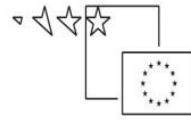




REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT



Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

POSLOVNA MATEMATIKA S STATISTIKO

JULIJA LAPUH BELE

Višješolski strokovni program: Ekonomist
Učbenik: Poslovna matematika s statistiko
Gradivo za 2. Letnik

Avtorica:

Dr. Julija Lapuh Bele, univ. dipl. mat.
B2 d.o.o., Višja strokovna šola



Strokovni recenzent:

Boro Nikić, prof. mat.

Lektorica:

Jana Ozimek, prof. slov.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51-7:33 (075.8) (0.034.2)
311.42 (075.8) (0.034.2)

LAPUH Bele, Julija
Poslovna matematika s statistiko [Elektronski vir] : gradivo za
2. letnik / Julija Lapuh Bele. - El. knjiga. - Ljubljana : Zavod
IRC, 2010. - (Višješolski strokovni program Ekonomist / Zavod
IRC)

Način dostopa (URL): http://www.impletum.zavod-irc.si/docs/Skriti_dokument/Poslovna_matematika_s_statistiko-Bele.pdf. - Projekt
Impletum

ISBN 978-961-6857-94-9

258221568

Izdajatelj: Konzorcij višjih strokovnih šol za izvedbo projekta IMPLETUM

Založnik: Zavod IRC, Ljubljana.

Ljubljana, 2010

Strokovni svet RS za poklicno in strokovno izobraževanje je na svoji 132. seji dne 23.9.2011 na podlagi 26. člena Zakona o organizaciji in financiranju vzgoje in izobraževanja (Ur. l. RS, št. 16/07-ZOFVI-UPB5, 36/08 in 58/09) sprejel sklep št.01301-5/2011/11-2 o potrditvi tega učbenika za uporabo v višješolskem izobraževanju..

© Avtorske pravice ima Ministrstvo za šolstvo in šport Republike Slovenije.

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Impletum Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju 2008–11.

Projekt oz. operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007–2013, razvojne prioritete Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja ter prednostne usmeritve Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.

Vsebina tega dokumenta v nobenem primeru ne odraža mnenja Evropske unije. Odgovornost za vsebino dokumenta nosi avtor.

KAZALO VSEBINE

1	POSLOVNI RAČUNI.....	4
1.1	RAZMERJA IN SORAZMERJA	4
1.1.1	Premo sorazmerje	5
1.1.2	Obratno sorazmerje.....	5
1.2	PROCENTNI RAČUN	5
1.3	SKLEPNI RAČUN	8
1.4	VERIŽNI RAČUN.....	9
1.5	RAZDELILNI RAČUN	10
1.5.1	Delitev na enake dele.....	11
1.5.2	Delitev v razmerju	11
1.6	KALKULACIJE	13
1.6.1	Delitvene kalkulacije	13
1.6.2	Kalkulacija z dodatki	16
1.7	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA.....	17
2	OBRESTOVANJE.....	19
2.1	OSNOVE RAČUNANJA OBRESTI.....	19
2.1.1	Obresti za eno leto	20
2.1.2	Relativna (proporcionalna) obrestna mera.....	20
2.1.3	Trajanje finančne naložbe.....	23
2.2	DEKURZIVNO IN ANTICIPATIVNO OBRESTOVANJE.....	24
2.3	NAVADNI IN OBRESTNO OBRESTNI RAČUN.....	26
2.3.1	Navadni obrestni račun	26
2.3.2	Obrestno obrestni račun.....	27
2.3.3	Obračun obresti pri večkratni kapitalizaciji na leto	30
2.3.4	Konformna obrestna mera	31
2.4	OBRESTNE MERE V BANČNI PRAKSI.....	34
2.4.1	Priporočila Banke Slovenije in Združenja bank Slovenije	34
2.4.2	Nominalna obrestna mera (NOM)	34
2.5	VRSTE OBRESTOVANJA	35
2.6	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA.....	36
3	VARČEVANJE.....	38
3.1	OBRAČUN OBRESTI NA OSEBNIH IN TRANSAKCIJSKIH RAČUNIH	38
3.2	POSTOPNO VARČEVANJE ENAKIH ZNESKOV	40
3.2.1	Končna vrednost enakih, periodičnih zneskov	40
3.2.2	Računanje končne vrednosti s funkcijo FV	42
3.2.3	Začetna vrednost enakih, periodičnih zneskov	44
3.2.4	Računanje začetne vrednosti s funkcijo PV	45
3.2.5	Računanje višine varčevalnega zneska s funkcijo PMT	47
3.3	DEPOZITI.....	48
3.4	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA.....	50

4	KREDITI	52
4.1	VRSTE KREDITOV	52
4.1.1	Kratkoročni in dolgoročni krediti	52
4.1.2	Anuitetni in obročni krediti.....	52
4.2	IZRAČUNI ANUITETNIH KREDITOV	53
4.2.1	Izračun začetne vrednosti kredita – funkcija PV.....	53
4.2.2	Izračun anuitete – funkcija PMT.....	54
4.2.3	Razdolžnina – funkcija PPMT	55
4.2.4	Obresti v obroku – funkcija IPMT	56
4.2.5	Efektivna obrestna mera (EOM)	58
4.2.6	Obrestna mera – funkcija RATE.....	58
4.3	IZRAČUNI OBROČNIH KREDITOV	60
4.3.1	Izračun razdolžnine pri obročnih kreditih	60
4.3.2	Izračun obresti pri obročnih kreditih.....	61
4.4	KAJ ŠE MORAMO VEDETI O KREDITIH?	62
4.4.1	Enovita in sestavljena obrestna mera	62
4.4.2	Interkalarne obresti	63
4.4.3	Amortizacijski načrti.....	63
4.5	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA	65
5	STATISTIČNO RAZISKOVANJE, UREJANJE IN PRIKAZOVANJE PODATKOV	68
5.1	TEMELJNI STATISTIČNI POJMI	68
5.1.1	Statistična populacija	68
5.1.2	Statistična enota	70
5.1.3	Statistična spremenljivka	70
5.1.4	Parametri.....	71
5.2	STATISTIČNO RAZISKOVANJE	72
5.2.1	Načrtovanje statističnega raziskovanja	72
5.2.2	Zbiranje podatkov ali statistično opazovanje.....	72
5.2.3	Urejanje podatkov.....	75
5.3	GRAFIČNO PRIKAZOVANJE STATISTIČNIH PODATKOV	75
5.3.1	Tabele (preglednice)	76
5.3.2	Grafikoni.....	76
5.4	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA	78
6	RELATIVNA ŠTEVILA	79
6.1	STRUKTURA	79
6.2	KOEFICIENT	81
6.2.1	Recipročni koeficient.....	82
6.2.2	Koeficient obračanja zalog	82
6.3	INDEKS	84
6.3.1	Indeks s stalno osnovo	84
6.3.2	Indeks s spremenljivo osnovo ali verižni indeks.....	85

6.4	STOPNJA	86
6.5	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA.....	87
7	FREKVENČNE PORAZDELITVE.....	88
7.1	OBLIKOVANJE SKUPIN IN RAZREDOV	88
7.1.1	Skupine pri opisnih spremenljivkah	88
7.1.2	Skupine pri številskih spremenljivkah	89
7.1.3	Frekvenčna porazdelitev in frekvenca	91
7.1.4	Relativna frekvenca	92
7.1.5	Kumulativna in relativna kumulativna frekvenca	92
7.1.6	Grafični prikaz frekvenčne porazdelitve.....	93
7.1.7	Računanje frekvenc s funkcijo Frequency	96
7.1.8	Excelovo orodje Histogram	99
7.2	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA.....	101
8	RANGI IN KVANTILI	102
8.1	RANGI.....	102
8.1.1	Ranžirna vrsta	102
8.1.2	Absolutni in kvantilni rang	102
8.1.3	Grafični prikaz rangov	103
8.2	KVANTILI.....	104
8.2.1	Računanje kvantilov in kvantilnih rangov iz ranžirne vrste	104
8.2.2	Kvantili s posebnimi imeni	105
8.2.3	Računanje kvantilov in kvantilnih rangov iz frekvenčnih porazdelitev.....	107
8.3	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA.....	108
9	SREDNJE VREDNOSTI.....	110
9.1	SREDNJE VREDNOSTI.....	110
9.1.1	Aritmetična sredina (M)	110
9.1.2	Tehtana aritmetična sredina	111
9.1.3	Mediana	113
9.1.4	Modus	114
9.1.5	Harmonična sredina	114
9.1.6	Geometrijska sredina	115
9.2	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA.....	116
10	MERE VARIABILNOSTI IN VERJETNOSTNE PORAZDELITVE.....	117
10.1	MERE VARIABILNOSTI.....	117
10.1.1	Razmiki.....	117
10.1.2	Varianca.....	117
10.1.3	Standardni odklon.....	119
10.1.4	Koeficient variabilnosti	120
10.2	VERJETNOSTNE PORAZDELITVE.....	121
10.2.1	Verjetnost in verjetnostne porazdelitve	121
10.2.2	Normalna porazdelitev	122

10.3	MERE ASIMETRIJE IN SPLOŠČENOSTI	123
10.3.1	Koeficient asimetrije.....	123
10.3.2	Koeficient sploščenosti	124
10.4	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA.....	125
11	ANALIZA ČASOVNIH VRST	126
11.1	GLAJENJE.....	126
11.2	TREND.....	127
11.2.1	Linearni trend.....	127
11.2.2	Nelinearni trendi	131
11.3	VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA	131
	LITERATURA.....	132

KAZALO SLIK

Slika 1:	Izračun cene z davkom	7
Slika 2:	Izračun marže v % od nabavne cene.....	7
Slika 3:	Podatki za izdelavo predračuna	8
Slika 4:	Predračun	8
Slika 5:	Ponazoritev sklepnega računa.....	9
Slika 6:	Primer verižnega računa	10
Slika 7:	Delitev po ključu.....	12
Slika 8:	Porazdelitev odvisnih stroškov na nabavno vrednost.....	12
Slika 9:	Enostavna delitvena kalkulacija	14
Slika 10:	Enostavna delitvena kalkulacija z upoštevanjem kala.....	14
Slika 11:	Delitvena kalkulacija: izračun proizvodne cene izdelkov istega tipa	15
Slika 12:	Določanje proizvodne cene z upoštevanjem neposrednih in skupnih stroškov.....	16
Slika 13:	Kalkulacija z upoštevanjem skonta	17
Slika 14:	Posojilodajalec posodi denar.	19
Slika 15:	Posojilojemalec vrne izposojeni znesek in obresti.	19
Slika 16:	Obresti na depozit za obdobje krajše od enega leta.....	22
Slika 17:	Dekurzivno obrestovanje	24
Slika 18:	Anticipativno obrestovanje	25
Slika 19:	Glavnica in kumulativne obresti pri navadnem obrestnem računu	27
Slika 20:	Obrestno obrestno obrestovanje	28
Slika 21:	Obračun končne glavnice pri obrestno obrestnem varčevanju.	29
Slika 22:	Letna in večkrat letna kapitalizacija obresti	30

