2 = D_{2-1} - R = 16.000,00 - 4.000,00 = 12.000,00 \text{ DE}$$

Obresti (o_i) se pri posojilih obračunavajo za vsako obdobje posebej, pri čemer je osnova za izračun i-tih obresti, ostanek dolga po zadnji plačani anuiteti (D_{i-1}):

$$o_i = D_{i-1} \times (r^n - I) \quad \text{ali} \quad o_i = \frac{D_{i-1} \times p}{100}$$



$$o_1 = \frac{D_{1-1} \cdot p}{100} = \frac{20.000,00 \cdot 12,15}{100} = 2.430,00 \text{ DE}$$

$$o_2 = \frac{D_{2-1} \cdot p}{100} = \frac{16.000,00 \cdot 12,15}{100} = 1.944,00 \text{ DE}$$

Ostane nam še izračun **anuitete** (a_i) oziroma **obroka**, ki je enaka vsoti razdolžnine in pripadajočih obresti za i -to obdobje:



$$a_i = R + o_i \quad \text{ali} \quad a_i = R + \frac{(D_0 - (i-1) \times R) \times p}{100}$$

$$a_1 = R + o_1 = 4.000,00 + 2.430,00 = 6.430,00 \text{ DE}$$

$$a_2 = R + o_2 = 4.000,00 + 1.944,00 = 5.944,00 \text{ DE}$$

Zadnji obrazec za izračuna anuitet običajno uporabljamo pri direktnem izračunu zneska anuitet za i -to obdobje.

Leta (n)	Obrok/anuiteta (a_i)	Obresti (o_i)	Razdolžnina (R_i)	Ostanek dolga (D_i)
0	—	—	—	20.000,00
1	6.430,00	2.430,00	4.000,00	16.000,00
2	5.944,00	1.944,00	4.000,00	12.000,00
3	5.458,00	1.458,00	4.000,00	8.000,00
4	4.972,00	972,00	4.000,00	4.000,00
5	4.486,00	486,00	4.000,00	—
SKUPAJ:	27.290,00	7.290,00	20.000,00	

Če povzamemo, amortizacijski načrt sestavimo v pregledni obliki v **tabeli**, ki ima pet stolpcev in toliko vrstic, kolikor je let najema posojila, povečano za vrstico vsote posameznih stolpcev.

Za sestavljanje amortizacijskega načrta po metodi enakih razdolžnin veljajo naslednja pravila:

- začetni dolg vnesemo v vrstico, ki pomeni nulto leto vračanja kredita
- obresti v i -ti vrstici računamo od ostanka dolga predhodne vrstice (D_{i-1})
- anuiteta je seštevek obresti in razdolžnin v pripadajočem i -tem obdobju
- zadnja razdolžnina mora biti enaka ostanku dolga predhodnega obdobja, zato ostanek dolga v zadnjem letu ne obstaja in ga označimo s črtico (-). Lahko se zgodi, da zaradi zaokroževanja pri izračunih ne dobimo ekvivalentne vrednosti, zato to napako popravimo s prilagojeno izravnavo.
- vsota razdolžnin je enaka začetnemu dolgu
- seštevek skupnih obresti in skupnih razdolžnin mora biti enak seštevku plačanih anuitet.

Če nas zanimajo le posamezni elementi amortizacijskega načrta, lahko na osnovi znanja, ki smo ga pridobili, te tudi izračunamo.



Dolg 20.000,00 DE želimo vrniti s petimi postnumerandnimi razdolžninami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 12,15 %. Izračunajte R_5 , o_3 , a_2 in D_4 ?

Analiza naloge:

$$D_0 = 20.000,00 \text{ DE}$$

$$p = 12,15 \%$$

$$n = 5$$

$$m = 1$$

$$R_5 = ? \quad R_i = \frac{D_o}{n} = \frac{20.000,00}{5} = 4.000,00 \text{ DE}$$

$$o_3 = ? \quad o_3 = \frac{D_{i-1} \times p}{100} = \frac{(20.000,00 - 2 \times 4.000,00) \times 12,15}{100} = 1.458,00 \text{ DE}$$

$$a_2 = ? \quad a_2 = R + \frac{(D_0 - (i-1) \times R) \times p}{100}$$

$$= 4.000,00 + \frac{(20.000,00 - (2-1) \times 4.000,00) \times 12,15}{100} = 5.944,00 \text{ DE}$$

$$D_4 = ? \quad D_4 = D_0 - i \times R = 20.000,00 - 4 \times 4.000,00 = 4.000,00 \text{ DE}$$

Odgovor: Peta razdolžnina znaša 4.000,00 DE, obresti v tretjem letu 1.458,00 DE, druga anuiteta 5.944,00 DE in ostanek dolga v četrtem letu 4.000,00 DE.

10.2 METODA ENAKIH ANUITET

Metodi enakih anuitet pravimo tudi anuitetni način vračanja posojila. Oznake osnovnih količin ostajajo enake kot pri metodi enakih razdolžnin, razlika je le v tem, da je anuiteta ves čas odplačevanja posojila enaka. Razdolžnino izračunamo kot razliko med anuiteto in pripadajočimi obrestmi in vpliva na izračun ostanka dolga.



Dolg 24.000,00 DE želimo vrniti s petimi enakimi postnumerandnimi anuitetami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 7,5 %. Sestavite amortizacijski načrt.

Analiza naloge:

$$D_0 = 24.000,00 \text{ DE}$$

$$p = 7,5 \%$$

$$n = 5$$

Prikazali bomo izračun iskanih količin za prvo in drugo leto vračanja posojila, vse ostale količine pa se računajo po istem modelu.

Največji problem pri izpeljavi obrazca predstavlja izračun anuitet, zato si pomagamo s predhodnim znanjem, saj vemo, da ta tvori geometrijsko zaporedje:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

Po ureditvi n-tih členov geometrijskega zaporedja dobimo obrazec: $S_n = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

Končna vrednost našega posojila je enaka produktu začetnega dolga in dekurzivnega obrestovalnega faktorja na n-to potenco $S_n = D_0 \times r^n$. V nadaljevanju ne bo težav, saj znamo izpeljati obrazec za anuiteto:

$$D_0 \times r^n = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$a_i = \frac{D_0 r^n (r - 1)}{(r^n - 1)}$$



$$a = \frac{D_0 r^n (r - 1)}{(r^n - 1)} = \frac{24.000,00 \times 1,075^5 (1,075 - 1)}{(1,075^5 - 1)} = 5.931,95 \text{ DE}$$

Obresti (o_i) se pri posojilih obračunavajo za vsako anuitetno obdobje posebej, pri čemer je osnova za izračun i-tih obresti predhodni ostanek dolga (D_{i-1}):

$$o_i = D_{i-1} \times (r^n - 1)$$

ali

$$o_i = \frac{D_{i-1} \times p}{100}$$



$$o_1 = \frac{D_{1-1} \times p}{100} = \frac{24.000,00 \times 7,5}{100} = 1.800,00 \text{ DE}$$

$$o_2 = \frac{D_{2-1} \times p}{100} = \frac{19.868,05 \times 7,5}{100} = 1.490,10 \text{ DE}$$

Izračun **razdolžnine** opravimo tako, da od anuitete v i-tem obdobju odštejemo pripadajoče obresti v i-tem obdobju:

$$R_i = a - o_i$$



$$R_1 = a - o_1 = 5.931,95 - 1.800,00 = 4.131,95 \text{ DE}$$

$$R_2 = a - o_2 = 5.931,95 - 1.490,10 = 4.441,85 \text{ DE}$$

Ostanek dolga (D_i) bomo izračunali tako, da bomo predhodni dolg pomnožili z dekurzivnim obrestovalnim faktorjem in odšteli vrednost anuitete oziroma od predhodnega dolga odšteli razdolžnino:



$$D_i = D_{i-1} \times r - a \quad \text{ali} \quad D_i = D_{i-1} - \left(a - \frac{D_{i-1} \times p}{100} \right) \quad \text{ali} \quad D_i = D_{i-1} - R_i$$

$$D_1 = D_{1-1} - R_1 = 24.000,00 - 4.131,95 = 19.868,05 \text{ DE}$$

$$D_2 = D_{2-1} - R_2 = 19.868,05 - 4.441,85 = 15.426,20 \text{ DE}$$

Leta (n)	anuiteta (a _i)	Obresti (o _i)	Razdolžnina (R _i)	Ostanek dolga (D _i)
0	–	–	–	24.000,00
1	5.931,95	1.800,00	4.131,95	19.868,05
2	5.931,95	1.490,10	4.441,85	15.426,20
3	5.931,95	1.156,97	4.774,98	10.651,22
4	5.931,95	798,84	5.133,11	5.518,11
5	5.931,95	413,86 84	5.518,09 11 *	–
SKUPAJ:	29.659,75	5.659,75	24.000,00	

Pri izračunu obresti v zadnjem letu smo naredili popravek za 0,02 EUR zaradi izpolnjenega pogoja, da je razdolžnina v zadnjem letu enaka ostanku dolga.



Dolg 24.000,00 DE želimo vrniti s petimi enakimi postnumerandnimi anuitetami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 7,5 %. Izračunajte a₂, R₅, o₃ in D₂.

Analiza naloge:

$$D_0 = 24.000,00 \text{ DE}$$

$$p = 7,5 \%$$

$$n = 5$$

$$m = 1$$

$$a_2 = ?$$

$$a = \frac{D_0 r^n (r - 1)}{(r^n - 1)} = \frac{24.000,00 \times 1,075^5 (1,075 - 1)}{(1,075^5 - 1)} = 5.931,95 \text{ DE}$$

$$R_5 = ? \quad R_1 = a - o_1 = 5.931,95 - 1.800,00 = 4.131,95 \text{ DE}$$

$$R_5 = R_1 \times r^4 = 4.131,95 \times 1,075^4 = 5.518,09 \text{ DE} *$$

* v amortizacijskem načrtu popravek vrednosti zaradi pravila o enakosti zadnje razdolžnine in ostanka dolga.

$$o_3 = ? \quad R_1 = a - o_1 \quad o_1 = a - R_1$$

$$o_3 = a - R_3 = a - (R_1 \times r^2) = 5.931,95 - (4.131,95 \times 1,075^2) = 1.156,97 \text{ DE}$$

$$D_4 = ?$$

$$D_4 = D_{4-1} - R_4 = 10.651,22 - 5.133,11 = 5.518,11 \text{ DE}$$

$$R_4 = R_1 \times r^3 = 4.131,95 \times 1,075^3 = 5.133,11 \text{ DE}$$

Odgovor: Peta razdolžnina znaša 5.518,09 DE, obresti v tretjem letu 1.156,97 DE, druga anuiteta 5.931,95 DE in ostanek dolga v četrtem letu 5.518,11 DE.

Kot smo ugotovili, prihaja do rahlih odstopanj v centih pri sestavi celotnega amortizacijskega načrta in pri direktnem izračunu posameznih elementov amortizacijskega načrta. To je povsem razumljivo, saj v amortizacijskem načrtu zaokrožujemo izračunane vrednosti pri vsakem izračunu, pri direktnem izračunu posameznih elementov pa teh delnih zaokrožitev ni. Opozorilo velja še za zaokrožanje zneskov v amortizacijskem načrtu. Če pride do odstopanj pri posameznih vrednostih, naredimo stotinsko izravnavo tako, da je zadnja razdolžnina enaka ostanku dolga – vrniti moramo natanko toliko, kot smo si sposodili, pa še obresti zraven.



10. Rešite naslednje naloge.

- a) Sestavite amortizacijski načrt po metodi enakih razdolžnin za najeto posojilo v višini 7.530,00, ki ga želimo vrniti s šestimi enakimi postnumerandnimi razdolžninami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 8,35 %.
- b) Sestavite amortizacijski načrt po metodi enakih anuitet za najeto posojilo v višini 11.550,00, ki ga želimo vrniti s sedmimi enakimi postnumerandnimi anuitetami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 9,18 %.
- c) Dolg 4.000,00 DE želimo vrniti s štirimi postnumerandnimi razdolžninami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 7,55 %. Izračunajte R_3 , a_2 , a_4 in D_3 .



UTRJEMO, RAZMIŠLJAMO, RAZISKUJEMO, VADIMO

1. V čem prepoznate uporabno vrednost poglavja, ki ste ga pravkar predelali?
2. Ste član mlade družine, ki želi najeti posojilo za nakup stanovanja. S pomočjo internetnih strani treh poslovnih bank v vaši bližini poiščite ustrezne informacije in sestavite amortizacijske načrte za izračun posojila. Razložite in utemeljite svojo odločitev na vajah pri poslovni matematiki.
3. Opredelite razliko med metodo obračuna enakih razdolžnin in metodo obračuna enakih anuitet pri sestavi amortizacijskega načrta.
4. Za poglobljanje znanja rešite naloge iz osmega poglavja Zbirke vaj iz poslovne matematike (Domjan 2008, 28–30).

V poglavju smo se naučili sestaviti amortizacijski načrt za vračanje najetega posojila po obročnem in anuitetnem načinu. Zdaj znamo izračunati anuiteto, razdolžnino, obresti in ostanek dolga. Pripravljeni smo za vstop v poslovni svet, vendar moramo svoje znanje nenehno izpopolnjevati.