Slika 23: Izračun konformne obrestne mere.....	32
Slika 24: Funkcija NOMINAL.....	33
Slika 25: Uporaba funkcije NOMINAL.....	34
Slika 26: Obračun pozitivnih obresti na osebnem računu.....	39
Slika 27: Funkcija FV.....	42
Slika 28: Končna vrednost prenumerandnih zneskov.....	44
Slika 29: Funkcija PV.....	46
Slika 30: Izračun začetne vrednosti rente s funkcijo PV.....	47
Slika 31: Funkcija PMT.....	47
Slika 32: Izračun mesečnega varčevalnega zneska.....	48
Slika 33: Funkcija FV za izračun končne vrednosti depozita.....	49
Slika 34: Začetna vrednost depozita, izračunana s PV.....	50
Slika 35: Začetna vrednost kredita.....	54
Slika 36: Izračun mesečne anuitete s funkcijo PMT.....	55
Slika 37: Funkcija PPMT.....	55
Slika 38: Razdolžnina v posamezni anuiteti.....	56
Slika 39: Funkcija IPMT.....	57
Slika 40: Obresti v določeni anuiteti.....	58
Slika 41: Funkcija RATE.....	59
Slika 42: Izračun obrestne mere.....	60
Slika 43: Izračun obresti na kredit v navadnem letu glede na dolžino meseca.....	61
Slika 44: Obračun obresti obročnega kredita.....	62
Slika 45: Izračun anuitete z uporabo sestavljene obrestne mere.....	63
Slika 46: Amortizacijski načrt anuitetnega kredita.....	64
Slika 47: Amortizacijski načrt obročnega kredita.....	65
Slika 48: Primer črtnega grafikona.....	77
Slika 49: Primer stolpčnega grafikona.....	77
Slika 50: Primer krožnega grafikona.....	78
Slika 51: Izračun strukturnega deleža.....	80
Slika 52: Izračun koeficienta.....	81
Slika 53: Izračun statističnega koeficienta.....	82
Slika 54: Izračun indeksa s stalno osnovo.....	85

Slika 55: Izračun verižnega indeksa.....	86
Slika 56: Izračun verižnega indeksa in stopnje	86
Slika 57: Frekvenca in relativna frekvenca.....	92
Slika 58: Izračun absolutne in relativne kumulativne frekvence	93
Slika 59: Starostna struktura prebivalcev na popisu leta 2002	94
Slika 60: Primer krožnega grafikona za prikaz relativne frekvence	94
Slika 61: Stolpčni graf (histogram) za prikaz absolutnih frekvenc.....	95
Slika 62: Linijski graf (poligon) za prikaz absolutnih frekvenc	96
Slika 63: Poligon za prikaz kumulativnih relativnih frekvenc.....	96
Slika 64: Primer podatkov za frekvenčno porazdelitev	97
Slika 65: Izračun frekvenc s pomočjo funkcije Frequency.....	98
Slika 66: Izračun frekvenc, relativnih in kumulativnih frekvenc.....	98
Slika 67: Excelovo orodje Histogram	99
Slika 68: Pogovorno okno Histogram s podatki	100
Slika 69: Frekvence, kumulativne relativne frekvence in stolpčni graf.....	101
Slika 70: Rezultati testa znanja	102
Slika 71: Ranžirna vrsta	102
Slika 72: Ranžirna vrsta, rang in kvantilni rang.....	103
Slika 73: Primer izračuna kvantilov	107
Slika 74: Podatki o prodaji.....	109
Slika 75: Aritmetična sredina.....	111
Slika 76: Tehtana aritmetična sredina iz frekvenčne porazdelitve	112
Slika 77: Mediana	113
Slika 78: Geometrijska sredina	116
Slika 79: Izračun variance s funkcijo VARP	119
Slika 80: Primer izračuna aritmetične sredine in standardnega odklona	120
Slika 81: Rezultati izpita	121
Slika 82: Primer normalne porazdelitve podatkov.....	122
Slika 83: Asimetrični porazdelitvi	123
Slika 84: Izračun mer asimetrije in sploščenosti.....	125
Slika 85: Tečaj delnice Krka (www.ljse.si, 16. 3.2008)	127
Slika 86: Linearni trend.....	129

Slika 87: Oblike raztresenih grafov	130
Slika 88: Označen raztreseni graf.....	130
Slika 89: Dodajanje trendne črte na grafikon	130
Slika 90: Trendna črta na grafu in izračun vrednosti	131

KAZALO TABEL

Tabela 1: Finančne naložbe	19
Tabela 2: Število podjetij in zaposlenih glede na velikost podjetja	76
Tabela 3: Prebivalstvo Slovenije na dan 1. 10. 2010.....	76
Tabela 4: Družine po številu otrok in tipu, Slovenija, Popis 2002 (na dan 31.3.2002).....	78
Tabela 5: Podatki o prodaji in zalogah v podjetju X	83
Tabela 6: Podatki o plačah v RS.....	87
Tabela 7: Oznake pojmov v razredih.....	89
Tabela 8: Primer oblikovanja razredov	91
Tabela 9: Primer frekvenčne porazdelitve.....	91
Tabela 10: Izračun absolutnih odklonov in njihovih kvadratov	118

PREDGOVOR

Ime predmeta Poslovna matematika s statistiko vsebuje kar dve besedi, ki pri marsikaterem človeku vzbujata strah. Ta je odveč, saj se bomo učenja lotili na drugačen način, kot ste ga bili vajeni nekoč. Zato se študija predmeta lotite sproščeno in brez predsodkov.

Eden največjih znanstvenikov našega časa, Steven Hawking, je izjavil, da vsaka formula v knjigi razpolovi število njenih bralcev. V tem gradivu se formulam žal ne moremo izogniti. Skušali pa bomo problematiko predstaviti s pomočjo primerov iz vsakdanje prakse in vas usmerjati v kritično razmišljanje, da bi se tako pripravili na reševanje nalog, s katerimi se boste srečali pri svojem delu ali v zasebnem življenju.

Predmet je sestavljen iz dveh delov: poslovne matematike in statistike. V okviru poslovne matematike spoznamo osnovne poslovne račune, se naučimo izdelovati kalkulacije, izračunati obresti ter reševati računске probleme v zvezi z varčevanji in krediti. Pri osnovah statistike spoznamo osnovne statistične pojme, ki omogočajo razumevanje in izdelavo statističnih analiz in poročil.

Uporabe poslovne matematike in statistike si v današnjem času ni mogoče zamišljati brez uporabe računalnika in ustrezne programske opreme. Najbolj razširjen in za to tematiko izredno uporaben je program MS Excel. Zato je za uspešno učenje potrebno poznavanje programa Excel v obsegu predmeta Informatika. Vse, kar se bomo naučili narediti v Excelu, je mogoče na zelo podoben način narediti tudi s pomočjo odprtokodnega programa Calc.

Poslovne matematike in statistike se ne moremo naučiti brez računanja. Ko se učite, vse primere iz tega gradiva sami rešite. Pri tem vam bodo v pomoč navodila in slike, ki so v gradivu. Rešitve primerov so najpogosteje narejene z Excelom. Ker v prikazanih rešitvah vidimo rezultate, ne pa tudi formul, so uporabljene formule prikazane kot komentarji. Na koncu vsakega poglavja so vaje za utrjevanje snovi. Te vaje naredite sami, s pomočjo kalkulatorja ali Excela.

V gradivu je uporabljena različica MS Excel 2007. Starejše različice Excela imajo vgrajene enake funkcije, le poti do njih se lahko razlikujejo. Najnovejša različica MS Excel 2010 ima spremenjene nekatere statistične funkcije. V vsakem takem primeru bomo razlike navedli. Kdor uporablja odprtokodni program za urejanje računskih preglednic Calc, iz zbirke Openoffice, ga lahko uporablja na zelo podoben način kot je opisano v tem gradivu. Calc ima namreč prav tako kot Excel vgrajene finančne in statistične funkcije.

Različice programa MS Excel, do vključno MS Excel 2007, imajo argumente funkcij v angleškem jeziku. V programu MS Excel 2010 so argumenti funkcij prevedeni v slovenščino. V času pisanja tega učbenika so bili argumenti prevedeni napačno in nekonsistentno, zato jih kljub ljubezni do slovenskega jezika, ne bomo navajali.

Če je na vašem računalniku MS Excel nameščen na običajen način, nekatere funkcije niso samodejno dosegljive. Razlogov za skrb ni, saj so vse take funkcije v vaš MS Excel vgrajene, a trenutno še nedosegljive. Vkllopiti je potrebno orodja za analizo (angl. Analysis toolpak). Postopek vklopa najdete v pomoči za vaš Excel, ki jo dobite s pritiskom na funkcijsko tipko F1, na računalnikovi tipkovnici.

Za uporabo pridobljenega znanja v praksi so pomembne še naslednje sposobnosti, ki jih bomo pri tem predmetu razvijali: pridobivanje relevantnih informacij, razumevanje problema, analitično razmišljanje in iznajdljivost. Ob vsem tem pa sta potrebna še kritična presoja rezultatov in občutek, da so dobljeni rezultati smiselni.

1 POSLOVNI RAČUNI

V tem poglavju bomo obravnavali enostavne računske metode, ki jih uporabljamo v poslovni praksi. Nekatere smo spoznali že v osnovni šoli.

1.1 RAZMERJA IN SORAZMERJA



Kaj pomeni navodilo: »Pijačo zmešajte v razmerju 1 : 6«?



Če imamo sadni sirup, pomeni, da damo v pijačo 7 enakih delov, kjer je 1 del sirupa in 6 delov vode.

Iz teh podatkov ne moremo sklepati, koliko pijače dobimo. Poznamo le razmerje, ki jo priporoča proizvajalec, da bo zmešana pijača okusna.

Če vemo, da je razmerje med najnižjo in najvišjo plačo v podjetju 1 : 10, še ne vemo, koliko znaša katera od plač. Čim pa poznamo eno od njiju, s tem poznamo tudi drugo.

Razmerja velikokrat uporabimo pri raznih recepturah. Dejanske količine določimo sami, glede na naše potrebe, ohraniti pa moramo razmerja med njimi.

Razmerje $a : b$ je pravzaprav ulomek $\frac{a}{b}$. Če deljenje izvršimo, dobimo nek rezultat k .

$$a : b = \frac{a}{b} = k$$

Dve razmerji sta enaki ali enakovredni, kadar imata enak količnik: $a : b = c : d = k$

Zapis $a : b = c : d$ imenujemo sorazmerje.

Zapisa $a : b = c : d$ in $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sta enakovredna!



$$1 : 4 = 2 : 8 = 0,25$$

$$5 : 1 = 10 : 2 = 50 : 10 = 5$$

Iz teh primerov se lahko prepričamo, da velja naslednja trditev.

Če razmerje na levi in desni pomnožimo ali delimo z istim, od 0 različnim številom, dobimo enakovredno razmerje.