POJMOVNIK

amortizacija dolga – odplačevanje dolga, ki poteka v obrokih, 138

amortizacijski načrt – načrt vračanja posojila, 138

anticipativni obrestovalni faktor – faktor obrestovanja v obliki $100/100-\pi$ pri celoletni kapitalizaciji in OOR, 99

anticipativno obrestovanje – obresti se obračunajo od glavnice na začetku kapitalizacijskega obdobja, 87

anuiteta – obrok posojila, ki vsebuje znesek dolga (razdolžnine) in obresti nevrnjenega dolga, 138

bruto količina – teža blaga in embalaže, 72

celota – osnova, od katere računamo odstotke (promile), predstavlja 100 % (1.000 ‰), 54

časovno obdobje NOR – čas obrestovanja v letih (l), mesecih (m), dnevih (d), 86

časovno obdobje OOR – čas obrestovanja v letih (n), 99–119

dekurzivni obrestovalni faktor – faktor obrestovanja v obliki $1+p/100$ pri celoletni kapitalizaciji in OOR, 99

dekurzivno obrestovanje – obresti prištevamo h glavnici ob koncu kapitalizacijskega obdobja, 87

delilna masa – tisto, kar v postopku delitve delimo, 42

delilni ključ – predpis, model, kriterij, način, ki določa, kako moramo deliti, 42

delilni upravičenci – tisti, ki so upravičeni do deleža v delitvi, 42

delitev na enake dele – vsak udeleženec v delitvi dobi enak del, 42

delitev v razmerju – vsak udeleženec v delitvi dobi premo ali obratnosorazmerni del, 43

delitev z razlikami – med udeleženci v delitvi so podane razlike za delitev, 45

delitev z ulomki – ključ delitve določajo ulomki ali odstotki, 44

direktno sklepanje – metoda, ki omogoča sklepanje na enoto in množino, 19–22

dolg – nominalni (celotni) znesek posojila, 138

ekvivalentna obrestna mera – ustrezna mera, ki je enaka pripadajoči obrestni meri v drugem obrestovalnem načinu, 116

ekvivalentno število 1 – nosi najpogostejša, najpomembnejša ali največja proizvodnja, 79

enostavni sklepni račun – medsebojni odnos dveh količin, 19–26

enostavno sorazmerje – enakost dveh enostavnih razmerij, 12–13

faktor administrativne prepovedi – povprečen del plače oziroma prejemkov, ki jih je

mogoče odtrgati za plačevanje obrokov posojilojemalcu, 139

fakturna vrednost – produkt nabavne cene in količine, 72

glavnica – osnova, osnovni znesek ali kapital za izračun obresti, oznaka G , 86

izplačila – dvigi iz računa, promet v breme, ki zmanjšuje stanje na računu imetnika, 121

kalkulacija z enotnim dodatkom – posredne stroške delimo po enotnem kriteriju, 80

kalkulacija z različnim dodatkom – posredne stroške delimo po različnih kriterijih, 82

kapitalizacijsko obdobje – čas med dvema zaporednima pripisoma obresti, 86

končna glavnica – glavnica ob koncu obrestovanja pri OOR, oznaka G_n , 88

konformna obrestna mera – ob redukciji prilagojena obrestna mera kot pripadajoči koren obrestovalnega faktorja, 100

kreditna sposobnost – znesek, ki ga posojilojemalec v celoti lahko plača v določenem časovnem obdobju, 139

lastna vrednost – nabavna vrednost, povečana za splošne stroške, 73

limit – dovoljeno negativno stanje na osebnem računu, 121

maloprodajna vrednost – prodajna vrednost, povečana za DDV, 72

metoda enakih anuitet – anuitetni način vračanja posojila, največkrat za fizične osebe, 138

metoda enakih razdolžnin – obročni način vračanja posojila, največkrat za pravne osebe, 138

nabavna vrednost – fakturna vrednost povečana za odvisne stroške, 72

neto količina – čista teža blaga brez embalaže, 72

NOR – navadni obrestni račun, obresti se ves čas obrestovanja računajo od začetne glavnice, 87

obratno sorazmerje – povečanje (zmanjšanje) ene količine povzroči zmanjšanje (povečanje) druge količine za enak faktor, 17

obresti – odškodnina, denarno nadomestilo za izposojen denar, 86

obrestna mera – stopnja, ki pove, koliko denarnih enot obresti dobimo na vsakih 100 denarnih enot glavnice v enem letu, oznaka p , 86

odstotkovne točke – razlika med dvema odstotnima številoma, 54

odstotna mera – je stopnja, ki pove, koliko stotih delov celote predstavlja, 54

odstotni delež – del celote, za katero se računa odstotek, 54

odstotni faktor – ob povečani celoti predstavlja $1 + p/100$, ob zmanjšani celoti $1 - p/100$, 59

OOR – obrestnoobrestni račun, obresti se ves čas obrestovanja računajo od predhodne glavnice, 88

- ostanek dolga** – dolg, zmanjšan za posamezne obroke ali anuitete v določenem časovnem obdobju, 138
- parcialni ključ** – delni ključ, ki postopoma deli celotno delilno maso, 48
- perioda** – interval, časovno obdobje, ki ima svoj začetek in svoj konec, 127
- periodična izplačila** – zrcalna slika periodičnih vlog so izplačila, lahko tudi rente, 132
- periodične vloge** – prilivi denarnih tokov (vloge), ki omogočajo varčevanje, 127–128
- periodični denarni tokovi** – prilivi denarnih tokov (vloge), ki dospevajo na nek račun v enakomernih časovnih periodah (intervalih) v enaki nominalni vrednosti, in rente kot periodična izplačila (odlivi) pod istimi pogoji, 127–128
- postnumerandne vloge** – periodične vloge, ki dospevanje na koncu intervala (periode), 128
- povečana celota** – čista celota, povečana za delež, oznaka C^+ , 55
- povečana glavnica** – čista glavnica, povečana za obresti, dekurzivno obrestovanje, oznaka G^+ , 88
- povprečna obrestna mera** – obrestna mera, ki omogoča hiter izračun spreminjajočih se obrestnih mer v nekem časovnem obdobju, 117–118
- povprečni stroški proizvodnje** – celotni stroški v primerjavi s količino proizvodnje, 78
- premo sorazmerje** – povečanje (zmanjšanje) ene količine povzroči povečanje (zmanjšanje) druge količine za enak faktor, 15
- prenumerandne vloge** – vloge, ki dospevanje na začetku intervala (periode), 128
- prodajna količina** – nabavljena količina, zmanjšana za kalo in povečana za vlago, 73
- prodajna vrednost** – nabavna vrednost, povečana za maržo (dobiček), 72
- progresivna metoda hranilnih vlog** – za vsako postavko posebej, od valute do konca obračunskega obdobja, zaračunavamo obresti v dobro in v breme, 122–125
- progresivna metoda kalkulacije** – izračun cene od FC do MPC, 72–73
- proizvodna kalkulacija** – postopek za izračun stroškov proizvoda, 78–83
- promilna mera** – je stopnja, ki pove, koliko tisočih delov celote predstavlja, 54
- promilni delež** – del celote, za katero se računa promila, 54
- razdelilni račun** – postopek, ki omogoča delitev, 42
- razdolžnina** – del dolga, ki je odvisen od metode izračuna posojila, 138
- razmerje** – velikostni odnos med dvema količinama, 10–11
- razmerska števila** – členi razmerja ali sorazmerja, 10–14
- redukcija obrestne mere** – preračun obrestne mere na krajše časovno obdobje, 86
- relativna obrestna mera** – ob redukciji prilagojena obrestna mera, ki deli obrestno mero na ustrezno število kapitalizacij, 100

rentni sklad – začetna vrednost rentnega sklada je enaka končni vrednosti periodičnih vlog, 132

retrogradna metoda kalkulacije – izračun cene od MPC do NC, 74

sestavljeni sklepni račun – medsebojni odnos najmanj treh količin, 27–32

sestavljeno sorazmerje – enakost večjega števila sestavljenih razmerij, 13–14

sorazmerje – enakost dveh razmerij, 12–14

stopnjevalna metoda hranilnih vlog – za vsako postavko sproti obračunavamo obresti od ene postavke (transakcije) do druge postavke (od spremembe do spremembe), 125–127

stroški v verižnem računu pri nabavi ali uvozu – povečujejo vrednost stroškov, 38

stroški v verižnem računu pri prodaji ali izvozu – zmanjšujejo vrednost izkupička, 38

tabela merskih enot – seznam angleških in ameriških pretvorikov merskih enot, 36

tara – teža embalaže, 72

tečaj – pove, koliko enot nacionalne valute dobimo za 1 enoto domače valute, 37

transakcijski račun – denarni račun, namenjen poslovanju z vlogami (nakazili) in dvigi (izplačili) ter stroški kot tekočimi denarnim transakcijami, 121

trgovinska kalkulacija – postopek za izračun maloprodajne cene v trgovini, 71–78

velikost zavitka – ustrezna količina enote blaga, ki jo prodajamo, 73

verižni račun – posebna oblika sklepnega računa, ki omogoča hitro reševanje, ko so vse količine v prenosorezmernem odnosu, 35

vplačila – nakazila na račun, promet v dobro, ki povečuje stanje na računu imetnika, 121

začetna glavnica – glavnica na začetku obrestovanja pri OOR, oznaka G_0 , 88

začetni dolg – osnova za izračun obresti v prvem časovnem obdobju, oznaka D_0 , 138

združljivi ključ – vsi ključi v delitvi se lahko združijo ali sestavijo v enega, 48

zmanjšana celota – čista celota, zmanjšana za delež, oznaka C^- , 55

zmanjšana glavnica – čista glavnica, ki je zmanjšana za obresti pri anticipativnem obrestovanju, 88

REŠITVE NALOG**2 RAZMERJA IN SORAZMERJA**

- 2.1 a. $243 : 27 : 10$ b. $56 : 55 : 34$ c. $115 : 27 : 18$
2.2 a. $10 : 90 : 243$ b. $935 : 952 : 1540$ c. $54 : 230 : 345$
2.3 a. $17,5 (17 \frac{1}{2})$ b. $1,736 (1 \frac{53}{72})$
2.4 a. premo sorazmerje (več časa več km) b. obratno sorazmerje (večja hitrost, manj časa)

3 SKLEPNI RAČUN

- 3.1 a. 54 min b. 24 km/h c. 60 vreč
3.2 a. 5 mes b. 16,5 cm c. 312,50 m
d. A = 20 točk, B = 8 točk, C = 12 točk

4 VERIŽNI RAČUN

- a. 3,26 EUR s str. b. 9.347,81 EUR s str., 1,565.103,83 JPY s str. c. 48.676,38 JPY s str.

5 RAZDELILNI RAČUN

- 5.1 a. 7.200 DE, 4.000 DE, 800 DE b. 1.050 DE, 1.800 DE, 2.250 DE, 600 DE
c. 1.140 DE, 570 DE, 760 DE d. 5.625,00 DE, 1.187,50 DE, 687,50 DE
5.2 a. A: 1.701,49 DE, B: 1.298,51 DE, C: 114,29 DE, D: 1.485,71 DE, E: 400,00 DE
b. A: 1.250 kos, B: 500 kos, C: 1.667 kos, D: 1.333 kos, E: 250 kos
c. A: 240 kos, B: 160 kos, C: 305 kos, D: 320 kos, E: 575 kos F: 400 kos

6 ODSOTNI RAČUN

- 6.1 a. A: 52,08 %, B: 56,25 % 4,17 odst. točk b. C^+ : 545,36 DE c. C^- : 48,85 DE
6.2 a. C: 705,01 DE, d: 53,23 DE b. C: 14,97 DE
c. C: 1.268,34 DE, 10,27 % d. C^+ : 28,93 DE
6.3 a. 177 in 295 b. 180 in 60 c. 17,65 %

7 KALKULACIJE

- 7.1 a. 3,30 DE/kg b. 56,06 DE/kg c. 66,72 DE d. 90,35 DE/2kg, 32,20 %
7.2 a. $MPC_A = 21,72$ DE, $MPC_B = 51,59$ DE b. vel. 38: 2,72 DE, vel. 40: 2,86 DE,
vel. 42: 3,02 DE c. vel.M: 1,33 DE, vel.L: 1,78 DE, vel.XL: 2,31 DE

8 OBRESTNI RAČUN

- 8.1 a. 7.239,95 DE b. 10,36 % c. 25. 12. 2008 (139 dni)
8.1.1 a. 15.265,17 DE b. 10,05 % c. 1. 9. 2007 (342 dni)
8.1.2 a. 5.917,99 DE b. 36,72 DE c. 4,18 %
8.2.1 a. 3.408,87 DE b. 4,93 % c. 27. 10. 2011 (3,22 let)
8.2.2 a. 6.289,54 DE b. 328,67 DE c. 4,36 %

- 8.2.3 a. 4.162,66 DE b. 3,94 % rel., 4,00 % konf.
c. 4,36 % d. 1 leto 9 mes 11 dni
- 8.2.4 a. 7,54 % b. 6,45 % c. 6,52 %

9 HRANILNE IN PERIODIČNE VLOGE

- 9.1.1 $o = 3,54$ DE, $Sa = 1.879,83$ DE.
- 9.1.2 a. $o = 0,40$ DE, $Sa = 1.105,95$ DE b. $o = 4,71$ DE, $Sa = 2.150,41$ DE
- 9.2 a. $S_n = 14.596,08$ DE rel. $S_n = 14.500,20$ DE konf.
b. $S_n = 1.324,51$ DE, $o = 134,51$ DE c. 8.860,04 DE

10 POSOJILA

- a. $R = 1.255,00$ DE, $\sum o = 2.200,65$ DE, $\sum a = 9.730,65$ DE
- b. $a = 2.308,75$ DE, $\sum o = 4.611,25$ DE, $\sum R = 11.550,00$ DE
 $R_7 = 2.114,66$ DE, popravek + 0,04 DE
- c. $R_3 = 1.000,00$ DE, $o_2 = 226,50$ DE, $a_4 = 1.075,50$ DE, $D_3 = 1.000,00$ DE

PREGLED OBRAZCEV

SORAZMERJE

premo sorazmerje $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ obratno sorazmerje $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$

ODSTOTNI RAČUN

Osnovne količine odstotnega računa

Vrsta računa	Osnovne enačbe odstotnega in promilnega računa		
Odstotni račun (%)	$d = \frac{C \times p}{100}$	$p = \frac{100 \times d}{C}$	$C = \frac{100 \times d}{p}$
Promilni račun (‰)	$d = \frac{C \times p}{1.000}$	$p = \frac{1.000 \times d}{C}$	$C = \frac{1.000 \times d}{p}$

Povečana in zmanjšana celota

Ime računa	Neznana količina, če je C^+	Neznana količina, če je C^-
odstotni račun (%)	$C^+ = C \left(\frac{100 + p}{100} \right)$ ali	$C^- = C \left(\frac{100 - p}{100} \right)$ ali
(z odstotnimi faktorji)	$C^+ = C \left(1 + \frac{p}{100} \right)$	$C^- = C \left(1 - \frac{p}{100} \right)$
promilni račun (‰)	$C^+ = C \left(\frac{1.000 + p}{1.000} \right)$ ali	$C^- = C \left(\frac{1.000 - p}{1.000} \right)$ ali
(s promilnimi faktorji)	$C^+ = C \left(1 + \frac{p}{1.000} \right)$	$C^- = C \left(1 - \frac{p}{1.000} \right)$
odstotni račun (%)	$C = \frac{C^+ \times 100}{100 + p}$	$C = \frac{C^- \times 100}{100 - p}$
promilni račun (‰)	$C = \frac{C^+ \times 1.000}{1.000 + p}$	$C = \frac{C^- \times 1.000}{1.000 - p}$
odstotni račun (%)	$p = \frac{(C^+ - C) \times 100}{C}$	$p = \frac{(C - C^-) \times 100}{C}$
promilni račun (‰)	$p = \frac{(C^+ - C) \times 1.000}{C}$	$p = \frac{(C - C^-) \times 1.000}{C}$
odstotni račun (%)	$d = \frac{C^+ \times p}{100 + p}$	$d = \frac{C^- \times p}{100 - p}$
promilni račun (‰)	$d = \frac{C^+ \times p}{1.000 + p}$	$d = \frac{C^- \times p}{1.000 - p}$

KALKULACIJE

Progresivna metoda:

FAKTURNA VREDNOST (FV)	
+ <u>odvisni stroški (STR)</u>	
= NABAVNA VREDNOST (NV)	
+ <u>marža (M)</u>	
= PRODAJNA VREDNOST (PV)	
+ <u>davek na dodano vrednost (DDV)</u>	
= MALOPRODAJNA VREDNOST (MPV)	

$$FV = FC \times \text{količina}$$

$$NV = FV + STR$$

$$PV = NV + M$$

$$PK = \frac{NK - K + V}{\text{velikost zavitka}}$$

FAKTURNA VREDNOST (FV)	
- <u>popust dobavitelja (P)</u>	
= FAKTURNA VREDNOST* (FV*)	
- skonto (SK)	
+ <u>odvisni stroški (STR)</u>	
= NABAVNA VREDNOST (NV)	
+ <u>splošni stroški (SS)</u>	
= LASTNA VREDNOST (LV)	
+ <u>marža (M)</u>	
= PRODAJNA VREDNOST (PV)	
+ <u>davek na dodano vrednost (DDV)</u>	
= MALOPRODAJNA VREDNOST (MPV)	

Retrogradna metoda:

MALOPRODAJNA VREDNOST (MV)	
- <u>rabat dobavitelja (P)</u>	
= MALOPRODAJNA VREDNOST* (MV*)	
- skonto (SK)	
= PRODAJNA VREDNOST (PV)	
- <u>marža (M)</u>	
= LASTNA VREDNOST (LV)	
- <u>splošni stroški (SS)</u>	
= NABAVNA VREDNOST (NV)	

Izračun deleža pri retrogradni metodi:

$$d = \frac{C^+ \times p}{100 + p}$$

NAVADNI OBRESTNI RAČUN

Čista glavnica

Označba količine	Čas v l	Čas v m	Čas v d
obresti – o	$o = \frac{G \times p \times l}{100}$	$o = \frac{G \times p \times m}{1.200}$	$o = \frac{G \times p \times d}{36.500}$
glavnica – G	$G = \frac{100 \times o}{p \times l}$	$G = \frac{1.200 \times o}{p \times m}$	$G = \frac{36.500 \times o}{p \times d}$
obrestna mera – p	$p = \frac{100 \times o}{G \times l}$	$p = \frac{1.200 \times o}{G \times m}$	$p = \frac{36.500 \times o}{G \times d}$
čas obrestovanja – l, m, d	$l = \frac{100 \times o}{G \times p}$	$m = \frac{1.200 \times o}{G \times p}$	$d = \frac{36.500 \times o}{G \times p}$

Povečana glavnica

Označba količine	Čas v l	Čas v m	Čas v d
obresti – o	$o = \frac{G^+ \times p \times l}{100 + p \times l}$	$o = \frac{G^+ \times p \times m}{1.200 + p \times m}$	$o = \frac{G^+ \times p \times d}{36.500 + p \times d}$
glavnica – G	$G = \frac{G^+ \times 100}{100 + p \times l}$	$G = \frac{G^+ \times 1.200}{1.200 + p \times m}$	$G = \frac{G^+ \times 36.500}{36.500 + p \times d}$
obrestna mera – p	$p = \frac{100(G^+ - G)}{G \times l}$	$p = \frac{1.200(G^+ - G)}{G \times m}$	$p = \frac{36.500(G^+ - G)}{G \times d}$
čas obrestovanja – l, m, d	$l = \frac{100(G^+ - G)}{G \times p}$	$m = \frac{1.200(G^+ - G)}{G \times p}$	$d = \frac{36.500(G^+ - G)}{G \times p}$

Zmanjšana glavnica

Označba količine	Čas v l	Čas v m	Čas v d
obresti – o	$o = \frac{G^- \times p \times l}{100 - p \times l}$	$o = \frac{G^- \times p \times m}{1.200 - p \times m}$	$o = \frac{G^- \times p \times d}{36.500 - p \times d}$
glavnica – G	$G = \frac{G^- \times 100}{100 - p \times l}$	$G = \frac{G^- \times 1.200}{1.200 - p \times m}$	$G = \frac{G^- \times 36.500}{36.500 - p \times d}$
obrestna mera – p	$p = \frac{100(G - G^-)}{G \times l}$	$p = \frac{1.200(G - G^-)}{G \times m}$	$p = \frac{36.500(G - G^-)}{G \times d}$
čas obrestovanja – l, m, d	$l = \frac{100(G - G^-)}{G \times p}$	$m = \frac{1.200(G - G^-)}{G \times p}$	$d = \frac{36.500(G - G^-)}{G \times p}$

OBRESTNOOBRESTNI RAČUN

Celoletna kapitalizacija

Označba količine	Dekurzivno obrestovanje	Anticipativno obrestovanje
Končna vrednost glavnice – G_n	$G_n = G_0 \times r^n$	$G_n = G_0 \times \rho^n$
Začetna vrednost glavnice – G_0	$G_0 = \frac{G_n}{r^n}$	$G_0 = \frac{G_n}{\rho^n}$
obrestna mera – p, π	$p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right)$	$\pi = 100 \left(1 - \sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}} \right)$
čas obrestovanja – n	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log r}$	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log \left(\frac{100}{100 - \pi} \right)}$

Pogostejša kapitalizacija – relativna obrestna mera

Označba količine	Dekurzivno obrestovanje	Anticipativno obrestovanje
Končna vrednost glavnice – G_n	$G_n = G_0 \times r^{n \times m}$	$G_n = G_0 \times \rho^{n \times m}$
Začetna vrednost glavnice – G_0	$G_0 = \frac{G_n}{r^{n \times m}}$	$G_0 = \frac{G_n}{\rho^{n \times m}}$
Obrestna mera – p, π	$p = 100 \times m \left(\sqrt[n \times m]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right)$	$\pi = 100 \times m \left(1 - \sqrt[n \times m]{\frac{G_0}{G_n}} \right)$
Čas obrestovanja – n	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{m \times \log r}$	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{m \times \log \left(\frac{100}{100 - \frac{\pi}{m}} \right)}$

Pogostejša kapitalizacija – konformna obrestna mera

Označba količine	Dekurzivno obrestovanje	Anticipativno obrestovanje
Končna vrednost glavnice – G_n	$G_n = G_0 \times r^{n/m}$	$G_n = G_0 \times \rho^{n/m}$
Začetna vrednost glavnice – G_0	$G_0 = \frac{G_n}{r^{n/m}}$	$G_0 = \frac{G_n}{\rho^{n/m}}$
obrestna mera – p, π	$p = 100 \left(\left(\frac{G_n}{G_0} \right)^{m/n} - 1 \right)$	$\rho = \left(\frac{G_n}{G_0} \right)^{m/n} \quad \pi = \frac{100(\rho - 1)}{\rho}$
čas obrestovanja – n	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log r} \times m$	$n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log \left(\frac{100}{100 - \pi} \right)} \times m$

Ekvivalenca obrestnih mer

Označba časa	Dekurzivno obrestovanje	Anticipativno obrestovanje
leta (l)	$p = \frac{100 \times \pi}{100 - \pi}$	$\pi = \frac{100 \times p}{100 + p}$
meseci (m)	$p = \frac{1.200 \times \pi}{1.200 - \pi \times m}$	$\pi = \frac{1.200 \times p}{1.200 + p \times m}$
dnevi (d)	$p = \frac{36.500 \times \pi}{36.500 - \pi \times d}$	$\pi = \frac{36.500 \times p}{36.500 + p \times d}$

Povprečna obrestna mera

$$\bar{p} = 100 \left(\sqrt[n]{r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \cdot \dots \cdot r_k^{n_k}} - 1 \right) \quad (n = n_1 + n_2 + \dots + n_k)$$

PERIODIČNI DENARNI TOKOVI

Končna vrednost prenumerandnih vlog $S_n^{(pre)} = ar \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Končna vrednost postnumerandnih vlog $S_n^{(post)} = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Začetna vrednost prenumerandnih vlog $S_0^{(pre)} = \frac{a}{r^{n-1}} \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Začetna vrednost postnumerandnih vlog $S_0^{(post)} = \frac{a}{r^n} \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$

POSOJILA**Metoda enakih razdolžnin:**

Razdolžnina (R_i): $R_i = \frac{D_0}{n}$

Ostanek dolga (D_i): $D_i = D_0 - i \times R$ ali $D_i = D_{i-1} - R$

Obresti (o_i): $o_i = D_{i-1} (r^n - 1)$ ali $o_i = \frac{D_{i-1} \times p}{100}$

Anuiteta (a_i): $a_i = R + o_i$ ali $a_i = R + \frac{(D_0 - (i-1) \times R) \times p}{100}$

Metoda enakih anuitet:

Anuiteta (a_i): $a = \frac{D_0 r^n (r - 1)}{(r^n - 1)}$

Razdolžnina (R_i): $R_i = a - o_i$

Ostanek dolga (D_i): $D_i = D_{i-1} \times r - a$ ali $D_i = D_{i-1} - \left(a - \frac{D_{i-1} \times p}{100} \right)$ ali

$$D_i = D_{i-1} - R_i$$

Obresti (o_i): $o_i = D_{i-1} \times (r^n - 1)$ ali $o_i = \frac{D_{i-1} \times p}{100}$

LITERATURA IN VIRI

- Čibej, J. A. *Poslovna matematika 1. del*. Ljubljana: DZS, 2000.
- Čibej, J. A. *Poslovna matematika 1. del*. Ljubljana: DZS, 2004.
- Čibej, J. A. *Poslovna matematika 2. del*. Ljubljana: DZS, 2000.
- Čibej, J. A. *Poslovna matematika 2. del*. Ljubljana: DZS, 2004.
- Čibej, J. A. *Matematika za računovodje in finančnike*. Ljubljana: Zveza računovodij, finančnikov in revizorjev, 2001.
- Čibej, J. A. *Matematika za poslovneže*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 2003.
- Domjan, I. *Poslovna matematika*. M. Sobota: Višja strokovna šola M. Sobota, 2004.
- Jager, G. *Poslovna matematika*. Ljubljana: biografika BORI, 2002.
- Jager, G. *Finančna matematika*. Ljubljana: biografika BORI, 2001.
- Kodrin, L. *Matematika za komercialiste*. Maribor: Academia d.o.o., 2002.
- Potočnik, V. *Kalkulacije in DDV za podjetnike, obrtnike, trgovce*. Ljubljana: Gospodarski vestnik, 1999.
- Štalec, M. *Trgovinsko računstvo 1. del*. Ljubljana: DZS, 2000.
- Štalec, M. *Trgovinsko računstvo 1. del*. Ljubljana: DZS, 2000.
- Kodrin, L. in Fundak, M. *Poslovna matematika* (gradivo za interno uporabo). Maribor: Academia d.o.o., 2002.
- Vučak, Š. *Poslovna matematika* (gradivo za interno uporabo). M. Sobota: Višja strokovna šola M. Sobota, 2003.
- <http://www.bsi.si/podatki/tec-bs.asp> (17. 7. 2008).
- <http://www.cvzu-dolenjska.si/e-knji-nica> (15. 8. 2008).
- <http://www.doba.si/egradiva/pms/> (14. 8. 2008).
- <http://www.inter-es.si/mat/index.php?id=0&tecajId=25> (17. 7. 2008).
- http://www.pia.si/resitve.cfm=pretekli_prod&6p3=ostal (15. 8. 2008).

ZBIRKA VAJ IZ POSLOVNE MATEMATIKE

IVANA DOMJAN

KAZALO

1 SKLEPNI RAČUN	3
2 RAZDELILNI RAČUN	7
3 VERIŽNI RAČUN	11
4 ODSOTNI RAČUN	15
5 KALKULACIJE.....	19
6 OBRESTNI RAČUN.....	23
6.1 NAVADNI OBRESTNI RAČUN	24
6.2 OBRESTNO OBRESTNI RAČUN.....	26
7 HRANILNE IN PERIODIČNE VLOGE.....	29
8 POSOJILA.....	33
REŠITVE.....	36
LITERATURA IN VIRI.....	44

Predgovor

Zbirka vaj iz poslovne matematike je namenjena študentom višješolskega strokovnega programa za predmet Poslovna matematika v prenovljenem programu Ekonomist. Je dopolnilo učbenika za ta predmet in omogoča študentom poglobljanje znanja in samoevalvacijo.

Vaje obsegajo 138 nalog. Sestavljene so iz dveh delov. V prvem delu najdemo besedilo nalog, v drugem delu pa rešitve nalog. Te so pripravljene tako, da je pri štirih nalogah iz posamezne skupine prikazan postopek reševanja, za ostale naloge pa so podani rezultati nalog.

Za lažje delo vam je v majhno pomoč



Upam, da boste naloge reševali s pozitivno naravnostjo in željo po čim boljšem prepoznavanju problemov v njih.

Ivana Domjan



1 SKLEPNI RAČUN

Sklepni račun – kako že rešujemo naloge? Spomnimo se, da poznamo množico znanih količin in iščemo eno neznano, ki je z ostalimi količinami v premem ali obratnem sorazmerju. Res, če se pojavljata le dve količini, govorimo o enostavnem sklepnem računu, če pa je teh količin več, pa gre za sestavljeni sklepní račun. In kakšne metode reševanja nalog imamo na razpolago? Metodo direktnega sklepanja, reševanje s pomočjo sorazmerij, reševanje s pomočjo sklepne sheme (puščice) in linearna enačba.

Pa dajmo. Pripravljenih imamo 20 nalog za utrjevanje znanja.

1. Če kmet porabi 5 kilogramov krme na dan, mu zaloga zadošča za 32 dni. Za koliko časa mu zadošča ista zaloga krme, če se dnevna poraba krme poveča na 16 kilogramov?
2. Šivilja naredi 28 vbodov v 72 sekundah. Koliko časa (minut, sekund) potrebuje, da bo naredila 112 vbodov?
3. Cestnemu podjetju zadošča zaloga soli za soljenje cest za 155 dni, če povprečno porabi 72,5 kg soli na dan. Za koliko dni bi zadoščala ista zaloga soli, če se dnevna poraba zaradi slabših vremenskih razmer poveča na 83,6 kg?
4. Transport nekega tovora lahko opravimo v 112 škatlah, če je teža posamezne škatle 16 kg 70 dag. Koliko škatel potrebujemo za isti transport tovora, če želimo vanjo naložiti 20 kg blaga?
5. Osem kosilnic pokosi površino trave na 1 ha 5 a v 6 urah 23 minutah. V kolikem času (ure, minute) pokosi 10 kosilnic površino trave na 479,77 a?
6. Z žičnico se je v 22 vožnjah prepeljalo 1.800 smučarjev v 2 dneh. Koliko voženj z žičnico je potrebnih, da se z njo prepelje v 3 dneh 4.500 smučarjev?
7. Za pripravo nekega projekta potrebujemo 5 delavcev 6 dni 7 ur na dan. Koliko ur morajo delati delavci za izvedbo istega projekta, če je en delavec zbolel, na razpolago pa imajo 5 dni?
8. Za tlakovanje 25 m^2 velike površine potrebujemo 217 tlakovancev velikosti 6 cm x 24 cm. Ker pa takih tlakovancev nimamo, uporabimo tlakovance velikosti 10 cm x 20 cm. Koliko teh tlakovancev potrebujemo?
9. Osemnajst delavcev v 20 dneh opravi svoje delo, če dela 8 ur na dan. Koliko delavcev še potrebujemo, da bo isto delo opravljeno v 15 dneh, če dela ta skupina dve uri na dan manj kot prejšnja?
10. Na dvorišču želimo postaviti otroški peskovnik v obliki pravokotnika s stranicama 1,5 x 2 m in ga napolniti s peskom, ki sega 30 cm visoko. Kako visoko bo segal pesek, če peskovnik zaradi prostorske stiske zmanjšamo na velikost 120 x 150 cm?
11. Za to, da napolnimo z vodo bazen, ki je dolg 10 m in širok 5 m, potrebujemo 55 m^3 vode. Koliko m^3 vode potrebujemo, če bo dolžina bazena 9 metrov, njegova širina pa 6 m?
12. Za obiranje 500 kg pridelka potrebujemo 35 delavcev 10 ur na dan, če delajo 15 dni. Koliko pridelka bo obralo 10 delavcev več v 9 urah na dan, če delajo 14 dni in je njihova storilnost za 10 % višja?
13. Delavka doseže normo, če v 8 urah izdela 5 kosov izdelkov iz blaga, ki je široko 3 metre in dolgo 24 metrov. Za koliko odstotkov mora preseči normo, če želi v istem času izdelati 6 kosov izdelkov iz blaga, ki je 0,5 m širše in 4 metre krajše?