Z nekaj znanja srednješolske matematike se prepričamo, da velja naslednja trditev.

V poljubnem sorazmerju $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ velja, da je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov.

S formulo to izjavo zapišemo takole.

$$a \cdot d = b \cdot c$$

1.1.1 Premo sorazmerje

V vsakdanjem življenju velikokrat naletimo na premo sorazmerne količine.



Ena tablica čokolade stane 1,50 €. Koliko stane 6 tablic enake čokolade?



6 tablic čokolade stane $6 \times 1,50$ €, se pravi 9,00 €.

V tem primeru smo poznali ceno enote. Kako pa se lotimo računanja, če cene enote ne poznamo?



Študent dobi za 8 ur dela 64 €. Koliko prejme za 17 ur dela?

Najprej izračunamo, koliko zasluži študent v eni uri, nato pa znesek pomnožimo s 17.

Študent zasluži na uro $64 \text{ €} : 8 = 8 \text{ €}$. V 17 urah zasluži $17 \times 8 \text{ €} = 136 \text{ €}$

Takemu načinu reševanja matematičnih problemov rečemo sklepni račun.

Vse, kar se nam je zdelo na primerih zelo preprosto, pretvorimo zdaj v splošno formulo in matematični jezik.

Spremenljivki y in x sta premo sorazmerni, če velja med njima zveza

$$y = kx, \text{ kjer je } k > 0.$$

Premo sorazmernost pomeni, da se povečanje (ali zmanjšanje) ene količine odraža v povečanju (ali zmanjšanju) druge količine za isti faktor.

1.1.2 Obratno sorazmerje

Neko delo opravi 1 delavec v 6 dneh. V kolikšnem času ga opravita 2, enako pridna delavca? Dva, enako pridna delavca, opravita delo v 3 dneh.

Dvakrat **več** delavcev porabi dvakrat **manj** časa, zato sta količini obratno sorazmerni.

Spremenljivki x in y sta obratno sorazmerni, če je njun produkt konstanten:

$$xy = k$$

To pa lahko preuredimo v izraz $y = \frac{k}{x}$

Povečanje ene količine za nek faktor, pomeni zmanjšanje druge količine za isti faktor.

1.2 PROCENTNI RAČUN

Velikokrat nas zanimajo odnosi med deleži v neki celoti ali odnosi med posameznim deležem in celoto. Včasih nam absolutni zneski ali količine povedo manj kot odnosi med njimi.

Komercialista npr. zanima, kolikšen je delež zaslужka v ceni nekega blaga. Predavatelja npr. zanima, kolikšen delež študentov je na izpitu dosegel odlično oceno. Na podobna vprašanja odgovarjamo v odstotkih. Npr. 15 % študentov, ki so junija 2010 opravljali izpit iz Poslovne matematike s statistiko, je doseglo oceno 9.

Najprej se spomnimo, kaj predstavljajo procenti in kaj sploh pomeni procentni oz. odstotni zapis števila.

$$12 \% = \frac{12}{100} = 0,12$$

Vsi trije zapisi so popolnoma enakovredni.

Spomnimo se, da v Excelu odstotni format omogoča prikaz števila v odstotkih. Paziti moramo, kako vpišemo vrednost, kadar celice oblikujemo naknadno.



10 % predstavlja vrednost 0,1. V celico Excelove tabele je treba vpisati 0,1 in ne 10. Če vpišemo 10, se bo po nastavitvi odstotnega formata v celici prikazala stokrat večja vrednost, se pravi 1000 %.

Procent je tujka. Uporabljamo tudi slovenski izraz odstotek. Procent ali odstotek pove, **kolikšen del celote, predstavlja dana količina.**

Procent vedno predstavlja delež neke količine. Zato ob njem povemo delež česa je oz., na katero osnovo se nanaša.

Celota ali osnovna vrednost, od katere računamo delež, je 100 %. Ta celota je izhodišče za računanje deležev.

Procentna mera p % pomeni $\frac{p}{100}$ od celote.



Izdelek stane 590 €. Na razprodaji ga znižamo za 30 %. Kolikšna je njegova cena po znižanju in koliko znaša popust?



Osnova je 590 € in predstavlja 100 %.

30 % od osnove je $\frac{30}{100}$ od osnove in jo izračunamo po formuli $\frac{30}{100} \cdot 590 = 177$.

Popust torej znaša 177 €. Znižano ceno izdelka v € izračunamo po formuli

$$590 - 177 = 413.$$

Cena izdelka s popustom je v bistvu 70 % osnovne cene. Izračunali bi jo lahko tudi po formuli

$$\frac{70}{100} \cdot 590 = 413.$$

Oglejmo si še nekaj primerov uporabe procentnega računa.



Cena televizorja brez davka na dodano vrednost je 1.000 €. Koliko znaša davek na dodano vrednost, če je 20 %? Kolikšna je prodajna cena televizorja?



20 % DDV od osnovne cene izračunamo takole.

$$\frac{20}{100} \cdot 1000 = 200$$

Ker je zapis $\frac{20}{100}$ enakovreden zapisu 20 %, lahko pri izračunu uporabimo formulo, ki jo vidimo v tabeli.

	A	B	C	D
1		Cena brez DDV	20%	
2	Izdelek	davka	DDV	=B3*20%
3	televizor	1.000,00	200,00	
4				

Slika 1: Izračun cene z davkom

Prodajno ceno izračunamo tako, da seštejemo osnovno ceno in davek. Prodajna cena televizorja je tako 1200 €, kar pomeni 120 % osnovne cene.

V povezavi s trgovino uporabljamo izraz oz. termin marža. Maržo izračunamo kot razliko med prodajno in nabavno ceno blaga oz. artiklov, ki jih prodajamo.

$$\text{marža} = \text{prodajna cena blaga} - \text{nabavna cena blaga}$$

Znesek, ki ga dobimo, nam pove, koliko smo zaslužili. V primeru, da imamo v ponudbi več artiklov, nam o tržni zanimivosti in uspešnosti določenega artikla več pove razmerje med maržo in nabavno ceno. To razmerje izrazimo v odstotkih.



Trgovec je prodal dva artikla (ART1 in ART2). Prvega je kupil za 1.240 € in prodal za 1.490 €. Drugega je kupil za 1.700 € in prodal za 1.990 €. Kaj lahko povemo o zaslužku trgovca in marži?



Nalogo rešimo s pomočjo Excela. Rešitev prikazuje Slika 2. Uporabljena formula je napisana kot komentar (v okvirčku).

	A	B	C	D	E	F
		Nabavna cena v €	Prodajna cena v €	Marža v €	Delež marže glede na nabavno ceno	
1	Artikel					=D3/B3
2	ART1	1.240	1.490	250	20,16%	
3	ART2	1.700	1.990	290	17,06%	

Slika 2: Izračun marže v % od nabavne cene

Marža je razlika med prodajno in nabavno ceno. Od artikla ART1 smo prejeli 250 € marže, od artikla ART2 pa 290 € marže.

Delež marže od nabavne cene izračunamo tako, da izračunamo razmerje med maržo in nabavno ceno. Rezultat je decimalno število. V stolpcu E smo izračune prikazali v odstotnem formatu.

Trgovec je s prodajo drugega artikla nominalno zaslužil več, dosegel pa je nižjo maržo glede na nabavno ceno v primerjavi s prvim artiklom.

V praksi se včasih pojavljajo težave pri računanju procentov. Do njih prihaja, ker ne razmislimo dobro, kaj je celota, od katere računamo delež. Oglejmo si nekaj primerov.



Kupcu pripravljamo predračun za pet artiklov. Cene, stopnja DDV in popusti so vpisani v tabeli (Slika 3). Izdelajmo predračun.

	A	B	C	D	E	F
1	Koda artikla	Merska enota	Količina	Osnovna cena v €	DDV v %	Popust
2	A	kos	4	19	20%	0
3	B	kos	13	20	20%	3%
4	C	kos	34	22	20%	5%
5	J	kos	15	23	20%	3%
6	H	kos	50	16	8,5%	10%

Slika 3: Podatki za izdelavo predračuna



Najprej izračunajmo prodajno ceno artiklov brez DDV, a z upoštevanjem popusta. Ceno posameznega artikla z upoštevanjem popustom izračunamo tako, da pomnožimo količino (stolpec C) in ceno (stolpec D) in pomnožimo z deležem (1–popust v %). DDV izračunamo na znesek brez DDV (stolpec G), z upoštevanjem davčne stopnje (stolpec E). Končni znesek z DDV je vsota obračunanega DDV in vrednosti. Rešitev je na sliki (Slika 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Koda artikla	Merska enota	Količina	Osnovna cena v €	DDV v %	Popust	Znesek brez DDV	Vrednost DDV	Znesek z DDV	=C2*D2*(1-F2)	
2	A	kos	4	19	20%	0	76,00	15,20	91,20	=G2*E2	
3	B	kos	13	20	20%	3%	252,20	50,44	302,64		
4	C	kos	34	22	20%	5%	710,60	142,12	852,72		
5	J	kos	15	23	20%	3%	334,65	66,93	401,58		
6	H	kos	50	16	8,5%	10%	720,00	61,20	781,20	=G2+H2	

Slika 4: Predračun

Probleme procentnega računa najpogosteje računamo na enega od naslednjih načinov:

- s sklepnim računom,
- s sorazmerji,
- z linearnimi enačbami.

1.3 SKLEPNI RAČUN

Sklepni račun je postopek, pri katerem izračunamo neznano količino iz znanih količin, ki so z neznano količino v premem ali v obratnem sorazmerju.

Začnimo s preprostim primerom.



3 kg pralnega praška stane 9,30 €. Koliko stane 50 kg pralnega praška?



Prepoznali smo premo sorazmerje. Najprej izračunamo ceno na enoto (1 kg), nato pa sklepamo, da ima 50 kg praška petdesetkrat višjo ceno kot 1 kg.

Neznano količino označimo z x in izračunamo kot prikazuje naslednja enačba.

$$x = \frac{50 \cdot 9,30}{3} = 15,50$$

Oglejmo se še nekaj primerov sklepnega računa, kjer nastopajo procenti.

Zanimiv je primer vračila DDV. Marsikdo meni, da povračilo 20 % davka na dodano vrednost (DDV) pomeni, da bomo od plačanega zneska prejeli 20 % zneska nazaj. Pa je res tako? Ne. Prepričajmo se.



Bosanski državljani kupi v slovenski trgovini televizor po ceni 400 €. Ve, da je stopnja DDV-ja v Sloveniji 20 %. Koliko denarja lahko dobi nazaj, po prenosu televizorja čez državno mejo?



Precej ljudi se računanja loti napačno in so ob izplačilu DDV-ja razočarani. Pričakovani znesek izračunajo od bruto zneska, kar je seveda napačno. Upoštevati moramo, da je bruto cena televizorja 120 % osnovne cene. S pomočjo sklepnega računa pa nato izračunamo 20 %.

Najprej skupno ceno delimo s 120, da dobimo 1 %. Nato pa dobljeni znesek pomnožimo z 20, da dobimo 20 %. V istem računu to izvedemo takole.

$$X = \frac{400 \cdot 20}{120} = 66,67$$

Za uporabo sklepnega računa je značilen prikaz, ki ga vidimo na sliki (Slika 5).

	A	B	C	D	E
1	Cena		Delež		
2	400	×	120%		
3	x		20%		
4					
5	DDV	66,67			

Formula: $=A2*C3/C2$

Slika 5: Ponazoritev sklepnega računa

Kolikšen delež v % pa je 66,67 € od 400 €?

66,67 delimo s 400 in dobimo 16,67 %.

Pri 20 % DDV torej prejmemo od plačanega zneska 16,67 % zneska, saj toliko znaša delež DDV v bruto ceni artikla.

1.4 VERIŽNI RAČUN

Če v sklepnem računu nastopajo le premo sorazmerne količine, si lahko pri računanju pomagamo z računsko shemo, ki jo imenujemo veriga. Postopek reševanja pa imenujemo verižni račun. Uporabljamo ga pri reševanju sestavljenih nalog sklepnega računa, pri katerih nastopajo tuje merske ali denarne enote, ali takrat, ko je treba obračunati dodatne stroške prodaje ali nakupa (Čibej, 2001, 89).

Verižni račun predstavlja poenostavljeno računanje za nekatere vrste problemov. Če ga ne poznamo, lahko vse take probleme rešimo z dvema ali več sklepnimi računi (odvisno od problema).

Verižni račun bomo spoznali na primeru reševanja problemov, povezanih s tujimi valutami.

Menjalna razmerja med evrom in valutami držav članic EU, ki so uvedle evro¹, so nepreklicno določena in veljajo za prve članice evro območja od 1. januarja 1999 ter se ne spreminjajo. Poglejmo si Slovencem najbolj pomembne valute in njihove vrednosti, kjer je bilo razmerje glede na evro »zamrznjeno«.

¹ Valuto evro označujemo s kratico EUR ali z znakom €.

1 € = 1,95583 DEM
 1 € = 1936,27 ITL
 1 € = 13,7603 ATS

Od 1. januarja 2007 pa imamo menjalni tečaj tudi za slovenske tolarje: 1 € = 239,64 SIT.

Še vedno imamo precej starih pogodb in drugih dokumentov, kjer so navedene sedaj že neveljavne valute. Zato so za preračun menjalni tečaji zelo pomembni. Pri izračunih pa lahko koristi tudi verižni račun, ki ga bomo opisali na primeru.



Leta 1998 smo si izposodili 2.300 DEM, ki jih moramo sedaj vrniti v CHF. Koliko CHF moramo vrniti, če je 1 € na dan obračuna vreden 1,5823 CHF in velja menjalno razmerje 1 € = 1,95583 DEM?



Sestavimo verigo. Na levi začnemo s količino, ki jo iščemo (X). Na desni nadaljujemo s količino, na katero se vprašanje nanaša (2300 DEM) in je enakovredna iskani količini. Naslednjo vrstico na levi začnemo z njo povezano količino (1,95583 DEM), na desni pa navedemo njeno vrednost. Verigo nadaljujemo na enak način. V vsaki vrstici moramo imeti odnos enakosti oz. enakovrednosti. Veriga se zaključi, ko pridemo do merske enote, ki jo vsebuje vprašanje na začetku verige (v našem primeru CHF).

X CHF	2.300 DEM
1,95583 DEM	1 €
1 €	1,5823 CHF

Do rezultata pridemo tako, da delimo produkt količin iz desnega stolpca s produktom znanih količin iz levega stolpca (Čibej, 2001, 89).

	A	B	C	D	E	F	G
1		x CHF	2300	DEM			
2	1,95583	DEM	1	EUR			
3		1 EUR	1,5823	€			
4							
5	2300 DEM znaša CHF		1.860,74				
6							
7							

$= (C1 * C2 * C3) / (A2 * A3)$
 ali
 $= PRODUCT(C1:C3) / PRODUCT(A2:A3)$

Slika 6: Primer verižnega računa

Pri verižnih računih lahko nastane daljša veriga. Pri izračunu si tedaj pomagamo z vgrajeno Excelovo funkcijo PRODUCT. Na sliki (Slika 6), ki kaže rešitev, sta oba primera.



Verižni račun lahko uporabimo le, če v nalogi nastopajo premo sorazmerne količine. Če v nalogi nastopajo obratno sorazmerne količine, dobimo z uporabo verižnega računa napačen rezultat.

1.5 RAZDELILNI RAČUN

Razdelilni račun uporabljamo, kadar je treba neko celoto razdeliti na dva ali na več delov tako, da je zadoščeno določenemu pogoju ali sistemu pogojev. Najpogosteje se pogoji nanašajo na predpisano razmerje med deleži (Čibej, 2001, 94).

Razdelilni račun je v ekonomiji zelo uporaben. Ključnega pomena pa je tudi pri tem poslovnem računu razumevanje razmerij in sorazmerij.

Delimo na primer:

- denarne nagrade komercialistom,
- dobiček (delničarjem ali družbenikom, delavcem),
- stroške zavarovanja, prevoza, režije, špedicije, carine ipd.

Če gre za en sam pogoj oz. ključ delitve, imamo opravka z enostavnim razdelilnim računom. Kadar je pogojev več, govorimo o sestavljenem razdelilnem računu (Čibej, 2001, 94).

1.5.1 Delitev na enake dele

Najenostavnejša je delitev na enake dele. Celoto delimo s številom vseh delov.



Znesek 16.000 € je treba razdeliti na 20 enakih delov.



16.000 € delimo z 20 in dobimo 800 €. Vsak del je torej enak 800 €.

1.5.2 Delitev v razmerju



Znesek 20.000 € je treba razdeliti na dva dela, v razmerju 3 : 7.



Znesek 20.000 € razdelimo na $3 + 7 = 10$ delov. Dobimo osnovni delež 2.000 €. Prvi delež izračunamo tako, da osnovni delež 2.000 € pomnožimo s 3, drugega pa tako, da osnovni delež pomnožimo s 7. Dobimo 6.000 € in 14.000 €.

Trgovina ima z nabavo blaga stroške. Neposredni stroški so stroški blaga (nabavne cene artiklov). Z nabavo pa ima trgovina še dodatne stroške, npr. stroške prevoza. Te stroške običajno porazdelimo na nabavljene artikle in s tem določimo njihovo dejansko nabavno ceno. Odločiti pa se moramo, po katerem ključu bomo te stroške delili na nabavljene artikle. Ena možnost je nakazana v naslednjem primeru.



Prevzeli smo 3 artikle. Njihova nabavna cena je 200 €, 400 € in 80 €. Za pošiljko smo plačali 85 € prevoznih stroškov. Prevozne stroške porazdelimo na artikle glede na nabavno ceno. Kolikšen del prevoznih stroškov porazdelimo na posamezen artikel in kolikšna je nabavna cena s stroški za posamezen artikel?



Stroške porazdelimo v razmerju cen artiklov. To razmerje je $200 : 400 : 80$. S krajšanjem ga poenostavimo.

$$200 : 400 : 80 = 20 : 40 : 8 = 5 : 10 : 2$$

Kot smo se naučili, prevozne stroške najprej delimo na $5 + 10 + 2 = 17$ delov in nato vsakemu nabavljenemu artiklu prištejemo sorazmerni del prevoznih stroškov.

Najprej izračunamo strošek enega dela

$$1/17 \text{ od } 85 = 85 : 17 = 5$$

Upoštevamo razmerje $5 : 10 : 2$ in najcenejšemu artiklu (tretji artikel) prištejemo 10 €, drugemu po vrednosti (prvi artikel) 25 € in najdražjemu 50 €.

Prvi artikel ima nabavno ceno s stroški $200 € + 25 € = 225 €$, drugi $400 € + 50 € = 450 €$, tretji pa $80 € + 10 € = 90 €$.

Za delitev bi lahko uporabili tudi kakšen drugačen ključ. Če na ceno prevoza vpliva teža, bi kot ključ za delitev stroškov lahko izbrali razmerje med težami. Izračunali bi celotno težo in izračunali delež, ki jo nosi posamezni artikel.

Poglejmo še primer, kjer nastopajo %.



Trije komercialisti so presegli plan prodaje. Prvi ga je presegel za 10 %, drugi za 12 %, tretji pa za 18 %. Zato jim je na osnovi tega ključa dodeljena nagrada v znesku 2.000 €. Koliko denarja dobi vsak komercialist?



Razmerje preseganja plana je 10 : 12 : 18. Lahko ga okrajšamo in dobimo 5 : 6 : 9, vendar to za uporabo v Excelu ni bistveno.

	A	B	C	D	E
1	Nagrada	2.000,00			
2					
		Preseganje			
3	Komercialist	plana za %	Nagrada		
4	1	10	500,00	$=\$B\$1*B4/\$B\7	
5	2	12	600,00		
6	3	18	900,00		
7	Skupaj	40	2.000,00	$=SUM(C4:C6)$	

Slika 7: Delitev po ključu

Ob koncu računanja je koristno napraviti preizkus. Seštevek dobljenih deležev mora biti enak celoti, ki smo jo delili.

Sedaj pa še malo težji, vendar pomemben problem, saj se z njim pogosto srečamo v praksi.



Opravili smo prevzem blaga. V tabeli (Slika 8) so napisani artikli, prevzete količine in nabavne cene. Pri prevzemu smo imeli še 900 € odvisnih stroškov (prevoz, zavarovanje). Odvisne stroške porazdelimo na prevzete artikle glede na njihovo nabavno vrednost. Koliko se zaradi odvisnih stroškov poveča nabavna cena posameznega artikla?



Izračunajmo nabavno ceno posameznega artikla, z upoštevanjem odvisnih stroškov. Rešitev in postopek reševanja je v tabeli (Slika 8).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Odvisni stroški:		900,00					
2				$=D4/\$D\7			$=F4/B4$	
	Koda artikla	Količina	Nabavna cena za kos	Nabavna vrednost	Delež (ključ delitve)	Odvisni stroški (OS) po ključu	OS na enoto artikla	Nabavna cena artikla z OS
4	art1	120	19,60	2.352,00	26,93%	242,36	2,02	21,62
5	art2	245	17,30	4.238,50	48,53%	436,75	1,78	19,08
6	art3	97	22,10	2.143,70	24,54%	220,89	2,28	24,38
7	Skupaj	462		8.734,20	100,00%	900,00		
8								$=C4+G4$
9						$=E4*\$C\1		

Slika 8: Porazdelitev odvisnih stroškov na nabavno vrednost

V stolpcu D izračunamo nabavno vrednost posameznega artikla. Izračunamo jo kot produkt nabavne cene za kos in količine. Ključ delitve odvisnih stroškov določimo glede na celotno

nabavno vrednost. Izračunamo ga v stolpcu E, in sicer kot količnik nabavne vrednosti artikla in skupne nabavne vrednosti vseh artiklov.