14. Tri skupine po 10 delavcev montirajo vgradne predelne stene v dolžini 120 m, širini 15 cm in višini 2 m v 5 dneh, če delajo 8 ur na dan. V kakšnem času bo pet skupin po 14 delavcev zmontiralo 138,6 m pregradnih sten, širine 20 cm in višine 2,1 m, če delajo 7 ur na dan?
15. Od nekega števila moramo odšteti 25 odstotkov tega števila, da bomo dobili eno osmino števila 1.920?
16. Skupina 20 delavcev je na 30 delovnih strojih ob 8-urnem delavniku izdelala 800 kosov izdelkov. Kakšen delovni čas bi morala imeti skupina, v kateri je 5 delavcev več, da bi na 25 delovnih strojih izdelala 200 takšnih izdelkov več, če mora norma povečati za 6,7 %?
17. Deset delavcev zasluži v šestih mesecih 81.000,00 EUR. Koliko EUR bo zaslužilo 13 delavcev v devetih mesecih, če jim norma povečamo za 10 %?
18. Podjetje izdela 2.485 izdelkov v 22 dneh na 21 delovnih strojih, pri čemer traja delavnik 8 ur. Koliko delovnih strojev potrebuje, če hoče izdelati 4.970 izdelkov v 40 dneh, če delavnik zmanjša za eno uro, norma pa poveča za 10 %?
19. Če bi k nekemu številu prišteli 2, bi dobili število, ki je za 18 večje od razlike števil 215 in 75. Katero je to število?
20. Prvi kolesar se pelje 70 km daleč s povprečno hitrostjo 25 km/h. Koliko časa lahko počiva drugi kolesar, ki vozi s povprečno hitrostjo 28 km/h, če mora priti na cilj v istem času kot prvi kolesar?

Odgovorite še na vprašanja, zastavljena v poglavju Sklepni račun na strani 28.



MAJHNA POMOČ

▪ direktno sklepanje:

trdilni stavek vrednost v EM
 sklepanje na 1 enoto..... PS (/), OS (x)
 sklepanje na množino..... izračun neznanke x

▪ premo sorazmerje $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ obratno sorazmerje $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$

obratna vrednost razmerja $(a : b)^{-1} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} : \frac{a}{ab} = b : a$

▪ sklepna shema:

d) premo sorazmerne količine – $\uparrow \uparrow$ ali $\downarrow \downarrow$ - istosmerne puščice neznanki
 e) obratno sorazmerne količine – $\uparrow \downarrow$ ali $\downarrow \uparrow$ - nasprotno usmerjene puščice

- **linearna enačba** – neznanka označena z x , $L = D$

Tisti, ki radi delate z računalnikom, najdete e-gradiva na naslednjih internetnih naslovih: www.doba.si/e-gradiva/pms, www.pia.si/resitve.cfm=pretekli_prod&6p3=ostal – poslovna matematika, ostali pa v učbenikih Poslovne matematike navedenih, pod literaturo in viri v vajah ali učbeniku.



2 RAZDELILNI RAČUN

Spomnimo se, da imamo pri razdelilnem računu opravka z delitvijo delilne mase med delilne upravičence po predpisanem delilnem ključu. Vemo, da poznamo enostavni razdelilni račun, če na delitev vpliva en ključ delitve, če pa je teh ključev več, govorimo o sestavljenem razdelilnem računu (združljivi ključi, parcialni ključi). Da bi bila preglednost delitve boljša, uporabljamo priročne tabele za urejanje podatkov.

Pripravljenih nalog tega poglavja je 24.

1. Tri gospodinje so naročile slive za kuhanje marmelade. Dogovorile so se, da bodo prevozne stroške in stroške naročenega sadja plačale v razmerju naročenih količin, to je $2,4 : 3 : 1,75$. Koliko bo morala prispevati vsaka gospodinja, če so skupni stroški 75,25 EUR?
2. Štiri skupine delavcev porabijo 1,5 t materiala za gradnjo objekta. Poraba materiala je odvisna od števila delavcev v skupini. V prvi skupini je 22 delavcev, v drugi 18, v tretji 15 in v četrti 20 delavcev. Kolikšna je bila poraba materiala (v kg) v posamezni skupini?
3. Nagrado v višini 13.197 EUR razdelite med tri tekmovalce obratnosorazmerno z doseženim časom. Prvi tekmovalec je porabil 3 min 25 sek, drugi 2 min 55 sek in tretji 3 min 15 sek. Kolikšne nagrade prejmejo posamezni tekmovalci?
4. Razdelite 25,50 EUR stroškov transporta na posamezno blago, če smo nabavili 5 vreč rdečega krompirja po 25 kg, 12 vreč belega krompirja po 10 kg in 2 vreči vijoličastega krompirja po 5 kg.
5. Znesek 2.790,90 EUR razdelite v razmerju $2\frac{1}{4} : \frac{3}{5} : 0,15 : 1,5$.
6. Znesek 105.613,20 EUR razdelite med 4 poslovalnice tako, da dobi prva $\frac{1}{8}$, druga $\frac{3}{9}$, tretja $\frac{2}{7}$ in četrti preostanek blaga.
7. Prijatelji so naročili vino za poroko prijateljice. Stroške nabave bodo poravnali tako, da bo prvi plačal četrtno manj kot drugi in tretji skupaj, tretji pa 70,00 EUR več kot drugi. Koliko stroškov nabave bo poravnal posamezni prijatelj, če je skupna vrednost nabave vina 105,00 EUR?
8. Izgradnjo objekta je sofinanciralo pet investorjev. Prvi je prispeval 12.000 EUR, drugi $\frac{6}{12}$, tretji 27 %, četrti $\frac{1}{10}$, peti 9 %. Kakšna je vrednost celotne investicije in kolikšni so bili deleži posameznih investorjev?
9. Podjetje razdeli ustvarjen dobiček v višini 80.995,60 EUR med pet poslovalnic tako, da dobi prva poslovalnica dvakrat toliko kot tretja, druga za 2.000 DE manj kot tretja, četrti 10 % manj kot tretja, peta pa 1.000 DE manj kot četrti točilnica.
10. Nagrado razdelite med tri tekmovalce tako, da prejme prvi $\frac{1}{8}$, drugi $\frac{2}{17}$, tretji pa ostanek, ki znaša 257,50 DE. Kolikšne so nagrade in koliko znaša nagradni sklad?
11. Zaposleni prejmejo nagrade za uspešnost. Prvi delavec dobi 25,00 EUR več kot tretji, drugi trikrat toliko kot tretji, kar znaša 75,00 DE. Kakšne nagrade so prejeli zaposleni?
12. Delavci v nekem podjetju so finančno pomagali štirim družinam delavcev, zaposlenih v njihovem podjetju, z zbiranjem denarnih sredstev. Zbrali so 7.200 EUR, ki so jih razdelili glede na število družinskih članov (3, 4, 5, 6) v teh družinah in glede na delavno dobo zaposlenih (20, 25, 28, 30) v tem podjetju. Koliko EUR finančne pomoči prejme posamezna družina?

13. Razdelite 5,5 ton moke med zbirne centre tako, da dobi prvi dvakrat toliko kot drugi, tretji 400 kg več kot prvi, četrty 600 kg manj kot drugi, peti pa toliko kot drugi in četrty skupaj.
14. Oče je štirikrat starejši od prvega sina. Drugi sin je star osmino starosti očeta. Mama je od prvega sina starejša 24 let. Skupaj so stari 102 leti. Koliko so stari posamezni družinski člani?
15. Tri vasi gradijo Gasilski dom, ki bo stal 301.000,00 EUR, njihovi deleži pri investiciji pa so premosorazmerni številu gospodinjestev posamezne vasi. Izračunajte deleže posamezne vasi v investiciji, če je v vasi A 350 gospodinjestev, v vasi B 255 gospodinjestev in v vasi C 270 gospodinjestev.
16. Nagrado v znesku 74.995,00 EUR razdelimo štirim tekmovalcem tako, da bodo deleži premosorazmerni številu doseženih točk (15, 7, 9 in 4) in obratnosorazmerni porabljenemu času na tekmovališču (30, 28, 24, 20 minut). Kolikšne bodo nagrade posameznih tekmovalcev?
17. Koliko izdelkov so izdelale vse tri skupine delavcev skupaj, če je bilo v prvi skupini 15 delavcev, ki so delali 7 dni po 8 ur na dan, v drugi 10 delavcev, ki so delali 9 dni po 7 ur dnevno in v tretji 13 delavcev, ki so delali 6 dni po 10 ur dnevno in izdelali 156 izdelkov?
18. Študenti so se odločili, da bodo organizirali dobrodelno prireditve. 35 % izkupička bodo namenili za pokritje stroškov prireditve, ostanek pa razdelili takole: $\frac{1}{5}$ izkupička za otroke s cerebralno paralizo, $\frac{1}{4}$ za slepe in slabovidne otroke, ostanek pa v razmerju 1 : 2 za socialno ogrožene študente in za študente, ki potrebujejo enkratno pomoč. Izračunajte, koliko denarja so zbrali z dobrodelno prireditvijo in koliko znašajo posamezni dobrodelni prispevki, če je za socialno ogrožene študente namenjenih 500,00 EUR?
19. Babica se je odločila, da bo razveselila vnuke in jim razdelila privarčevani denar na naslednji način: Mojca dobi $\frac{1}{5}$ celotnega zneska, Sonja dobi 32 % celotnega zneska, Miran pa 18,00 EUR več kot Mojca. Koliko denarja dobi vsak vnuk?
20. Koliko izdelkov morajo izdelati tri skupine delavcev skupaj, če vemo, da je storilnost vsake naslednje skupine za 10 % slabša od prejšnje? Tretja skupina delavcev je uspela izdelati 40 izdelkov.
21. V nekem mestu se je v enem letu rodilo 1.500 otrok. $\frac{2}{5}$ otrok je bilo fantkov, ostalo so bila dekleta. Pri dekletih je iz statističnega poročila razvidno, da je bilo razmerje med porodi z eno novorojenko in dvojčicama 7 : 2. Izračunajte, koliko porodov je bilo v omenjenem mestu v tem letu.
22. Petim poslovalnicam razdelimo 885 kosov blaga tako, da prve tri poslovalnice prejmejo $\frac{2}{5}$ od celotne količine, blago pa si razdelijo obratnosorazmerno s številom prejetih reklamacij (A: 7 reklamacij, B: 2 reklamaciji, C: 5 reklamacij); ostali dve pa si ostanek razdelita tako, da prejme poslovalnica D za 15 kosov več kot poslovalnica E. Koliko kosov blaga prejme posamezna poslovalnica?

23. Pet prijateljev je pomagalo družini s prostovoljnim delom. Njihova pomoč je ovrednotena v obratnem sorazmerju s številom opravljenih ur prostovoljnega dela (A: 5 ur, B: 7 ur, C: 3 ure, D: 2 uri, E: 6 ur). Koliko je prispeval vsak prijatelj, če je skupna ocena opravljenega prostovoljnega dela 450,18 EUR?
24. Sedmim poslovalnicam je trgovsko podjetje razdelilo 1.350 kosov blaga, in sicer takole:
- prvi dve prejmeta 20 % skupne količine in si razdelita v obratnem sorazmerju z oddaljenostjo od centralnega skladišča (A: 24 km, B: 36 km)
 - druge tri prejmejo 56 % skupne količine in si ga razdelijo tako, da druga (D) prejme 180 kosov več kot prva (C), tretja (E) pa 120 kosov manj kot prva (C) in druga (D) skupaj
 - ostale poslovalnice (F, G) si ostanek skupne količine razdelijo v razmerju $3 \frac{1}{2} : 6,25$.
- Izračunajte koliko kosov prejme posamezna poslovalnica.

Odgovorite še na vprašanja, zastavljena v poglavju Razdelilni račun na strani 36.



MAJHNA POMOČ

- razdelilni račun glede na **število delilnih ključev**:
 - **enostavni razdelilni račun** – delitev določa en sam delilni ključ
 - **sestavljeni razdelilni račun** – delitev je določena z več delilnimi ključi, kjer ločimo:
 - **združljive kjuče** – razmerska števila lahko množimo
 - **parcialne ključe** – računamo postopoma po določenih ključih
- razdelilni račun glede na **vrsto delilnega ključa ali metodo izračuna**:
 - delitev na **enake dele** – vsak udeleženec dobi enako
 - delitev v **razmerju** – delitev v PS $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ ali OS $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$
 - delitev z **ulomki** ali **odstotkovnimi (promilnimi) deleži** – pravila za računanje z ulomki ali odstotki – celota predstavlja 1 ali 100%
 - delitev z **razlikami** – podane so razlike med udeleženci. Udeleženec za katerega nimamo podatka, prejme vrednost x.

Tisti, ki radi delate z računalnikom, najdete e-gradiva na naslednjih internetnih naslovih: www.doba.si/e-gradiva/pms, www.pia.si/resitve.cfm=pretekli_prod&6p3=ostal – poslovna matematika, ostali pa v učbenikih Poslovne matematike, navedenih pod literaturo in viri v vajah ali učbeniku.



3 VERIŽNI RAČUN

Veriga, členi v verigi, verižni račun. Spomnimo se, da gre za posebno obliko sklepnega računa, kjer so vse količine v prenosorazmerni odvisnosti. Naloga je preprosto rešljiva, če za reševanje verige upoštevamo pravila, ki pravijo, da dobra analiza podatkov iz naloge nakazuje samo rešitev in omogoča reševanje problemov, povezanih s tujimi valutami, vlaganji, tečaji in merskimi enotami, ki jih poiščemo v ustreznih tabelah. Če upoštevamo še dodatne stroške poslovanja (nakup oziroma uvoz, prodaja oziroma izvoz), znamo praktične probleme zapisati v matematični obliki.

Pripravljenih imamo 15 nalog.

1. 12 paundov (lb) blaga stane v Veliki Britaniji 15,67 GBP. Koliko stane 1 kg tega blaga v Budimpešti
 - a) brez dodatnih stroškov
 - b) če obračunamo še 7,5 % odvisnih stroškov?
2. Iz Avstralije uvozimo 5 yd blaga, ki stane v Sydneyu 165,15 AUD. Koliko nas stane meter tega blaga? Kolikšen bi bil naš iztržek, če bi obračunali tudi odvisne stroške in carino, kar znaša skupaj 25,3 %?
3. V Avstrijo izvozimo blago, ki ga pri nas prodajamo v polkilogramskih zavitkih po 2,00 EUR. Kolikšen bo naš iztržek za 6 t tega blaga, če plačamo posredniku 5 % provizije?
4. Koliko bo znašal iztržek izvoznega posla na Norveško, če izvozimo 550 kg blaga po ceni 15,16 EUR za 0,5 kg, obračunati pa moramo še 15,4 % odvisnih stroškov?
5. Iz ZDA uvozimo v Slovenijo 4 tone nekega blaga. Cena za quarter tega blaga v New Yorku je 36,50 USD. Kolikšen bo naš iztržek, če moramo obračunati še 12 % carine?
6. V Atenah stane 25 kg nekega blaga 56,18 EUR. Koliko bi pri nas stalo 2 kg tega blaga, če imamo pri nakupu še 36,5 % stroške?
7. Koliko GBP bomo v Veliki Britaniji plačali za yd blaga, ki ga v Franciji prodajajo po 24,50 EUR za 3 m, uvozni stroški pa znašajo 12 %?
8. V ZDA smo kupili neko količino po 3,85 USD za 1 quart. Po koliko EUR bomo lahko prodajali pri nas 0,75 litrske steklenice s to tekočino, če smo morali pri uvozu plačati 22 % uvoznih stroškov?
9. V Avstrijo smo prodali 5.800 kg blaga po 0,42 EUR za kg. Koliko EUR smo iztržili, če smo imeli pri izvozu 12,5 % stroškov?
10. Ameriško podjetje prodaja pšenico po 1,25 USD za 1 galono. Koliko galon takega blaga lahko proda v Veliki Britaniji za 150 GBP, če mora pri tem pokriti še 8 % izvoznih stroškov?
11. Koliko kg lahko angleško podjetje proda v Sloveniji za 417,29 EUR, če to blago prodaja doma po 20 GBP za 1 quarter, pri izvozu pa mora pokriti še 11 % izvoznih stroškov?
12. V Veliki Britaniji smo prodali 3 hl vina po 333,83 EUR. Po koliko GBP za eno steklenico (0,50 galone) bodo tam lahko prodajali vino, če moramo kot prodajalec nositi še 8 % izvoznih stroškov?
13. Za 4 tone nekega blaga smo proizvajalcu plačali 1.001,50 EUR. Po kateri ceni bomo prodajali 5 kg vrečke takega blaga, če moramo zaradi plačila preko banke morali plačati še 0,1 % bančne provizije?

14. Po kakšni ceni za en liter bi švedsko podjetje doma prodajalo nafto, če je moralo kupiti nafto v ZDA po 1,75 USD za eno angleško galono (gl) in mora kot kupec pokriti še 11,5 % uvoznih stroškov?
15. V ZDA smo nabavili hladilno tekočino po 2,50 USD za 1 galono. Po koliko EUR za trilitrsko plastenko bomo to tekočino prodajali pri nas, če smo imeli pri tem 14 % uvoznih stroškov?

Odgovorite še na vprašanja, zastavljena v poglavju Verižni račun na strani 49.



MAJHNA POMOČ

Tabela 1: Tabela merskih enot

ANGLEŠKE IN AMERIŠKE DOLŽINSKE MERE			ANGLEŠKE IN AMERIŠKE POVRŠINSKE MERE		
1 mile (mi)	1760 yd	1609,35 m	1 square (sq mi)	640 A	2,5900 km ²
1 yard (yd)	3 ft	0,91440 m	1 acre (A)	4.840	40.046,87 m ²
1 foot (ft)	12 in	0,30480 m	1 square yard (sq yd)	9 sq ft	0,8361 m ²
1 inch (in)	12 ln	0,02540 m	1 square foot (sq ft)	144 sq in	0,0929 m ²
1 line (ln)		0,00212 m	1 square inch (sq in)	144 sq ln	6,4516 cm ²
			1 square line (sq ln)		4.403 mm ²
ANGLEŠKE IN AMERIŠKE PROSTORNINSKE MERE			DRUGE MERSKE ENOTE V POSLOVNEM SVETU		
1 register tone (Rt)	3,703704 cu yd	2,8316 m ³	1 troy ounce (tr oz)	za plemenite kovine	31,103481g
1 cubic yard (cu yd)	27 cu ft	0,7646 m ³	1 barrel (bbl)	za nafto in derivate	0,159m ³
1 cubic foot (cu ft)	11,728 cu in	28,3170 dm ³			
1 cubic inch (cu in)	1,728 cu ln16.	16,3871 cm ³			
1 cubic line (cu ln)		9,4840 mm ³			
ANGLEŠKE UTEŽNE MERE (trgovske)			AMERIŠKE UTEŽNE MERE (trgovske)		
1 long tone (lt)	20 cwt	1.016,047 kg	1 short tone (st)	20 ct	907,185 kg
1 hundredweight (cwt)	4 qt	50,8023 kg	1 cental (ct)	4 qr	45,3592 kg
1 quarter (qr)	28 lb	12,7006 kg	1 quarter (qr)	25 lb	11,3397 kg
1 pound (lb)	16 oz	0,4536 kg	1 pound (lb)	16 oz	0,4536 kg
1 ounce (oz)	16 dr	28,3495 g	1 ounce (oz)	16 dr	28,3495 g
1 dram (dr)		1,7718 g	1 dram (dr)		1,7718 g
ANGLEŠKE VOTLE MERE (za tekočine)			AMERIŠKE VOTLE MERE (za tekočine)		
1 galone (gl)	4 qt	4,5430 l	1 galone (gl)	4 qt	3,7853 l
1 quart (qt)	2 pt	1,1365 l	1 quart (qt)	2 pt	0,9463 l
1 pint (pt)	4 gi	0,5683 l	1 pint (pt)	4 gi	0,4732 l
1 gill (gi)		0,0143 l	1 gill (gi)		0,0118 l
ANGLEŠKE VOTLE MERE (za suhe snovi)			AMERIŠKE VOTLE MERE (za suhe snovi)		
1 quarter (qr)	8 bsh	290,912 l	1 quarter (qr)	8 bsh	281,912 l
1 bushel (bsh)	4 pk	36,348 l	1 bushel (bsh)	4 pk	35,239 l
1 peck (pk)	2 gl	9,087 l	1 peck (pk)	2 gl	8,8098 l
1 galone (gl)	4 qt	4,5430 l	1 galone (gl)	4 qt	4,405 l
1 quart (qt)	2 pt	1,1365 l	1 quart (qt)	2 pt	1,1012 l
1 pint (pt)	4 gi	0,5683 l	1 pint (pt)		0,5506 l

Vir: Vučak, Poslovna matematika, 2003

Tabela 2: Tečajnica banke Slovenije na dan 17. 7. 2008

Država	Oznaka valute	Ime valute	Šifra valute	Tečaj
Avstralija	AUD	avstralski dolar	036	1,6246
Kanada	CAD	kanadski dolar	124	1,5860
Hrvaška	HRK	hrvaška kuna	191	7,2271
Češka	CZK	češka krona	203	23,1420
Danska	DKK	danska krona	208	7,4588
Madžarska	HUF	madžarski forint	348	230,1300
Japonska	JPY	japonski jen	392	167,4300
Norveška	NOK	norveška krona	578	8,0640
Slovaška	SKK	slovaška krona	703	30,3180
Švedska	SEK	švedska krona	752	9,4778
Švica	CHF	švicarski frank	756	1,6145
Velika Britanija	GBP	britanski funt	826	0,7914
ZDA	USD	dolar	840	1,5849

Vir: <http://www.bsi.si/podatki/tec-bs.asp> (17. 7. 2008)

Obračun stroškov:

- **prodaja** ali **izvoz** blaga:

100 DE brez stroškov **(100 – p)** DE s stroški

- **nakup** ali **uvoz** blaga:

100 DE brez stroškov **(100 + p)** DE s stroški

Tisti, ki radi delate z računalnikom, najdete e-gradiva na naslednjih internetnih naslovih: www.doba.si/e-gradiva/pms, www.pia.si/resitve.cfm=pretekli_prod&6p3=ostal – poslovna matematika, ostali pa v učbenikih Poslovne matematike, navedenih pod literaturo in viri v vajah ali učbeniku.



4 ODSOTNI RAČUN

Odstotki, procenti, ali kakorkoli jih že imenujemo. Vsakdanji sopotniki v realnem življenju. Osnovne količine, ki se pri tem pojavljajo, smo razdelili na celoto, deleže in odstotke. Popusti, znižanja, uspešnost študentov na izpitih... Se spomnite? Vaša analiza podatkov bo lažja, ker poznate vse posebnosti uporabe odstotnega računa. Da bi bili res prepričani v ustreznost pridobljenega znanja, rešite naslednjih 14 pripravljenih nalog.

1. 68 študentov je uspešno zaključilo izobraževanje v 1. letniku študija, kar predstavlja 85 % vseh vpisanih študentov v tem študijskem letu. Koliko je bilo vpisanih študentov v 1. letnik študija v tem študijskem letu?
2. Banka nam zaračuna 0,96 EUR provizije pri plačilu računa s položnico na znesek 50,00 EUR. Koliko odstotkov vrednosti položnice znaša provizija?
3. Na razprodaji smo kupili jakno in zanjo plačali 38,52 EUR. Odstotek popusta na razprodaji je bil 40 %. Koliko je stala jakna pred znižanjem in koliko znaša znesek popusta?
4. V maloprodajni trgovini smo nabavili 1 kg solate po ceni 0,60 EUR. Kakšna je prodajna cena solate, če vemo, da je DDV 8,5 %?
5. V trgovini prodajajo solato, ki jo moramo vlažiti, da ostane sveža. Koliko odstotkov vlage vsebuje solata, ki je pred vlaženjem tehtala 51,12 kg, po vlaženju pa 55,47 kg?
6. Cena nekega blaga se je znižala za 9 % in nato povišala za 13 %. Kolikšna je bila prvotna cena tega blaga, če po vseh spremembah stane blago 25,18 EUR? Za koliko odstotkov je zadnja cena višja od cene pred spremembami?
7. V trgovini so podražili blago, in sicer najprej za 7 % in na to še 8 %. Kakšen je bil skupen odstotek podražitve?
8. Zaposleni v naši državi plačujejo 22,1 % prispevkov od bruto plače. Koliko odstotkov od njihove neto plače pomenijo ti prispevki?
9. Če bi država davčno stopnjo znižala iz 8,5 % na 8 %, za kakšen odstotek znižanja davčnega bremena bi šlo?
10. Zaposleni v proizvodnem podjetju so presegli načrt proizvodnje za 12 % in izdelali 17.248 izdelkov. Za koliko izdelkov so presegli načrtovano proizvodnjo v tem letu?
11. Za čevlje, ki jih želite kupiti, vam trgovec kot stalni stranki ponuja 5 % popusta na zvestobo in 7 % gotovinskega popusta. Koliko boste plačali za čevlje, če stanejo brez popustov 38,55 EUR?
12. Pri agenciji Morje ste rezervirali letovanje, ki vas bo stalo 1.215,28 EUR. Agencija si pridružuje pravico povišanja cene aranžmaja za 7 %, do česar je tudi prišlo. Zaradi plačila z gotovino pa vam prizna 5 % popust. Koliko vas bo dejansko stalo to letovanje?
13. Pri plačilu nekega blaga smo morali plačati tudi 20 % DDV v znesku 250,00 EUR. Koliko je stalo blago?
14. Neko blago se je pocenilo za 12 % in zdaj stane 37,52 EUR. Koliko bi stalo, če bi se namesto pocenitve, podražilo za 7,55 %?

Odgovorite še na vprašanja, zastavljena v poglavju Odstotni račun na strani 65.

**MAJHNA POMOČ**

- Odstotni račun v razmerju: $C : d = 100 : p$ Osnovni delež: $d = \frac{C \times p}{100}$
- Povečane celota v razmerju: $C^+ : d = (100 + p) : p$

$$C = \frac{C^+ \times 100}{100 + p} \quad p = \frac{(C^+ - C) \times 100}{C} \quad d = \frac{C^+ \times p}{100 + p}$$

- Zmanjšana celota v razmerju: $C^- : d = (100 - p) : p$

Tisti, ki radi delate z računalnikom najdete e-gradiva na naslednjih internetnih naslovih:
www.doba.si/e-gradiva/pms, www.inter-es.si/met - odstotni račun in
www.pia.si/resitve.cfm=pretekli_prod&6p3=ostal – poslovna matematika, ostali pa v učbenikih Poslovne matematike navedenih pod literaturo in viri v vajah ali učbeniku.

BELEŽKE:



5 KALKULACIJE

Kako oblikujejo cene trgovci in kako proizvajalci? Odgovor se skriva v posebni obliki odstotnega računa, ki je sistematično urejen v obračun cen, ki mu pravimo kalkulacija. Na osnovi praktičnih primerov znamo analizirati in obdelati podatke, ki so sestavina kalkulacij, pripraviti poslovne informacije in sprejemati odločitve, ki vplivajo na finančno poslovanje ter povezovati znanje z ostalimi ekonomskimi predmeti. Kakšne pa so vrste kalkulacij? Enostavna in sestavljena delitvena kalkulacija, kalkulacija z ekvivalentnimi števili, za vezane proizvode, kalkulacija z dodatki (enotni, različni).

Za utrjevanje znanja rešite naslednjih 11 pripravljenih nalog.

1. Celotni stroški proizvodnje znašajo 15.250,00 EUR za proizvodnjo 700 izdelkov. Struktura stroškov je naslednja: 40 % materialnih stroškov, 35 % stroškov plač, 18 % stroškov amortizacije, ostalo so drugi stroški. Izračunajte stroškovno strukturo te proizvodnje in povprečne stroške proizvoda.
2. Na žagi so razrezali les, in sicer: 75.000 kosov debeline 40 mm, 40.000 kosov debeline 50 mm in 47.000 kosov debeline 60 mm. Izračunajte lastno ceno posamezne debeline rezanega lesa, če predpostavimo, da je smiselno deliti stroške po metodi ekvivalentnih števil, izračunanih glede na debelino razreza lesa. Celotni stroški rezanja so znašali 7.500,00 EUR.
3. Pek je spekel tri vrste kruha, in sicer: 65 kosov črnega kruha, 45 kosov belega kruha, 50 kosov polnozrnatega kruha. Ekvivalentna števila pri kruhu so taka, da če izrazimo stroške proizvodnje s pomočjo črnega kruha, prevzame beli kruh nase 30 % več stroškov, polnozrnat pa 23 % več stroškov od črnega kruha. Pri tem znašajo skupni stroški proizvodnje 240,00 EUR. Izračunajte povprečne stroške posamezne vrste kruha!
4. S kalkulacijo ugotovite, kolikšna je lahko največja nabavna cena blaga, ki naj stane v maloprodaji 150,00 EUR, če imamo 18,5 % lastnih stroškov in želimo doseči 15 % dobiček, davek na dodano vrednost je 20 %.
5. S kalkulacijo ugotovite po kolikšni največji nabavni ceni lahko kupimo 2 kg vrečko sladkorja, če je marketinška služba v podjetju ugotovila, da je lahko maloprodajna cena 2 kg vrečke sladkorja 2,50 EUR, če upoštevamo, da je DDV za sladkor 8,5 %, da moramo trgovini na drobno priznati 10 % rabata, da znašajo lastni stroški 20 % in da želimo ustvariti 15 % dobička.
6. Ugotovite, kolikšna naj bo maloprodajna cena za 1 kg solate (z 8,5 % DDV), če smo nabavili 250 kg solate po 0,35 EUR/kg. Odvisni stroški znašajo 0,5 %, dobavitelj nam odobri za pravočasno plačilo 2 % skonta, pri pakiranju v 1 kg vrečke obračunamo 4 % kala, vrečka pa stane 0,10 DE, ustvariti pa želimo 25 % maržo. Izračunajte tudi, kolikšno maržo lahko ustvarimo, če lastnik podjetja zahteva maksimalno končno maloprodajno ceno 0,55 EUR/kg.
7. Sestavite kalkulacijo, s katero ugotovite, po kakšni največji nabavni ceni za en kos lahko nabavimo blago, če želimo pokriti 20 % lastnih stroškov poslovanja, in ustvariti 10 % dobička. Davek na dodano vrednost je 20 %. V maloprodaji stane en kos tovrstnega blaga 15,00 EUR.
8. Podjetje želi nabaviti 1.200 kg blaga, ki lahko po oceni marketinga v maloprodaji stane največ 150,00 DE za en kilogram. Po kakšni največji nabavni ceni za en kilogram lahko blago nabavi, če ima 15 % stroškov uprave in prodaje in če želi pri tem ustvariti še 10 % dobička, davek na dodano vrednost pa je 20 %. Sestavite kalkulacijo nabavne cene za en kilogram blaga.
9. Vlada je našemu podjetju predpisala maloprodajno ceno 95-oktanskega super bencina 1,129 EUR za liter. Ugotovite, kolikšna je lahko nabavna cena takšnega bencina, če želimo ustvariti 15 % dobička, skupni stroški so 20 %, črpalkam priznamo 10 % rabata, DDV pa je 20 %.