Odvisne stroške v stolpcu F porazdelimo na posamezne artikle tako, da jih pomnožimo z ustreznim ključem delitve.

V stolpcu G izračunamo odvisne stroške za 1 kos artikla, v stolpcu H pa novo nabavno ceno artikla, ki upošteva tudi odvisne stroške.

1.6 KALKULACIJE

Kalkulacija je izraz, ki pomeni izračun ali obračun. V zvezi s kalkulacijami so tesno povezani pojmi: cene, stroški in dobiček (Čibej, 2001, 134).

Področja, kjer srečamo kalkulacije, so:

- izračun lastne ali proizvodne cene,
- izračuni prodajnih cen,
- delitev stroškov na stroškovna mesta,
- izračun donosnosti posameznih izdelkov ali storitev.

Podjetje, ki ima veliko konkurence, mora delati natančne kalkulacije za svoje izdelke ali storitve. Ponudbe, ki temeljijo na previsokih izračunih, lahko pomenijo izgubo posla. Če pa ne upoštevamo vseh parametrov ali se računsko zmotimo v svojo škodo, lahko to podjetje vodi v izgubo. Z znanjem preprečimo eno in drugo.

Pri izdelavi kalkulacij uporabljamo različne metode. V nadaljevanju bomo spoznali nekaj primerov, ki jih bomo kategorizirali glede na težavnost. Vendar pa dober kalkulant ne razmišlja o vrsti kalkulacije, temveč o problemu, ki ga rešuje. Pogosta napaka študenta je, da razmišlja, katero metodo bo uporabil in se skuša spomniti, katero pravilo zanjo velja. Temu rečemo tudi omejeno razmišljanje (izraz prihaja iz angleščine, kjer je v uporabi fraza »in the box thinking«). Škatla omejuje pogled in preprečuje pogled na boljše ali hitrejše rešitve. Uspešen kalkulant razmišlja o nalogi sami in, kako jo rešiti. Temu pristopu pravimo razmišljanje brez omejitev (fraza prihaja iz angleščine: «out of the box thinking»).

1.6.1 Delitvene kalkulacije

Imamo en sam artikel, na katerega porazdeljujemo stroške. Ker smo že prej rešili težje tovrstne naloge, zdaj kalkulacijo razširimo. Izračunajmo prodajno ceno izdelka z upoštevanjem stroškov nabave in zahtevano donosnostjo.



Nabavili smo 9.000 kg moke po 0,56 € za kg. Stroški nabave (prevoz in ostali stroški) so znašali 81,99 €. Kolikšna je prodajna cena zavitka po 1 kg, če želimo doseči 30 % maržo glede na nabavno vrednost?



Brez upoštevanja odvisnih stroškov oz. če teh ne bi bilo, bi dodali maržo in dobili prodajno ceno. Ker pa imamo še stroške nabave, moramo le-te prej porazdeliti na nabavljeno količino. Postopek reševanja vidimo na sliki (Slika 9).

Elektronska naprava (kalkulator ali računalnik) računa z veliko decimalnimi mesti. Ker prodajno ceno določimo v €, dobljene rezultate zaokrožimo na dve decimalni mesti. Če v Excelu uporabimo ukaz oblikovanje celic, lahko nastavimo prikaz števil na dve decimalni mesti. Vedeti pa moramo, da je v celici še vedno število z več decimalnimi mesti (kar vidimo,

ni to, kar je v celici). Kot smo se naučili pri Informatiki, za zaokrožanje v Excelu uporabimo funkcijo ROUND.

Kdaj se odločimo uporabiti ROUND in kdaj je dovolj oblikovanje števila v celici na dve decimalni mesti? ROUND uporabimo, če moramo v nadaljevanju še računati s to celico in mora biti pri obračunu uporabljena zaokrožena vrednost. V našem primeru bi določili prodajno ceno kg moka 0,74 €. Če bi nas v nadaljevanju zanimalo, koliko prometa bomo s to moko ustvarili, bi prodajno količino pomnožili z 0,74. Če pa bi uporabili pri izračunu vrednost, ki je zapisana v celici H3 (Slika 9), bi bila izračunana prodajna vrednost nekoliko prenizka.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Odvisni stroški za celotno nabavo				81,99				
2	Artikel	Merska enota	Količina	Nabavna cena (NC) na enoto	Odvisni stroški (OS) na enoto	Dejanska NC	Marža	Prodajna cena	
3	moka	kg	9.000	0,56	0,00911	0,56911	30%	0,739843	
4									
5									

Formulae shown in the image:

- $=E1/C3$ (for cell E5)
- $=F3*(1+G3)$ (for cell H3)
- $=D3+E3$ (for cell F3)

Slika 9: Enostavna delitvena kalkucija

Nalogo lahko še nekoliko dopolnimo. Pri nabavi določenih artiklov se zgodi, da se nekaj blaga izgubi (npr. razsuje po tleh), razbije, ukrade ipd. Takim izgubam blaga pravimo tudi kalo. Če imamo izkušnje s predhodnimi nabavami, lahko kalo vnaprej upoštevamo pri izračunu nabavne in prodajne cene.



Nabavili smo 6.000 kg soli po 0,40 € za kg. Stroški nabave (prevoz in ostali stroški) so znašali 252 €. Kolikšna je prodajna cena zavitka po 1 kg, če želimo doseči 30 % maržo glede na nabavno vrednost in imamo pri pakiranju v zavitke 2 % kala?



Rešitev in postopek reševanja je v tabeli (Slika 10).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Marža v % na nabavno vrednost				30%		
2	Izguba pri embalaranju blaga				2%		
3	Blago	Merska enota	Nabavljena količina	Nabavna cena na enoto	Prodajna količina		
4	sol	kg	6.000	0,40	5.880		
5							
6	Fakturirana nabavna vrednost blaga				2.400,00		
7	Odvisni stroški				252,00		
8	Nabavna vrednost skupaj				2.652,00		
9	Marža				795,60		
10	Končna prodajna vrednost				3.447,60		
11	Prodajna cena na enoto				0,59		

Formulae shown in the image:

- $=C4*(1-D2)$ (for cell F4)
- $=C4*D4$ (for cell E4)
- $=E6+E7$ (for cell E6)
- $=E8*D1$ (for cell F8)
- $=E10/E4$ (for cell E11)

Slika 10: Enostavna delitvena kalkucija z upoštevanjem kala

Naloge se bomo lotili podobno kot prej. Upoštevati pa moramo, da je osnova za izračun prodajne cene nabavljena količina z odšteto izgubljeno količino soli.

Najprej izračunamo nabavno vrednost blaga, ki nam jo je zaračunal dobavitelj. Na prevzemu imamo fakturirano nabavno vrednost, ki je produkt količine in dobaviteljeve cene na enoto. K temu znesku prištejemo še odvisne stroške in dobimo ceno, ki smo jo plačali, da imamo blago v skladišču. To je naša nabavna vrednost blaga.

Zahtevano maržo izračunamo kot produkt 30 % in nabavne vrednosti blaga. Skupni znesek, ki ga želimo iztržiti po prodaji, je vsota nabavne vrednosti in marže oz. 130 % nabavne vrednosti blaga.

Če pri pakiranju ne bi imeli kala, bi ceno na enoto dobili tako, da bi prodajno vrednost blaga delili z nabavljeno količino. Ker pa bo po pakiranju 2 % blaga izgubljenega, ceno na enoto izračunamo tako, da prodajno vrednost blaga delimo z nabavljeno količino zmanjšano za 2 % nabavljene količine oz. delimo z 98 % nabavljene količine, kar je enakovredno.

$$6.000 - 2\% \cdot 6.000 = 6.000 \cdot (1 - 2\%) = 6.000 \cdot (100\% - 2\%) = 98\% \cdot 6.000 = 5.880$$

Količina, s katero delimo, da dobimo prodajno ceno na enoto, je torej 5.880.

Primer delitve odvisnih stroškov po ključu na več artiklov smo že naredili v poglavju *Delitev v razmerju*.

Najbolje bo, da si ogledamo še en primer določanja proizvodne cene.



V opekarni so proizvedli 170.000 kosov opek tipa M1 z volumnom 18,53 dm³, 420.000 kosov opek tipa M2 z volumnom 22,77 dm³ in 300.000 kosov opek tipa M3 z volumnom 8,9 dm³. Celotni stroški proizvodnje so znašali 397.500 €. Izračunajmo proizvodno ceno za posamezno vrsto opeke, če kot kriterij za delitev stroškov upoštevamo volumen opek.



V Excelu sestavimo pregledno tabelo (Slika 11).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Proizvodni stroški		397.500,00				
2							
3							
4	Tip izdelka	Količina	Volumen v dm ³ na enoto	Skupni volumen v dm ³	Proizvodna cena za kos		
5	M1	170.000	18,53	3.150.100	0,48		
6	M2	420.000	22,77	9.563.400	0,59		
7	M3	300.000	8,9	2.670.000	0,23		
8	Skupaj	890.000		15.383.500			

Slika 11: Delitvena kalkulacija: izračun proizvodne cene izdelkov istega tipa

Najprej izračunajmo skupni volumen proizvedenih opek. Ceno za 1 dm³ opeke izračunamo tako, da vse stroške delimo s celotnim volumnom.

Lastno oz. proizvodno ceno posamezne opeke dobimo tako, da upoštevamo njen volumen. Volumen opeke, izražen v dm³, pomnožimo s ceno za 1 dm³ opeke.

Rezultate smo prikazali na dve decimalni mesti. S pomočjo funkcije ROUNDUP bi jih lahko zaokrožili navzgor, na 2 decimalni mesti. Če bi uporabili običajno zaokrožanje, bi bila cena nekaterih izdelkov nižja od proizvodne, kar pa si ne želimo.

1.6.2 Kalkulacija z dodatki

Kalkulacije z dodatki pomenijo sestavljanje lastne oz. proizvodne cene, pri kateri neposrednim stroškom materiala in dela po nekem ključu dodamo še delež splošnih stroškov.



Pri izdelavi izdelka A smo imeli 15.000 € neposrednih stroškov (neposredno delo na izdelku in material), pri izdelavi izdelka B 12.000 € neposrednih stroškov in pri izdelavi izdelka C 33.000 € stroškov. Skupni stroški (obratovalni stroški, nadzor, kontrola ipd.) so bili 20.000 €. Kakšni so skupni stroški na enoto posameznega izdelka, če je bilo izdelka A izdelanega 6.000 kosov, izdelka B 5.000 kosov, izdelka C 11.000 kosov in kot ključ za delitev stroškov vzamemo neposredne stroške dela?