10. Analiza trga je pokazala, da bi lahko podjetje prodalo medicinski aparat. Nabavna cena aparata je po 25.800,00 EUR. Po kateri največji maloprodajni ceni sme aparat prodati, če hoče pokriti 15 % lastnih stroškov, ustvariti 10 % dobička, DDV je 20 %. Sestavite kalkulacijo.
11. Nabavili smo 1.800 kg sladkorja po ceni 0,80 EUR, odvisni stroški so 216,00 EUR, dobavitelj pa nam zaradi pravočasnega plačila priznava 2 % skonta. Kakšna naj bo maloprodajna cena 2 kg vrečke sladkorja, če želimo ob pokritju 18 % splošnih stroškov, realizirati še 16 % dobička? Cena vrečke, v katero pakiramo sladkor, je 0,05 EUR, kalo pri pakiranju je 2 %, DDV je 20 %.

Odgovorite še na vprašanja, zastavljena v poglavju Kalkulacije na strani 81.



MAJHNA POMOČ

Progresivna metoda:

FAKTURNA VREDNOST (FV)	$FV = FC \times \text{količina}$
+ odvisni stroški (STR)	
= NABAVNA VREDNOST (NV)	$NV = FV + STR$
+ marža (M)	
= PRODAJNA VREDNOST (PV)	$PV = NV + M$
+ davek na dodano vrednost (DDV)	
= MALOPRODAJNA VREDNOST (MPV)	$PK = \frac{NK - K + V}{\text{velikost zavitka}}$

FAKTURNA VREDNOST (FV)
– popust dobavitelja (P)
= FAKTURNA VREDNOST* (FV*)
– skonto (SK)
+ odvisni stroški (STR)
= NABAVNA VREDNOST (NV)
+ splošni stroški (SS)
= LASTNA VREDNOST (LV)
+ marža (M)
= PRODAJNA VREDNOST (PV)
+ davek na dodano vrednost (DDV)
= MALOPRODAJNA VREDNOST (MPV)

Retrogradna metoda:

$$\begin{aligned} & \text{MALOPRODAJNA VREDNOST (MV)} \\ - & \text{rabat dobavitelja (P)} \\ = & \text{MALOPRODAJNA VREDNOST* (MV*)} \\ - & \text{skonto (SK)} \\ = & \text{PRODAJNA VREDNOST (PV)} \\ - & \text{marža (M)} \\ = & \text{LASTNA VREDNOST (LV)} \\ - & \text{splošni stroški (SS)} \end{aligned}$$

$$= \text{NABAVNA VREDNOST (NV)} \quad \text{Izračun deleža pri retrog. metodi } d = \frac{C^+ \times p}{100 + p}$$



6 OBRESTNI RAČUN

Obresti, glavnica, obrestna mera, čas obrestovanja, kapitalizacija. Se spomnite, kakšne vrste obrestnega računa smo spoznali? Seveda, navadni in obrestno obrestni račun. Za oba veljajo določena pravila, ki nam omogočajo reševanje praktičnih primerov, analize in sprejemanje poslovnih (osebnih) odločitev. Spomnimo se na načine obrestovanja – dekurzivni in anticipativni. Kateri je primernejši in kdaj?

Da bi našli odgovore na vsa zastavljena vprašanja, rešite naslednjih 16 nalog navadnega in 17 nalog obrestnoobrestnega računa.

6.1 NAVADNI OBRESTNI RAČUN

1. Po kakšni obrestni meri se bo obrestovala glavnica 1.200,00 EUR za obdobje 6 mesecev, da bo narasla na 1.255,14 EUR, če uporabljamo navadno obrestovanje?
2. Kakšne obresti nam prinaša glavnica 250,00 EUR za čas od 21. maja do 3. novembra, če je obrestna mera 4,93 %, uporabljamo pa navadno obrestovanje in dekurzivni izračun obresti?
3. Koliko moramo vložiti v banko, ki obrestuje vloge po 4,12 % obrestni meri, da nam bo v 3 letih pripisala 175,16 EUR obresti?
4. Ker smo nepričakovano prejeli nekaj denarja, želimo dolg 1.570,00 EUR, ki zapade v plačilo 30. junija, poravnati 39 dni pred rokom plačila z dogovorjeno obrestno mero 5,12 %. Koliko moramo vrniti?
5. Koliko zamudnih obresti smo plačali za glavnico s 7,55 % zamudnimi obrestmi vred v znesku 720,00 EUR. Dolg bi morali poravnati 7. junija, vendar smo uspeli s plačilom šele 3. julija?
6. Koliko dni smo zamudili s plačilom, če smo namesto glavnice 1.722,00 EUR morali vrniti 1.815,25 EUR pri dogovorjeni obrestni meri 12 %? Koliko obresti so nam pripisali?
7. Odločili smo se, da bomo v banko pol leta, vsak mesec na začetku meseca, vlagali po 50,00 EUR. Koliko bomo imeli na računu konec junija, če je obrestna mera za take vloge 9,27 %, banka pa uporablja navadni obrestni račun?
8. Določite datum vezave vloge 10.000,00 EUR, če bomo 8. oktobra 2009 dvignili z obrestmi vred 11.000,00 EUR. Letna obrestna mera je 6,25 % (K, 365).
9. Dolg z valuto 16. februar 2010 bomo poravnali že 23. septembra 2009 v znesku 3.256,48 EUR. Koliko smo prihranili, če je letna obrestna mera 6,25 %?
10. Dne 15. junija 2008 smo se zadolžili za 1.500,00 EUR. Katerega dne moramo najkasneje vrniti denar, da ne bomo plačali skupaj več kot 1.650,00 EUR, če je letna obrestna mera 9,22 %?
11. Skupaj z 21,5 % zamudnimi obrestmi smo plačali dolg 8.250,00 EUR, ker smo zamudili s plačilom 2 meseca. Koliko bi plačali, če ne bi zamudili s plačilom, če je obrestovanje dekurzivno? Koliko znašajo obresti?
12. Koliko je treba vlagati na koncu vsakega meseca, da bomo v banki, ki uporablja navadni obrestni račun, v dveh letih privarčevali 20.000,00 EUR, če je letna obrestna mera 7 % letno, obrestovanje dekurzivno?
13. Koliko moramo pri 15 % obrestni meri vložiti na začetku vsakega meseca, da bi po dveh letih imeli skupno 34.375,00 EUR, če je obrestovanje dekurzivno, banka pa uporablja za obrestovanje vlog navadni obrestni račun?

14. V začetku avgusta, septembra, oktobra in novembra, smo štirikrat vložili enak znesek in ob koncu decembra dvignili z obrestmi vred 1.600,00 EUR. Kakšna je bila posamezna vloga, če je bila letna dekurzivna obrestna mera 5 %, obrestovanje pa z navadnim obrestnim računom?
15. Nek dolg zapade v plačilo 15. marca. Če bi ta dolg plačali z 72 dnevno zamudo, bi ta z zamudnimi obrestmi vred znašal 14.520,80 EUR. S kakšnim zneskom bomo isti dolg poravnali šele 21. maja, če bodo zamudne obresti računane po letni dekurzivni obrestni meri 7,50 % in sistemu (K, 360)?
16. Kakšne skupne obresti nam bo banka pripisala 11. novembra, če vložimo v banko 12. januarja 1.500,00 EUR, 14. junija 900,00 EUR in 9. septembra 2.000,00 EUR (K, 366). Dekurzivna letna obrestna mera je 7,50 %. S kakšnim zneskom razpolagamo 11. novembra?



MAJHNA POMOČ

- **navadni obrestni račun:**

$$o = \frac{G \times p \times 1}{100}$$

$$o = \frac{G \times p \times m}{1.200}$$

$$o = \frac{G \times p \times d}{36.500}$$

- **obresti in glavnica iz povečane glavnice:**

$$o = \frac{G^+ \times p \times 1}{100 + p \times 1}$$

$$o = \frac{G^+ \times p \times m}{1.200 + p \times m}$$

$$o = \frac{G^+ \times p \times d}{36.500 + p \times d}$$

$$G = \frac{G^+ \times 100}{100 + p \times 1}$$

$$G = \frac{G^+ \times 1.200}{1.200 + p \times m}$$

$$G = \frac{G^+ \times 36.500}{36.500 + p \times d}$$

6.2 OBRESTNO OBRESTNI RAČUN

1. Kakšne obrestni nam bo do 8. oktobra 2010 prinesla glavnica 2.500,00 EUR, če jo bomo vezali pri banki 25. novembra 2009, pri dekurzivnem obrestovanju, letni relativni obrestni meri 5,85 % in dnevni kapitalizaciji?
2. Kolikšna bi morala biti obrestna mera, da bi se glavnica 4.800,00 EUR v 15 letih povečala za 85 %, pri mesečni kapitalizaciji, dekurzivnem obrestovanju in
 - a. konformnem obračunu obresti
 - b. relativnem obračunu obresti.
3. Katera anticipativna obrestna mera je ekvivalentna dekurzivni obrestni meri 7,50 %?
4. Koliko časa (leta, dnevi) se je obrestovala glavnica 15.000,00 EUR, da je pri 7,5 % letni obrestni meri, letni kapitalizaciji in dekurzivnem obrestovanju narasla na 18.000,00 DE?
5. Kateri znesek je v enem letu pri anticipativnem obrestovanju, 4 % letni obrestni meri in letni kapitalizaciji narasel na 1.450,00 DE?
6. Ugotovite, kolikšna je končna vrednost glavnice na dan 23. septembra, če smo pred 10 leti vložili v banko 2.000,00 EUR in je dekurzivna letna obrestna mera za prvih pet let 5,6 %, pri kvartalni kapitalizaciji, do konca obdobja pa je 4,5 % pri mesečni kapitalizaciji. Ves čas uporabljamo obračun z relativno obrestno mero.
7. Glavnica 4.000,00 EUR se je v desetih letih povečala za 50 % pri kvartalni kapitalizaciji. Kolikšna je bila letna konformna obrestna mera, če je obrestovanje dekurzivno?
8. Glavnica 1.500,00 EUR se je 12 let obrestovala anticipativno pri letni kapitalizaciji. Po kateri obrestni meri se je obrestovala, če je v tem času narasla na 3.250,00 EUR?
9. Kolikšna bo končna vrednost glavnice, če smo 1. januarja 2007 vložili 4.000,00 EUR, ki se je prvih pet let obrestovala dekurzivno z letno obrestno mero 9,5 % pri kvartalni kapitalizaciji, naslednjih 6 let pa z letno obrestno mero 8,2 % pri semestralni kapitalizaciji. Celotno obdobje je uporabljala banka konformno obrestno mero.
10. Katera dekurzivna obrestna mera je ekvivalentna anticipativni obrestni meri 8,2 %?
11. Koliko časa (let in dni) se mora v banki, ki obračunava 6,5 % letne obresti pri kvartalni kapitalizaciji in konformni obrestni meri obrestovati glavnica, da bi se povečala za 150 %?
12. Glavnica 10.000,00 EUR se je obrestovala najprej 45 dni po 7,8 % p.a., nato pa še 120 dni po 8,4 % p.a. Kolikšna je bila njena končna vrednost, če uporabimo:
 - a. navadni obrestni račun
 - b. obračun z relativno obrestno mero
 - c. obračun s konformno obrestno mero?

13. Kakšna bi morala biti obrestna mera, da bi se glavnica 3.000,00 EUR po desetih letih povečala za 50 %, če imamo mesečno kapitalizacijo, relativno obrestno mero in
- dekurzivno obrestovanje
 - anticipativno obrestovanje?
14. Glavnica 500,00 EUR se je pri 9,5 % letni obrestni meri, letni kapitalizaciji in anticipativnem načinu obrestovanja povečala za 18 %. Koliko časa (l, m, d) se je obrestovala?
15. Kakšen znesek so nam pri anticipativni obrestni meri 8 % in letni kapitalizaciji pred 12 leti nakazali na naš račun za najeti kredit v znesku 104.579,62 EUR?
16. Študent je pri banki vezal skupno 250,00 EUR za obdobje treh mesecev (junij, julij, avgust), v katerih je banka imela naslednje obrestne mere: junij 5,98 %, julij 6,15 % in avgust 5,35 %. Koliko znašajo skupne obresti za čas vezave, če uporabljamo:
- konformno obrestno mero z mesečno kapitalizacijo
 - konformno obrestno mero z dnevno kapitalizacijo?
17. Nek znesek se je najprej obrestoval 120 dni po 12,15 % p.a., nato 28 dni po 7,55 % p.a. in nato 92 dni po 8 % p.a. Izračunajte povprečno obrestno mero.

Odgovorite še na vprašanja, zastavljena v poglavju Obrestni račun na strani 118.



MAJHNA POMOČ

▪ obrestno obrestni račun – celoletna kapitalizacija:

- dekurzivno obrestovanje: $G_n = G_0 \times r^n$ $r = 1 + \frac{p}{100}$
- anticipativno obrestovanje: $G_n = G_0 \times \rho^n$ $\rho = \frac{100}{100 - \pi}$

▪ obrestno obrestni račun – pogostejša kapitalizacija – relativna obrestna mera:

- dekurzivno obrestovanje: $G_n = G_0 \times r^{n \times m}$ $r = 1 + \frac{p}{100 \times m}$
- anticipativno obrestovanje: $G_n = G_0 \times \rho^{n \times m}$ $\rho = \frac{100}{100 - \frac{\pi}{m}}$

▪ obrestno obrestni račun – pogostejša kapitalizacija – konformna obrestna mera :

- dekurzivno obrestovanje: $G_n = G_0 \times r^{n \times m}$ $r = \sqrt[m]{r}$
- anticipativno obrestovanje: $G_n = G_0 \times \rho^{n \times m}$ $\rho = \sqrt[m]{\rho}$

Ekvivalenca obrestnih mer

- dekurzivna obrestna mera $p = \frac{100 \times \pi}{100 - \pi}$

▪ anticipativna obrestna mera $\pi = \frac{100 \times p}{100 + p}$

Povprečna obrestna mera

$$\bar{p} = 100 \left(\sqrt[n]{r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \cdot \dots \cdot r_k^{n_k}} - 1 \right) \quad (n = n_1 + n_2 + \dots + n_k)$$

Tisti, ki radi delate z računalnikom, najdete e-gradiva na naslednjih internetnih naslovih: www.doba.si/e-gradiva/pms, www.pia.si/resitve.cfm=pretekli_prod&6p3=ostal – finančna matematika, ostali pa v učbenikih Poslovne matematike, navedenih pod literaturo in viri v vajah ali učbeniku.



7 HRANILNE IN PERIODIČNE VLOGE

Kaj banke in zavarovalnice počnejo z našim denarjem? Vemo, da ga oplajajo z obrestmi na različne načine ali pa ga vlagajo v donosne posle. Rente, rentno varčevanje, pokojninsko zavarovanje – res uporabno znanje za naše odločitve v osebni in poslovnem življenju. Spoznali smo že različne načine obračunavanja obresti in kontokorenta, znamo pa sestavljati tudi obračune v denarnem poslovanju.

Da boste res prepričani v ustreznost pridobljenega znanja, rešite še naslednjih 11 pripravljenih nalog.

1. Na osebni račun v banki, kjer uporabljajo za izračun obresti navadni obrestni račun, smo imeli naslednji promet:

Dogodek	Znesek v EUR	Dne
nakazilo	1.250,16	5.06.2009
dvig	150,00	6.06.2009
nakazilo	43,15	15.06.2009
plačilo računa	85,14	18.06.2009
dvig	100,00	23.06.2009

Izračunajmo stanje na osebni račun na dan 30.6.2009, če obrestuje banka banka vloge po 2,42 %. Za izračun uporabite stopnjevalno metodo.

2. Na osebni račun v banki, ki uporablja navadni obrestni račun, smo imeli naslednji promet:

Dogodek	Znesek v EUR	Dne
nakazilo	970,12	05.06.2009
dvig	50,00	11.06.2009
dvig	100,00	17.06.2009
plačilo računa	47,15	18.06.2009
dvig	70,00	20.06.2009

Izračunajmo stanje na osebni račun na dan 30.06.2009 po pripisu obresti, če je obrestna mera 2,42 %, banka pa uporablja navadni obrestni račun. Za izračun uporabite progresivno metodo.

3. Na osebni račun smo imeli naslednje postavke:
- plača 820,14 EUR na dan 5.11.2009
 - dvig gotovine v znesku 150,00 EUR na dan 15.11.2009
 - plačilo računa v višini 75,64 EUR na dan 19.11.2009
 - nakazilo v višini 120,13 EUR na dan 21.11.2009
 - plača v višini 836,14 EUR na dan 5.12.2009
 - dvig gotovine v znesku 300,00 EUR na dan 17.12.2009
 - dvig gotovine v višini 150,00 EUR na dan 26.12.2009

Izračunajte stanje na osebni račun po progresivni metodi na dan 31.12.2009, če banka uporablja navadni obrestni račun, po obrestni meri 1,75 %.

4. Na osebni račun smo imeli naslednje postavke:
- prenos salda 1.250,00 EUR iz preteklega meseca
 - plačilo računa v višini 123,50 EUR na dan 04.12.2009
 - nakazilo plače v višini 1.125,36 EUR na dan 05.12.2009
 - dvig v gotovini 500,00 EUR na dan 08.12.2009
 - dvig gotovine v znesku 150,00 EUR na dan 20.12.2009
 - nakazilo v višini 123,15 EUR na dan 22.12.2009

Izračunajte stanje na osebni račun po stopnjevalni metodi na dan 31. 12.2009, če banka uporablja navadni obrestni račun in obrestno mero 1,25 %.

5. Koliko moramo vlagati na začetku vsakega meseca, da bi na koncu leta imeli z obrestmi vred 2.000,00 EUR, če je relativna letna obrestna mera 5,58 %, obrestovanje dekurzivno, kapitalizacija mesečna?
6. Koliko bomo imeli na računu ob koncu četrtega leta, če smo štiri leta vsak mesec na koncu vsakega meseca vlagali po 50,00 EUR in če je bila letna obrestna mera 8,5 %, banka pa je uporabljala obrestni račun z relativno obrestno mero in mesečno kapitalizacijo?
7. Koliko bi imeli v banki, ki obrestuje vloge po 7 % letno, čez 35 let, če bi na začetku vsakega leta vložili po 250,00 EUR, banka pa uporablja konformno obrestno mero pri kvartalni kapitalizaciji?
8. V banko, ki obrestuje vloge po 6 % letni relativni obrestni meri, vlagamo na začetku vsakega meseca (od septembra do decembra) enak znesek. Kolikšne morajo biti te vloge, če želimo ob koncu leta imeti v banki 502,20 DE, kapitalizacija je mesečna?
9. Koliko bi imeli po osmih letih v banki na računu, če smo na koncu vsakega leta vlagali po 1.250,00 DE, obrestovanje pa je konformno z obrestno mero 7,5 % in če je kapitalizacija četrletna?
10. Študent je v banko, ki obrestuje vloge po 9,5 % letno, pet let na koncu vsakega leta vlagal po 180,00 DE. Koliko je imel ob koncu petega leta, če je banka uporabljala:
 - a. mesečno kapitalizacijo z relativno obrestno mero
 - b. kvartalno kapitalizacijo s konformno obrestno mero?
11. Koliko je potrebno vlagati na začetku vsakega meseca, da bomo v banki, ki za obdobje krajše, od enega leta, uporablja navadni obrestni račun, privarčevali v dveh letih 10.000,00 EUR, če je letna dekurzivna obrestna mera 6,5 %?

Odgovorite še na vprašanja, zastavljena v poglavju Hranilne in periodične vloge ter rente na strani 136.

**MAJHNA POMOČ**

Končna vrednost prenumerandnih vlog $S_n^{(\text{pre})} = ar \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Končna vrednost postnumerandnih vlog $S_n^{(\text{post})} = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Začetna vrednost prenumerandnih vlog $S_0^{(\text{pre})} = \frac{a}{r^{n-1}} \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Začetna vrednost postnumerandnih vlog $S_0^{(\text{post})} = \frac{a}{r^n} \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$



8 POSOJILA

Posojilo, kredit. Za nekatere znani pojmi, ki so preizkušeni že tudi v praksi, za druge le informacije o možnostih, ki jih ponuja dodatni vir financiranja v poslovnem in osebem življenju. Kako najeti posojilo, pod kakšnimi pogoji, kako najti ustrezne informacije o pogojih najema posojila? Odgovore na zastavljena vprašanja smo dobili že ob obravnavanju poglavja Posojila v pripravljenem učbeniku, ostane vam le, da znanje utrdite z rešitvijo 10 pripravljenih nalog.

1. Koliko kredita lahko najame delavec, ki ima povprečno plačo 1.235,00 EUR za 3 leta, če velja zakonska osnova za najem posojila ($k = \frac{1}{3}$)?
2. Sestavite amortizacijski načrt za najem posojila v višini 7.500,00 EUR za obdobje 5 let, pri letni obrestni meri 7,75 %, ki ga moramo vrniti na začetku vsakega leta ob letni kapitalizaciji, če uporabljamo metodo enakih razdolžnin.
3. Dolg 5.600,00 EUR želimo vrniti s sedmimi enakimi postnumerandnimi anuitetami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 7,5 %. Sestavite amortizacijski načrt.
4. Posojilo 4.200,00 EUR moramo vrniti s šestimi enakimi postnumerandnimi razdolžninami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 11,5 %. Sestavite amortizacijski načrt.
5. Posojilo 80.000,00 EUR moramo vrniti s štirimi enakimi postnumerandnimi anuitetami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 12 %. Sestavite amortizacijski načrt.
6. Dolg 400.000,00 EUR želimo vrniti s štirimi enakimi postnumerandnimi anuitetami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 8,5 %. Sestavite amortizacijski načrt.
7. Posojilo 500.000,00 EUR moramo vrniti s petimi enakimi postnumerandnimi razdolžninami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 15 %. Sestavite amortizacijski načrt.
8. Dolg 200.000,00 EUR želimo vrniti s petimi enakimi postnumerandnimi anuitetami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 15 %. Sestavite amortizacijski načrt.
9. Dolg 400.000,00 EUR želimo vrniti s petimi enakimi postnumerandnimi anuitetami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 12 %. Izračunajte a_4 , o_3 , D_4 in R_2 .
10. Dolg 200.000,00 EUR želimo vrniti s petimi enakimi letnimi razdolžninami pri dekurzivnem obrestovanju, letni kapitalizaciji in letni obrestni meri 12,15 %. Izračunajte a_5 , o_2 , D_4 in R_3 .

Odgovorite še na vprašanja, zastavljena v poglavju Posojila na strani 145.



MAJHNA POMOČ

Metoda enakih razdolžnin:

Razdolžnina (R_i):
$$R_i = \frac{D_0}{n}$$

$$\text{Ostanek dolga } (D_i): D_i = D_0 - i \times R \quad \text{ali} \quad D_i = D_{i-1} - R$$

$$\text{Obresti } (o_i): o_i = D_{i-1} \times (r^n - 1) \quad \text{ali} \quad o_i = \frac{D_{i-1} \times p}{100}$$

$$\text{Anuiteta } (a_i): a_i = R + o_i \quad \text{ali} \quad a_i = R + \frac{(D_0 - (i-1) \times R) \times p}{100}$$

Metoda enakih anuitet:

$$\text{Anuiteta } (a_i): a = \frac{D_0 r^n (r - 1)}{(r^n - 1)}$$

$$\text{Razdolžnina } (R_i): R_i = a - o_i$$

$$\text{Ostanek dolga } (D_i): D_i = D_{i-1} \times r - a \quad \text{ali} \quad D_i = D_{i-1} - \left(a - \frac{D_{i-1} \times p}{100} \right) \quad \text{ali}$$

$$D_i = D_{i-1} - R_i$$

$$\text{Obresti } (o_i): o_i = D_{i-1} (r^n - 1) \quad \text{ali} \quad o_i = \frac{D_{i-1} \times p}{100}$$

Tisti, ki radi delate z računalnikom, najdete e-gradiva na naslednjih internetnih naslovih: www.doba.si/e-gradiva/pms, www.pia.si/resitve.cfm=pretekli_prod&6p3=ostal – finančna matematika, ostali pa v učbenikih Poslovne matematike, navedenih pod literaturo in viri v vajah ali učbeniku.

REŠITVE NALOG

1. SKLEPNI RAČUN

1. 5 kg 32 dni
 1 kg 32/5 dni

16 kg 32/5/16 dni

$$x = \frac{32 \cdot 5}{16} = 10 \text{ dni}$$

2. 72 sekund 28 vbodov
 x sekund 112 vbodov

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \quad 72 : x_2 = 28 : 112 \quad x = 288 \text{ sekund} = 4 \text{ min } 48 \text{ sekund}$$

3. 134,42 dni = 135 dni

4. 94 škatel

5. 23 h 20 min

6. 37 voženj

7. 10,5 ur

8. $25 \text{ m}^2 \uparrow \cdot 217 \text{ tlakovancev} \cdot \downarrow \cdot 24 \text{ cm dol.} \cdot \downarrow \cdot 6 \text{ cm šir.}$
 $25 \text{ m}^2 \cdot \downarrow \cdot x \text{ tlakovancev} \cdot \downarrow \cdot 20 \text{ cm dol.} \cdot \downarrow \cdot 10 \text{ cm šir.}$

$$x = \frac{217 \cdot 6 \cdot 24}{10 \cdot 20} = 156,24 = 157 \text{ tlakov.}$$

9. še 14 delavcev

10. 50 cm

11. 59,4 m³

12. 594 kg

13. 16,7 %

14. 4 dni

15. število 320

16. 9 h

17. 173.745 EUR

18. $\uparrow 2.485 \text{ izd} \cdot \downarrow \cdot 22 \text{ dni} \cdot \uparrow \cdot 21 \text{ strojev} \cdot \downarrow \cdot 8 \text{ h} \cdot \downarrow \cdot 100 \% \text{ norma}$
 $\uparrow 4.970 \text{ izd} \cdot \downarrow \cdot 40 \text{ dni} \cdot \downarrow \cdot x \text{ strojev} \cdot \downarrow \cdot 7 \text{ h} \cdot \downarrow \cdot 110 \% \text{ norma}$

$$x = \frac{21 \times 4.970 \times 22 \times 8 \times 100}{2.485 \times 40 \times 7 \times 110} = 24 \text{ strojev}$$

19. x = 156

20. 18 min

2. RAZDELILNI RAČUN

1. $2,4 : 3 : 1,75 = 48 : 60 : 35$ $48x + 60x + 35x = 75,25$ $x = 0,526223776$
 A: 25,26 EUR, B: 31,57 EUR, C: 18,42 EUR

2. 1.: 440 kg, 2: 360 kg, 3: 300 kg 4: 400 kg

3. 1: 4.095 EUR, 2: 4.797 EUR, 3: 4.305 EUR

4. beli: 12,50 EUR, rdeči: 12,00 EUR, vijoličasti: 1,00 EUR

5. 1: 1.395,45 EUR, 2: 372,12 EUR, 3: 93,03 EUR 4: 930,30 EUR

6. 1: 13.201,65 EUR, 2: 35.204,40 EUR, 3: 30.175,20 EUR 4: 27.031,95 EUR

7. $(0,5x + 17,5) + x + (x + 70) = 105,00$

1: 21,00 EUR, 2: 7,00 EUR, 3: 77,00 EUR

8. 1: 12.000 EUR 2: 150.000 EUR, 3: 81.000 EUR 4: 30.000 EUR 5: 27.000 EUR,
celotna investicija – 300.000,00 EUR

9.

Poslov.	Delitev z razlikami	Urejene razlike	Rezultat v l
1.	$2x$	$2x$	28.964,00
2.	$x - 2.000$	$x - 2.000$	12.482,00
3.	x	x	14.482,00
4.	$x - 0,1x$	$0,9x$	13.033,80
5.	$(x - 0,1x) - 1.000$	$0,9x - 100$	12.033,80
Skupaj:		$5,8x - 3.000$ $x = 14.482$	80.995,60

10. 1: 42,50 EUR, 2: 40,00 EUR, 3: 257,50 EUR, nagradni sklad; 340,00 EUR

11. 1: 50,00 EUR, 2: 75,00 EUR, 3: 25,00 EUR

12. 1: 900 EUR, 2: 1.500 EUR 3: 2.100 EUR 4: 2.700 EUR

13. 1: 1.575 kg 2: 787,5 kg 3: 1.975 kg 4: 187,5 kg 5: 975 kg

14. oče: 48 let, mama: 36 let, prvi sin: 12 let, drugi sin: 6 let

15. A: 120.400 EUR, B: 87.720 EUR, C: 92.880 EUR

16. 1: 28.300 EUR, 2: 14.150 EUR, 3: 21.225 EUR, 4: 11.320 EUR

17.

Skupina	Združljivi ključi	Deli	Izdelki
1.	15, 7, 8	840, $84x$	168
2.	10, 9, 7	630, $63x$	126
3.	13, 6, 10	780, $78x$	156
Skupaj:		$x = 2$	450

18. Cer.p: 545,45 EUR, slab.: 681,82 EUR, soc. ogr.: 500,00 EUR enk.pom: 1.000 EUR
– organizacija prireditve: 1.468,53 EUR, skupaj 4.195,80 EUR

19. Mojca: 12,86 EUR Sonja: 20,57 EUR Miran: 30,86 EUR

20. 1.: 50 izdelkov 2.: 45 izdelkov, 3.: 40 izdelkov – skupaj: 135 izdelkov

21. 1.400 porodov

22. A: 60 kos, B: 210 kos, C: 84 kos D: 273 kos, E: 258 kos

23. A: 67,05 EUR, B: 47,89 EUR, C: 111,75 EUR D: 167,62 EUR, E: 55,87 EUR

24. A: 162 kos, B: 108 kos, C: 129 kos, D: 309 kos, E: 318 kos, F: 116 kos, G: 208 kos

3. VERIŽNI RAČUN

1. a. 837,13 HUF b. 899,94 HUF s str.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{2. a. } x \text{ EUR} & 1 \text{ m} \\
 0,9144 \text{ m} & 1 \text{ yd} \\
 5 \text{ yd} & 165,15 \text{ AUD} \\
 1,6246 \text{ AUD} & 1 \text{ EUR} \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

$$x = 22,23 \text{ EUR}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \text{b. } x \text{ EUR s str.} & 1 \text{ m} \\
 0,9144 \text{ m} & 1 \text{ yd} \\
 5 \text{ yd} & 165,15 \text{ AUD} \\
 1,6246 \text{ AUD} & 1 \text{ EUR} \\
 100 \text{ EUR} & 125,3 \text{ EUR s str.} \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

$$x = 27,86 \text{ EUR s str.}$$

3. 22.800,00 EUR s str.