Naloga ni težka. Pomembno pa je, da pazljivo sestavimo tabelo, ki jo bomo rešili s pomočjo Excela. Rešitev in postopek reševanja je v tabeli (Slika 12).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Skupni stroški	20.000				=F4/B4	
2				=B\$1*D4			
3	Izdelek	Količina	Neposredni stroški (NS) v €	Delež NS glede na skupne NS	Delež sk. stroškov v €	Proizvodna cena (PC) izdelka sk.	PC izdelka na enoto
4	A	6.000	15.000	25%	5.000	20.000	3,33
5	B	5.000	12.000	20%	4.000	16.000	3,20
6	C	11.000	33.000	55%	11.000	44.000	4,00
7			60.000		20.000	80.000	

Slika 12: Določanje proizvodne cene z upoštevanjem neposrednih in skupnih stroškov

Skupne stroške vpišemo posebej. V tabeli vsakemu izdelku namenimo svojo vrstico. V stolpcih A, B in C so podatki. V stolpcu D pa izračunamo, kolikšen del vseh neposrednih stroškov predstavlja izdelovanje posameznega artikla. Glede na dobljeni ključ izračunamo skupne stroške, ki jih porazdeljujemo na posamezni izdelek. V stolpcu F izračunamo proizvodno ceno posameznega izdelka v celi seriji. V stolpcu G pa ceno iz stolpca F porazdelimo na enoto izdelka.

Preden končamo s kalkulacijami, pogledjmo še en primer, ki se zdi zelo enostaven, pa vendarle včasih naredimo napako v razmišljanju. Ko smo spoznali procentni račun, smo poudarili, da je zelo pomembno upoštevati pravilno osnovo.



Proizvajalčeva cena slaščice je 0,75 €. Če naročimo vsaj 500 kosov, nam proizvajalec prizna 15 % popust. Če račun plačamo takoj, nam prizna še 2 % skonto² na fakturirano vrednost. Z dobavo imamo 50 € stroškov prevoza. Za kritje dodatnih stroškov in zaslužek obračunamo še 40 % maržo. Koliko nas stane ena slaščica in kolikšna je prodajna cena slaščice, če nabavimo 500 kosov?



Je prav, da popuste kar seštejemo? Lotimo se razmišljanja in računanja, nato pa odgovorimo še na to vprašanje.

Postopek reševanja je lepo razviden iz spodnje tabele (Slika 13).

² Po SSKJ je skonto zmanjšanje prodajne cene pri takojšnjem plačilu. Blagajniški popust je kasaskonto.

Nabavna cena na kos, ki zajema proizvajalčevo ceno in del prevoznih stroškov, je 0,72 €. Prodajna cena na kos je za 40 % povečana nabavna cena. Znaša 1,01 €.

Dodatni popust (skonto) obračunamo na ceno s popustom. Osnova za računanje skonta je 85 % cene slaščice in ne njena polna cena. To pomeni, da popustov 15 % in dodatnega popusta 2 % **ne smemo** sešteti in od osnove obračunati 17 % popusta. Iz zgornje tabele se lahko prepričamo, da je dejanski popust 16,7 %. Ker je skonto v našem primeru majhen, razlika ni velika.

	A	B	C	D
1	Cena slaščice na kos	0,75		
2	Količina	500		
3	Popust na količino	15%		
4	Fakturirana vrednost	318,75		
5	Skonto	2%		
6	Za plačilo	312,38		
7	Direktni stroški nabave	50,00		
8	NC na kos	0,72		
9	Marža	40%		
10	PC na kos	1,01		
11				
12	Plačilo proizvajalcu na kos	0,62475		
13	Delež na osnovno ceno	83,30%		
14	Dejanski popust	16,70%		

Slika 13: Kalkulacija z upoštevanjem skonta

1.7 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

1. Delavec dobi za 8 ur dela 75 €. Koliko prejme za 19 ur dela? Koliko prejme za 15 ur nedeljskega dela, ki se plača 50 % več?

Rešitev: 178,13 €; 210,94 €.

2. Cena izdelka skupaj z 8,5 % DDV znaša 1.020 €. Koliko znaša DDV?

Rešitev: 79,91 €.

3. Televizor je stal skupaj z 20 % DDV 1.196,10 €. V času 14 dnevne akcije ga je trgovec znižal za 25 %. Koliko je televizor stal v času akcije? Po končani akciji mu je trgovec ceno zvišal za 16 %. Kolikšna je sedaj cena televizorja? Izračunajte cene brez DDV, DDV in skupne cene.

Rešitev: V času akcije je bila cena televizorja 897,08 (osnova 747,57 €, DDV znaša 149,51 €). Po ponovni podražitvi je cena 1.040,61 € (osnova 867,17 €, DDV znaša 173,43 €).

4. Trgovec je prodal dva artikla. Prvega je kupil za 12.314 € in prodal za 16.990 €. Drugega je kupil za 11.240 € in prodal za 13.540 €. Kaj lahko povemo o zaslužku trgovca in marži?

Rešitev: prvi artikel – zaslužek 4.676 €, marža 37,97 %; drugi artikel – zaslužek 2.300 €, marža 20,46 %.

5. Izvozimo sol, ki jo prodajamo v zavitkih po 2 kg. En zavitek stane 1,20 €. Koliko evrov dobimo za 20 t (ton) soli, če vračunamo 5 % stroške zavarovanja tovora?

Rešitev: 12.600 €.

6. Znesek 44.000 € je treba razdeliti na dva dela, v razmerju 2 : 9. Kolikšna dela dobite?

Rešitev: 8.000 €, 36.000 €.

7. Podjetje imajo v lasti trije družbeniki. Prvi ima 40 % lastnine, drugi 35 % in tretji 25 %. Podjetje ima ob koncu leta 200.000 € dobička. Koliko bruto denarja prejme vsak družbenik, če podjetje razdeli le 50 % dobička (100.000 €). Razdelijo pa si ga delavci in družbeniki. Delavci prejmejo 20 %, družbeniki pa 80 %, v skladu z njihovimi deleži kapitala.

Rešitev: Delavci skupaj prejmejo 20.000 €. Prvi družbenik prejme 32.000 €, drugi 28.000 € in tretji 20.000 €.

8. Kupujete nove hlače. Na etiketi piše, da se hlače po dolžini krčijo za 3 %. Kako dolge morajo biti nove hlače, če je potrebna dolžina (tudi po pranju) 119 cm.

Rešitev: 122,68 cm (rezultat 122,57 ni pravi, čeprav drži, da zaradi tako majhne razlike hlače še ne bodo prekratke).

9. Leta 2000 ste si izposodili 3.000 DEM, ki jih morate sedaj vrniti v €. Koliko evrov morate vrniti, če je 1 € na dan obračuna vreden 1,95583 DEM?

Rešitev: 1.533,88 €.

10. Prevezli ste 5 artiklov. Njihova nabavna cena je 1.000 €, 500 €, 4.000 €, 1.200 € in 8.000 €. Za pošiljko ste plačali 1.200 € prevoznih stroškov. Kolikšen strošek pripada posameznemu artiklu, če prevozne stroške porazdelite na artikle glede na nabavno ceno. Pri izračunu zaokrožite rezultate na dve decimalni mesti.

Rešitev: 81,63 €, 40,82 €, 326,53 €, 97,96 €, 653,06 €.

11. Štirje komercialisti so ustvarili razliko med prodajno in nabavno ceno (RVC) v znesku 69.600 evrov. Koliko nagrade prejme vsak, če se kot nagrada deli 10 % RVC-ja in to v razmerju 2 : 3 : 3 : 4?

Rešitev: 1.160 €, 1.740 €, 2.320 €.

12. Nabavili smo 12.000 kosov artikla A po ceni 200 € za kos. Za pošiljko smo plačali še 36.000 € različnih dajatev. Izdelek bomo prodajali s 40 % maržo. Kolikšna bo prodajna cena izdelka, če vse cene vsebujejo 20 % DDV? Kolikšna bo cena brez davka?

Rešitev: 284,20 €, 236,83 €.

13. Nabavili smo 60.000 kg moke po 0,55 € za kg. Stroški nabave (prevoz in ostali stroški) so znašali 1.510 €. Kolikšna je prodajna cena zavitka po 1 kg, če želimo doseči 40 % maržo glede na nabavno vrednost in imamo pri pakiranju 1,5 % kala?

Rešitev: 0,82 € (zaokroženo na dve decimalni mesti).

14. V livarni ulivajo ulitke iz iste zlitine v različnih dimenzijah oz. težah. Proizvedli so 2.900 ulitkov tipa A s težo 17,6 kg, 4.000 ulitkov tipa B s težo 22,2 kg in 1.000 ulitkov tipa C s težo 28,6 kg. Celotni stroški proizvodnje so znašali 896.100,80 €. Izračunajte ceno kg zlitine in lastno ceno za posamezno vrsto ulitkov, če kot kriterij za delitev stroškov upoštevate porabljen material.

Rešitev: 5,32 €/kg, A: 93,63 €, B: 118,10 €, C: 152,15 €.

15. Podjetje nabavi 2 tona praška za izdelavo osvežilne pijače po ceni 9.160 € na tono. Nabavni stroški znašajo 680 €. Kolikšna naj bo prodajna cena 200 gramske neto plastenke praška, če želimo doseči 25 % maržo, plastenka stane 0,40 €, 1 % praška pa se bo pri pakiranju izgubil?

Rešitev: 9.900 plastenk, cena 2,90 € za plastenko.

2 OBRESTOVANJE

Zelo pomemben pojem, tesno povezan s skoraj vsemi finančnimi naložbami, je pojem obresti.

Finančna naložba je naložba, ki prinaša dohodek v obliki denarja. Najpogostejše finančne naložbe in, kako imenujemo dohodek vlagatelja, so prikazane v tabeli (Tabela 1).

Tabela 1: Finančne naložbe

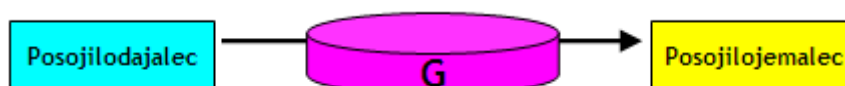
Finančna naložba	Dohodek
Kredit	Obresti
Leasing	Obresti
Varčevanje	Obresti
Obveznice	Obresti
Delnice	Dividende

Zato bomo razložili, kaj so obresti, vrste in načini obrestovanja ter se naučili, kako računamo obresti.

2.1 OSNOVE RAČUNANJA OBRESTI

Obresti najlažje razumemo na primeru kredita. Obresti so nadomestilo, ki ga dolžnik (kreditojemalec) plača upniku (kreditodajalcu) zato, ker mu je ta za neko obdobje prepustil v uporabo določena finančna sredstva. Višina obresti je odvisna od treh količin:

- **glavnice** oziroma zneska, ki ga je dolžnik prejel od upnika,
- **časa**, za katerega je bil znesek posojen in
- **obrestne mere**, ki pove koliko odstotkov od glavnice znašajo obresti v nekem predpisanem obdobju.



Slika 14: Posojilodajalec posodi denar.



Slika 15: Posojilojemalec vrne izposojeni znesek in obresti.



Za znesek, ki ga za določeno obdobje (npr. za 91 dni) vložimo v banko, obračuna banka po preteku tega obdobja obresti. Odvisne so od obrestne mere, glavnice in trajanja naložbe (časa, v katerem je bila glavnica vložena).