4. 113.766,07 NOK s str.

5. 9.098,45 EUR s str.

6. 6,13 EUR s str.

7.

x GBP	1 yd
1 yd	0,9144 m
3 m	24,50 EUR
1 EUR	0,7914 GBP
100 GBP	112 GBP s str.

 $x = 6,62 \text{ GBP s str.}$
8. 2,35 EUR s str.
9.

x EUR s str.	5.800 kg
1 kg	0,42 EUR
100 EUR	87,5 EUR s str.

 $x = 2.131,50 \text{ EUR s str.}$
10. 217,65 gl
11. 235,63 kg
12. 1,84 GBP s str.
13. 1,25 EUR s str.
14.

x SEK s str.	1 l
4,5403 l	1 gl
1 gl	1,75 USD
1,5849 USD	1 EUR
1 EUR	9,4778 SEK
100 SEK	111,5 SEK s str.

 $x = 2,57 \text{ SEK s str.}$
15. 1,43 EUR s str.

4. ODSOTNI RAČUN

1. $C = \frac{d \times 100}{p} = \frac{68 \times 100}{85} = 80 \text{ študentov}$
2. $p = 1,92 \%$
3. $C = 64,20 \text{ EUR}$, $d = 25,68 \text{ EUR}$
4. $PC = 0,55 \text{ EUR}$
5. $p = 8,51 \%$
6. $C = 24,48 \text{ EUR}$, $p = 2,8 \%$
7. $p = 1,07 \times 1,08 = 1,1556 = 15,56 \%$
8.

x %	22,1 %
(100 - 22,1) %	100 %

 $x = \frac{22,1 \times 100}{77,9} = 28,37 \%$
9. $p = 5,9 \%$
10. $d = 1.848 \text{ izdelkov}$
11. $C = 38,55 - 0,12 \times 38,55 = 33,92 \text{ EUR}$
12. $C^+ = 1.235,33 \text{ EUR}$
13. $C = 1.250,00 \text{ EUR}$
14. $C^+ = 45,86 \text{ EUR}$

5. KALKULACIJE

1.

Vrsta stroška	% stroškov	Vrednost stroškov	Število izdelkov	Stroški
material	40	6.100,00	700	8,71
plače	35	5.337,50		7,63
amort.	18	2.745,00		3,92
ostalo	7	1.067,50		1,53
SKUPAJ:	100	15.250,00		21,79

2.

Proizv. enote	Debelina v mm	Ekvivalen. števila	Pogojne enote	Stroški	LC/proiz. enoto
75.000	40	1,00	75.000	2.877,24	0,04
40.000	50	1,25	50.000	1.918,16	0,05
47.000	60	1,50	70.500	2.704,60	0,06
			195.500	7.500,00	

3. $LC_{\text{črni}} = 1,30 \text{ EUR}$, $LC_{\text{beli}} = 1,69 \text{ EUR}$, $LC_{\text{ponoz.}} = 1,60 \text{ EUR}$

4. MPC.....150,00 EUR

– DDV (20 %)..... 25,00 EUR

PC..... 125,00 EUR

– marža (15 %)..... 16,30 EUR

LC..... 108,70 EUR

– SS (18,5 %)..... 16,97 EUR

NC..... 91,73 EUR

5. NC = 1,50 EUR

6. MPC = 0,60 EUR, p = 9,33 %

7. NC = 9,47 EUR

8. NC = 98,81 EUR

9. NC = 0,6136 EUR

10. NC..... 25.800,00 EUR

+ SS (15 %)..... 3.870,00 EUR

LC..... 29.670,00 EUR

+ marža (10 %)..... 2.967,00 EUR

PC..... 32.637,00 EUR

+ DDV (20 %)..... 6.527,40 EUR

MPC..... 39.164,40 EUR

11. MPC = 3,09 EUR/2 kg

6. OBRESTNI RAČUN

6. 1 NAVADNI OBRESTNI RAČUN

1. p = 9,19 %

2. o = 5,61 EUR

3. $G = \frac{100 \times o}{p \times l} = \frac{100 \times 175,16}{4,12 \times 3} = 1.417,15 \text{ EUR}$

4. G = 1.561,41 EUR

5. $o = 3,85 \text{ EUR}$

6. $d = \frac{o \times 36.500}{G \times p} = \frac{93,25 \times 36.500}{1.722,00 \times 12} = 164 \text{ dni}$

7. $G^+ = 308,11 \text{ EUR}$

8. $d = 584 - 3. \text{ marec } 2008$

9. $o = 83,50 \text{ EUR}$

10. $d = 395 - 15. \text{ julij } 2009$

11. $G = 7.964,60 \text{ EUR}, o = 285,40 \text{ EUR}$

12. $a = 780,94 \text{ EUR}$

13. $a = 1.238,74 \text{ EUR}$

14. $a = 394,25 \text{ EUR}$

15. $G = \frac{G^+ \times 36.000}{(36.000 + p \times d)} = \frac{14.520,80 \times 36.000}{(36.000 + 7,5 \times 72)} = 14.306,21 \text{ EUR}$

$$G^+ = G + o = G + \frac{G \times p \times d}{36.000} = 14.306,21 + \frac{14.326,21 \times 7,5 \times 67}{36.000} = 14.505,90 \text{ EUR}$$

16. $G^+ = 4.546,93 \text{ EUR}, o = 146,93 \text{ EUR}$

6. 2 OBRESTNOOBRESTNI RAČUN

1. $G_n = G_0 \times r^n = G_0 \left(1 + \frac{p}{100 \times m} \right)^d = 2.500 \times 1,000160274^{317} = 2.630,29 \text{ EUR}$

$o = G_n - G_0 = 2.630,29 - 2.500 = 130,29 \text{ EUR}$ ali

direktni izračun obresti:

$o = G_n - G_0 = G_0 \times r^n - G_0 = G_0 (r^n - 1) = 2.500 (1,000160274^{317} - 1) = 130,29 \text{ EUR}$

2. a. $p = 4,19 \%$ b. $p = 4,11 \%$

3. $\pi = 6,98 \%$

4. $n = 2,52 \text{ let}$ $n = 2 \text{ leti } 190 \text{ dni}$

5. $G_0 = 1.392,00 \text{ EUR}$

6. $G_n = 3.306,15 \text{ EUR}$

7. $p = 4,14 \%$

8. $G_n = G_0 \times p^n \quad \pi = 100 \left(1 - \sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}} \right) = 100 \left(1 - \sqrt[12]{\frac{1.500}{3.250}} \right) = 6,24 \%$

9. $G_n = 10.104,02 \text{ EUR}$

10. $\pi = 8,93 \%$

11. $n = 14,55 \text{ let}$ $n = 14 \text{ let } 201 \text{ dni}$

12. a. $G^+ = 10.372,32 \text{ EUR}$ b. $G_n = 10.379,30 \text{ EUR}$ c. $G_n = 10.364,25 \text{ EUR}$

13. a. $p = 4,06 \%$ b. $\pi = 4,05 \%$

14. $G_n = G_0 \times \varphi^n \quad n = \frac{\log \left(\frac{G_n}{G_0} \right)}{\log \varphi} = \frac{\log \left(\frac{1,18 \times \cancel{G_0}}{\cancel{G_0}} \right)}{\log \left(\frac{100}{100 - 9,5} \right)} = 1,66 \text{ let}$

$n = 1$ leto 7 mes 28 dni

15. $G_0 = 38.450,41$ EUR

16. a. $o = 3,56$ EUR b. $o = 3,59$ EUR

17.

$$\bar{p} = 10 \%$$

$$\bar{p} = 100 \times \left(\sqrt[n]{r_1^{d_1} \times r_2^{d_2} \times r_3^{d_3}} - 1 \right) = 100 \times \left(\sqrt[240]{1,1215^{120} \times 1,0755^{28} \times 1,08^{92}} - 1 \right)$$

7. HRANILNE IN PERIODIČNE VLOGE

1. stopnjevalna metoda

Valuta	Dni	Transakcija	Vloga	Dvig	Stanje	Obresti
5.6.09	1	nakazilo	1.250,16		1.250,16	0,08
6.6.09	9	dvig		150,00	1.100,16	0,66
15.6.09	3	nakazilo	43,15		1.143,31	0,23
18.6.09	5	plačilo rač.		85,14	1.058,17	0,35
23.6.09	7	dvig		100,00	958,17	0,44
30.6.09		obresti	1,76		959,93	

2. stanje: 704,34 EUR o = 1,37 EUR

3. progresivna metoda

Valuta	Dni	Transakcija	Vloga	Dvig	Stanje	Obresti za vloge	Obresti za dvige
5.11.09	56	plača	820,14		820,14	2,20	
15.11.09	46	dvig.		150,00	670,14		0,33
19.11.09	42	plačilo rač.		75,64	594,50		0,15
21.11.09	40	nakazilo	120,13		714,63	0,23	
5.12.09	26	plača	836,14		1.550,77	1,04	
17.12.09	14	dvig		300,00	1.250,77		0,20
26.12.09	5	dvig		150,00	1.100,77		0,04
31.12.09		Obresti	2,75		1.103,52	3,47	0,72

4. stanje = 1.726,78 EUR o = 1,77 EUR

5. $a = 161,70$ EUR

6. $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{47} = a(1 + r + r^2 + \dots + r^{47})$

$$S_n = a \frac{r^{48} - 1}{r - 1} = 50,00 \times \frac{1,007083333^{48} - 1}{1,007083333 - 1} = 2.846,57 \text{ EUR}$$

7. $S_n = 36.978,36$ EUR

8. $a = 123,99$ EUR

9. $S_n = 13.057,96$ EUR

10. a. $S_n = 1.097,27$ EUR b. $S_n = 1.088,03$ EUR

$$11. S_n = ar + ar^2 = a(1 + r) \quad S_n = a^{\text{NOR}} \times \frac{r^2 - 1}{r - 1} \quad a^{\text{NOR}} = a \left(\frac{14.400 + 78 \times p}{1.200} \right)$$

$$S_n = a \left(\frac{14.400 + 78 \times p}{1.200} \right) \times \frac{r^2 - 1}{r - 1} \quad a = \frac{S_n \times 1.200 (r - 1)}{(14.400 + 78 \times p) \times (r^2 - 1)}$$

$$a = \frac{10.000,00 \times 1.200(1,065 - 1)}{(14.400 + 78 \times 6,5) \times (1,065^2 - 1)} = 389,83 \text{ EUR}$$

8. POSOJILA

$$1. \quad S = M \times m \times k = 1.235,00 \times 36 \times \frac{1}{3} = 14.820,00 \text{ EUR}$$

2.

Leta	Anuiteta	Obresti	Razdolžnina	Dolg
0	–	–	–	7.500,00
1	2.081,25	581,25	1.500,00	6.000,00
2	1.965,00	465,00	1.500,00	4.500,00
3	1.848,75	348,75	1.500,00	3.000,00
4	1.732,50	232,50	1.500,00	1.500,00
5	1.616,25	116,25	1.500,00	–
Skupaj:	9.243,75	1.743,75	7.500,00	

$$R_i = \frac{D_0}{n} = \frac{7.500,00}{5} = 1.500,00 \quad o = \frac{D_{i-1} \times p}{100} = \frac{7.500,00 \times 7,75}{100} = 581,25$$

$$a = R + o_i = 1.500,00 + 581,25 = 2.081,25 \text{ EUR}$$

3.

Leta	Anuiteta	Obresti	Razdolžnina	Dolg
0	–	–	–	5.600,00
1	1.057,28	420,00	637,28	4.962,72
2	1.057,28	372,20	685,08	4.277,64
3	1.057,28	320,82	736,46	3.541,18
4	1.057,28	265,59	791,69	2.749,49
5	1.057,28	206,21	851,07	1.898,42
6	1.057,28	142,38	914,90	983,52
7	1.057,28	73,76	983,52	–
Skupaj:	7.400,96	1.800,96	5.600,00	

$$a_i = \frac{D_0 \times r^n (r - 1)}{(r^n - 1)} = \frac{5.600 \times 1,075^7 (1,075 - 1)}{(1,075^7 - 1)} = 1.057,28$$

$$R_i = a - o_i = 1.057,28 - 420,00 = 637,28 \quad o_i = \frac{D_{i-1} \times p}{100} = \frac{5.600 \times 7,5}{100} = 420,00$$

$$4. \quad R = 700,00 \text{ EUR}, \sum o = 1.690,50 \text{ EUR}, \sum a = 5.890,50 \text{ EUR}$$

$$5. \quad a = 26.338,75 \text{ EUR}, \sum o = 25.355,00 \text{ EUR}, \sum R = 80.000,00 \text{ EUR}$$

$$6. \quad a = 122.115,16 \text{ EUR}, \sum o = 88.460,64 \text{ EUR}, \sum R = 400.000,00 \text{ EUR}$$

$$7. \quad R = 100.000,00 \text{ EUR}, \sum o = 225.000,00 \text{ EUR}, \sum a = 725.000,00 \text{ EUR}$$

$$8. \quad a = 59.663,11 \text{ EUR}, \sum o = 98.315,55 \text{ EUR}, \sum R = 200.000,00 \text{ EUR}$$

$$9. \quad a_4 = \frac{D_0 \times r^n (r - 1)}{(r^n - 1)} = \frac{400.000 \times 1,12^5 \cdot (1,12 - 1)}{(1,12^5 - 1)} = 110.963,89 \text{ EUR}$$

$$R_1 = a - o_1 = 110.963,89 - \frac{400.000 \times 12}{100} = 62.963,89 \text{ EUR}$$

$$o_3 = a - R_3 = a - (R_1 \times r^2) = 110.963,89 - (62.963,89 \times 1,12^2) = 31.981,99 \text{ EUR}$$

$$D_2 = D_{2-1} - R_2 = (400.000,00 - 62.963,89) 70.519,56 = 266.516,55 \text{ EUR}$$

$$R_2 = D_1 \times r^1 = 62.963,89 \times 1,12 = 70.519,56 \text{ EUR}$$

$$10. \quad a_5 = 44.860,00 \text{ EUR}, R_3 = 40.000,00 \text{ EUR}, \\ o_2 = 19.440,00 \text{ EUR}, D_4 = 40.000,00 \text{ EUR}$$

LITERATURA IN VIRI

Domjan, I. *Poslovna matematika*. Murska Sobota: Višja strokovna šola M. Sobota, 2008.

Domjan, I. *Poslovna matematika*. M. Sobota: Višja strokovna šola M. Sobota. 2004.

Kodrin, L. in Fundak, M. *Poslovna matematika* (gradivo za interno uporabo). Maribor: Academia d.o.o., 2002.

Fundak, M. *Vaje iz poslovne matematike* (gradivo za interno uporabo). Maribor: Academia d.o.o., 2005.

Vučak, Š. in Domjan, I. *Vaje in poslovne matematike* (gradivo za interno uporabo). M. Sobota: Višja strokovna šola M. Sobota, 2008.

Vučak, Š. *Poslovna matematika* (gradivo za interno uporabo). M. Sobota: Višja strokovna šola M. Sobota, 2003.

Projekt Impletum

Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju 2008–11

Konzorcijski partnerji:



Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007–2013, razvojne prioritete 'Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja' in prednostne usmeritve 'Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja'.