Obdobje, na katerega se nanaša obrestna mera, je najpogosteje eno leto. Trajanje naložbe pa se le redko ujema z obdobjem, na katerega se nanaša podana obrestna mera.

Obdobje med dvema zaporednima pripisoma obresti imenujemo kapitalizacijska doba. Ime kapitalizacijska doba izhaja iz dejstva, da s pripisom obresti k glavnici, le te postanejo kapital.

V praksi najpogosteje srečamo naslednji kapitalizacijski dobi: eno leto (npr. za devizno varčevanje) in en mesec (npr. obrestovanje denarnih sredstev na transakcijskem računu).

Kasneje bomo ugotovili, da je višina obresti odvisna tudi od metode obračuna in se naučili te metode iz podane obrestne mere tudi prepoznati. V praksi se uporabljajo različni načini obračunov obresti. Znanje s tega področja je zelo koristno, če ste v vlogi posojilojemalca ali posojilodajalca. V prvem primeru se morate znati med različnimi ponudbami odločiti za tisto, ki je za vas ugodnejša in nato preveriti, če se posojilodajalec drži dogovora in obresti pravilno obračunava. V drugem primeru, kadar se pojavite v vlogi posojilodajalca, pa je morda vaš cilj pripraviti na videz ugodne pogoje in doseči čim višji donos.

Nekatere načine obračuna obresti bomo v nadaljevanju navedli, nekaterih ne. Vsekakor bomo dali prednost načinom, ki se v naši bančni in poslovni praksi pogosteje uporabljajo.

2.1.1 Obresti za eno leto

Spoznajmo osnovno formulo za izračun obresti.

Če je **p letna obrestna mera**, znašajo **letne obresti o**, obračunane na glavnico G.

$$o = \frac{G \cdot p}{100}$$



Formulo v Excel vnesemo v obliki $= G \cdot p \%$. V celico vnesemo le desno stran, od enačaja dalje.



Glavnico G v višini 1.000 € obrestujemo 1 leto. Če znaša letna obrestna mera 3 %, izračunamo obresti za 1 leto po obrazcu.

$$o = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{1000 \cdot 3}{100} = 30$$

Na enak način izračunamo obresti za poljubno obdobje, če je podana obrestna mera za to obdobje. Če imamo npr. podano **mesečno** obrestno mero p, izračunamo **obresti za en mesec** po isti formuli.

V praksi pa se redko zgodi, da traja finančna naložba eno kapitalizacijsko dobo. Prav tako ni običajno, da bi podali mesečno obrestno mero. Najpogosteje imamo podano letno obrestno mero, naložbe pa trajajo manj kot eno leto ali več kot eno leto. Kako računamo obresti, če traja finančna naložba več kot eno kapitalizacijsko dobo, si bomo ogledali kasneje. Sedaj razmislimo, kako bi izračunali obresti, če imamo podano letno obrestno mero in je trajanje naložbe manj kot eno leto.

2.1.2 Relativna (proporcionalna) obrestna mera



V banko položimo 1.000 € za 91 dni. Banka ponuja 2,4 % letno obrestno mero. Koliko obresti bomo dobili?



Sklepamo lahko takole. Za 365 dni, kolikor traja navadno leto, dobimo obresti v višini 2,4 % od glavnice. V našem primeru bi bilo to 24 €. Ker pa naložba traja le 91 dni, delimo dobljeni znesek s 365 (da dobimo znesek na dan) in nato pomnožimo z 91. Za konkretno naložbo bi torej dobili 5,98 €.

Postopek zapišimo sedaj s formulo

$$o = \frac{G \cdot p \cdot d}{M \cdot 100}$$

kjer je **G** glavnica, **p** letna obrestna mera (OM), **M** dolžina leta v dnevih, **d** pa število dni trajanja naložbe.

Ta postopek je intuitiven in vsakemu razumljiv. Pa vendarle v praksi vse ni tako preprosto. Leto je lahko prestopno (dolžina 366 dni). Za nekatere naložbe banke uporabljajo »poenostavljeno« dolžino leta v trajanju 360 dni. Ta, dejansko neobstoječa dolžina leta, se ponekod uporablja iz zgodovinskih razlogov (lažje računanje, ko še ni bilo računalnikov), v nekaterih poslih pa zaradi poenostavitve (npr. pri postopnih varčevanjih in anuitetnih kreditih).

Obrestna mera, ki se uporablja pri linearnem načinu obračuna obresti, se imenuje relativna ali proporcionalna obrestna mera.

Izraza relativna in proporcionalna imata isti pomen (sta sinonima). V nadaljevanju bomo uporabljali izraz relativna obrestna mera.

Preden jo spoznamo, definirajmo parameter **M**, ki pove, kolikokrat letno naredimo pripis obresti:

- letna kapitalizacija ($M = 1$),
- polletna kapitalizacija ($M = 2$),
- četrtna kapitalizacija ($M = 4$),
- mesečna kapitalizacija ($M = 12$) in
- dnevna kapitalizacija ($M = 365$ ali $M = 366$, če je leto prestopno ali $M = 360$, če se uporablja poenostavljena metoda).

Z vrednostjo parametra **M** povemo, kolikokrat v letu dni opravimo kapitalizacijo obresti, ali povedano drugače, **kolikokrat je dano kapitalizacijsko obdobje krajše od enega leta** (Čibej, 2001, 200).

Pri danem kapitalizacijskem obdobju dobimo relativno obrestno mero r_{pM} iz letne obrestne mere **p** tako, da letno obrestno mero **p** delimo s številom **M**, ki pove, kolikokrat je kapitalizacijsko obdobje krajše od enega leta.

$$r_{pM} = \frac{p}{M}$$

Ne pozabimo, da je treba biti v Excelu še posebej pazljiv, saj je $\frac{p}{100} = p \%$.

Pri metodi relativne ali proporcionalne obrestne mere pravimo tudi, da smo obrestno mero preračunali na linearen način.

Primer: prilagajanje obrestne mere iz letne na mesečno



Podano imamo letno obrestno mero 6 %. Kolikšna je mesečna obrestna mera, če jo iz letne preračunamo po relativni metodi?



En mesec je ena dvanajstina leta. Iz načela preme sorazmernosti sledi, da so obresti za en mesec dvanajstkrat manjše kot za celo leto.

$$o = \frac{G \cdot p}{1200}$$

V našem primeru je torej mesečna obrestna mera $\frac{6\%}{12} = 0,5\%$.

Vemo, da se sredstva na našem transakcijskem računu obrestujejo po dejanski dolžini meseca. Obresti za en mesec se v tem primeru izračunajo po formuli:

$$o = \frac{G \cdot p \cdot d}{M \cdot 100}$$

kjer je M dolžina leta (dejanska ali 360), d pa število dni v mesecu (28, 29, 30 ali 31).

Primer: prilagajanje obrestne mere iz letne na poljubno število dni



V banko, ki je obračunala letno obrestno mero (LOM) 3 %, smo položili depozit³ 2.000 € za obdobje od 1. 3. 2010 do 29. 11. 2010. Koliko znašajo obresti, če banka uporabi dejansko dolžino leta in koliko, če pri obračunu uporabi poenostavljeno dolžino leta?



V izbranem obdobju je 273. To lahko ugotovimo s štetjem dni v koledarju, ali pa s pomočjo Excela, kjer odštejemo oba datuma in kot rezultat dobimo število dni med njima.

Za obračun obresti uporabimo formulo $o = \frac{G \cdot p \cdot d}{M \cdot 100}$. Nalogo rešimo s pomočjo Excela.

Namesto d kar odštejemo oba datuma, saj je $d = \text{končni datum} - \text{začetni datum}$.

	A	B	C	D	E	F
1	Glavnica	2.000,00				
2	LOM	3%				
3	Začetek naložbe	1.3.2010				
4	Konec naložbe	29.11.2010				
5						
6		Dolžina leta				
7		360	365			
8	Obresti	45,50	44,88			
9						
10						
11						

$=\$B\$1*\$B\$2*(\$B\$4-\$B\$3)/B7$

Slika 16: Obresti na depozit za obdobje krajše od enega leta

Opazimo, da pri enaki obrestni meri dobimo več obresti, če banka uporabi dolžino leta 360 dni.

Glavnico, ki jo na opisan način položimo v banko, imenujemo depozit.

Linearni način preračuna obrestne mere pomeni v naši novejši bančni praksi novost, ki se uporablja od 1.7.2002. Tak način se je uporabljal v tujini ves čas, pri nas pa v času pred letom 1987 in po letu 2002. Med leti 1987 in 2002 se je uporabljala metoda konformne obrestne mere, ki jo bomo spoznali v nadaljevanju.

³ Polog denarja v banko.

V bančni praksi se uporablja več načinov obračuna obresti po proporcionalni metodi, ki se razlikujejo le po uporabljenem številu dni v mesecu in letu. Naletimo na naslednje primere, kjer se upošteva:

- dolžina leta 360 dni, dolžina vseh mesecev 30 dni,
- dolžina leta 360 dni, trajanje naložbe po dejanskem številu dni,
- dolžina leta po dejanskem številu dni, trajanje naložbe po dejanskem številu dni.

V preteklosti so poenostavljeno metodo (dolžina leta 360 dni, dolžina meseca 30 dni) uporabljali, ker so obračune izvajali ročno. V času rabe zmogljivih računalnikov take poenostavitve ne bi bile potrebne. Za tuje banke, kjer se je metoda ves čas kontinuirano uporabljala, pa je njena uporaba razumljiva.

Slovenske banke so interesno združene v Združenje bank Slovenije, kjer med drugim sprejemajo medbančne dogovore in priporočila. Izdali so brošuro Bančne obresti – varno in pregledno. Priporočila so namenjena na eni strani uporabnikom bančnih storitev, da bi bolje razumeli bančno prakso, na drugi pa bankam, da bi še bolj poenotile prakso obračunavanja obresti in dosegle še boljše preglednost pri teh poslih (ZBS, 2008).

Kot je razvidno že iz namena priporočil, je obresti mogoče obračunati na različne načine, čeprav so osnovne tri količine (glavnica, obrestna mera, trajanje naložbe) enake. To trditev smo potrdili z našim primerom, a s tem še nismo izčrpali vseh možnosti. V nadaljevanju jih bomo spoznali še več.



Če se odločate za varčevanje v banki, si pred sklenitvijo pogodbe oglejte bančne pogoje in način, kako banka obračunava obresti. Višina obrestne mere ni zadosten podatek za primerjavo. Na spletnih straneh bank najdete tudi informativne izračune.

2.1.3 Trajanje finančne naložbe

Trajanje finančne naložbe je omejeno z dvema datumoma – začetnim in končnim. Finančna naložba se praviloma obrestuje toliko dni, kot je med dvema datumoma. V Excelu to izračunamo tako, da datuma odštejemo.



Nek znesek položimo 22. 11. 2010. Dvignemo ga 30. 11. 2010. Koliko dni se obrestuje?



Znesek se obrestuje 8 dni. Če štejemo dneve od 22 do 30 na prste, naštejemo 9 dni. Kateri dan torej ne šteje?

Običajna bančna praksa, ki jo priporoča tudi Banka Slovenije (BS, 2008), je sledeča:

- praviloma se pri določanju začetka in konca obdobja za obračun obresti šteje prvi dan od začetka posla, zadnji dan pa ne;
- praviloma se pri obračunu obresti šteje dejansko število dni po koledarju, z upoštevanjem dejanskega števila dni v letu (K, 365/366);
- priporočljivo je, da banka pri predračunavanju (za primer izračuna anuitete pri kreditu) uporablja metodo (30, 360) oziroma izračun anuitete z mesečno kapitalizacijo.

Po priporočilih Banke Slovenije mora biti v pogodbi s komitentom natančno opredeljen uporabljeni način štetja dni.

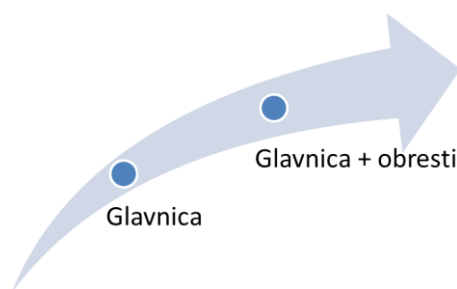
2.2 DEKURZIVNO IN ANTICIPATIVNO OBRESTOVANJE

Z vidika trenutka, ko plačamo oz. prejmemo obresti, obstajata dva različna načina obrestovanja. Oglejmo si primere.

Za denar, ki ga imamo na transakcijskem računu, banka vsak mesec obračuna obresti in jih pripiše prvi dan v naslednjem mesecu. Takemu načinu obrestovanja, kjer se obresti plačajo po preteku kapitalizacijske dobe ali po preteku finančne naložbe, rečemo dekurzivno obrestovanje.

Obresti, ki jih obračunamo in prištejemo glavnici ob zaključku nekega obdobja, imenujemo dekurzivne obresti. Način obrestovanja, kjer obresti pripišemo glavnici ob zaključku nekega obdobja, imenujemo dekurzivno obrestovanje, pripadajočo obrestno mero pa dekurzivna obrestna mera (Čibej, 2001).

V slovenski poslovni praksi se večinoma uporablja dekurzivno obrestovanje, zato mu bomo nameniti več pozornosti.



Slika 17: Dekurzivno obrestovanje

Druga vrsta obrestovanja glede na trenutek, ko obračunavamo obresti, se imenuje anticipativno obrestovanje. Izraz *anticipare* pomeni vnaprej vzeti. Tu se obresti obračunajo in odvzamejo od glavnice na začetku obrestovalnega obdobja.



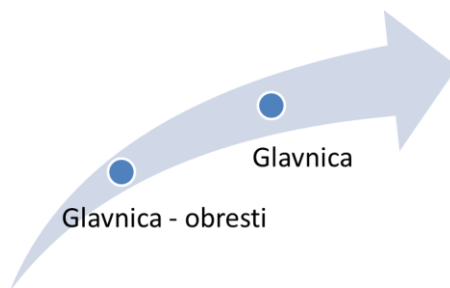
Izposodimo si 1.000 € za dobo enega leta. Letna obrestna mera za posojilo je 5 %. Posojilodajalec jih obračuna na anticipativni način, kar pomeni:

- Prejmemo 1.000 € – 5 % od 1.000 €. Se pravi, da prejmemo 950 €.
- Po enem letu vrnemo 1.000 €.

Anticipativno obrestovanje pojasnjuje slika (Slika 18).

Obresti, ki nastopajo v anticipativnem obrestovanju, se imenujejo anticipativne obresti, pripadajoča obrestna mera pa anticipativna obrestna mera.

Anticipativno obrestovanje se v naši praksi redko uporablja. Smiselno je kvečjemu pri dajanju posojil. Dolžnik plača upniku obresti že ob najetju posojila, kar je za posojilodajalca ugodneje, za posojilojemalca pa manj ugodno kot dekurzivno obrestovanje.



Slika 18: Anticipativno obrestovanje

Združenje bank Slovenije je sprejelo naslednje priporočilo. Pri vseh anticipativnih poslih mora biti izrecno navedeno, za kakšen obračun obresti gre. Če take navedbe ni, ima komitent pravico zahtevati obračun obresti z upoštevanjem zakonitosti dekurzivnega izračuna. Anticipativno obrestovanje naj se uporablja le pri finančnih instrumentih, kjer je to običajno na podlagi splošno sprejete bančne prakse. V predstavitvenem gradivu finančnih instrumentov (prospektu) mora biti tako obrestovanje ustrezno navedeno (ZBS, 2008).

V nadaljevanju si bomo ogledali oba načina obrestovanja, ju primerjali pri nominalno enaki obrestni meri in se prepričali, da je za kreditojemalca ugodnejše dekurzivno obrestovanje.



Potrebujemo 5.000,00 € za 1 leto. Koliko denarja si moramo sposoditi, če banka obračuna 6 % obresti na dekurzivni ali anticipativni način? Koliko denarja moramo po enem letu vrniti v prvem in drugem primeru?



Označimo začetno glavnico z G_0 , dekurzivno obrestno mero s p , anticipativno obrestno mero pa s q :

$$G_0 = 5.000 \text{ €}$$

$$p = 6 \%$$

$$q = 6 \%$$

Če nam posojilodajalec znesek posodi za 1 leto z dekurzivno letno obrestno mero 6 %, prejmemo 5.000 €, po enem letu pa mu moramo vrniti znesek 5.300 €, ki ga izračunamo takole:

$$G_1 = G_0 + o = G_0 + G_0 \cdot \frac{p}{100} = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 5.300$$



V formulo vnesemo namesto p le 6. Če zapišemo 6 % in formulo izračunamo s pomočjo Excela ali kalkulatorja, opustimo deljenje s 100.

Če posojilodajalec obresti obračunava na anticipativen način, bi v primeru, da bi si izposodili 5.000,00 € s 6 % letno anticipativno obrestno mero, dobili izplačani znesek.

$$G_0 = G_1 - o = G_1 \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right) = 4.700$$

Na začetku smo omenili, da potrebujemo 5.000,00 €. To pomeni, da si moramo v primeru, da posojilodajalec obračunava obresti na anticipativen način, izposoditi več denarja. Na začetku torej potrebujemo znesek $G_0=5.000,00$ €. Kolikšen mora biti znesek G_1 ?

$$G_1 = \frac{G_0}{\left(1 - \frac{q}{100}\right)} = 5.319,15$$

Za enako glavnico smo pri nominalno enaki obrestni meri (6 %) v primeru dekurzivnega obrestovanja plačali 300,00 € obresti, v primeru anticipativnega obrestovanja pa 319,15 € obresti.

Iz primera smo ugotovili, da je pri številčno enaki obrestni meri za posojilojemalca anticipativen način obrestovanja dražji, za posojilodajalca (običajno banko) pa ugodnejši.

V naši bančni praksi je običajen dekurziven način obrestovanja. Če pa se zadolžujete v tujini ali na nebančnem trgu, svetujemo, da se pred odločitvijo pozanimate o načinu obrestovanja in naredite informativne izračune.



Če ne bomo navedli drugače, bomo uporabljali dekurzivni način obrestovanja in dekurzivne obrestne mere, ki so v naši bančni in poslovni praksi bolj običajne.

2.3 NAVADNI IN OBRESTNO OBRESTNI RAČUN

Spoznali smo, kako računamo obresti znotraj ene kapitalizacijske dobe na linearen način (z uporabo relativne obrestne mere). V nadaljevanju bomo obravnavali primere, ko naložba traja več kot eno kapitalizacijsko dobo – npr. več let. Na koncu vsakega kapitalizacijskega obdobja se obračunajo obresti. Glede na to, od katere osnove (glavnice) se obračunajo obresti, ločimo navadni in obrestno obrestni račun.

2.3.1 Navadni obrestni račun

Bistvo navadnega obrestnega računa je, da obresti ves čas računamo od začetne, se pravi od nespremenjene glavnice. Obresti, ki jih tako izračunamo, imenujemo enostavne ali navadne obresti.

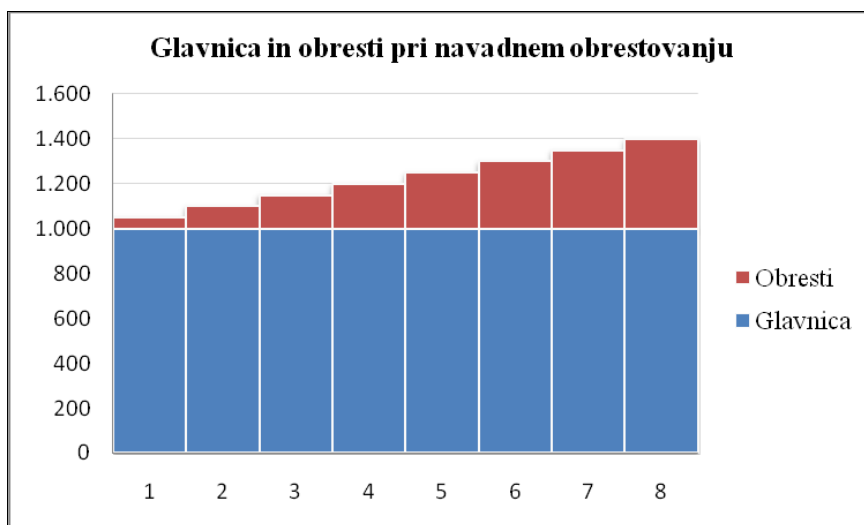


Kupili smo obveznice v vrednosti 1.000 €, ki bodo unovčljive čez 8 let. Čez 8 let dobimo vplačano glavnico 1.000 €, vsako leto pa nam izdajatelj obresti izplača 5 % obresti.

Ker je osnova za obračun obresti ves čas ista, obrestna mera pa nespremenljiva, so tudi obračunane obresti vsako leto enake, in sicer 5 % od 1.000 €, kar je 50 €. V osmih letih dobimo skupaj 400 € obresti.

Na grafu (Slika 19) vidimo, da se pri navadnem obrestnem računu glavnica ne spreminja. Obresti so vsako leto enake. V grafu so seštete vse obračunane obresti.

Lep primer uporabe navadnega obrestnega računa je obračun obresti na transakcijskem računu, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju.



Slika 19: Glavnica in kumulativne obresti pri navadnem obrestnem računu

2.3.2 Obrestno obrestni račun

Navadne obresti ves čas računamo od začetne vrednosti glavnice G_0 .

Pri obrestno obrestnem načinu obrestovanja po preteku ene kapitalizacijske dobe izračunamo obresti in jih pripišemo glavnici. Dobimo novo glavnico G_1 , ki je vsota začetne glavnice G_0 in obresti. Po preteku druge kapitalizacijske dobe obračunamo obresti od glavnice G_1 in tako naprej.

Za začetek problem poenostavimo in predpostavimo, da je kapitalizacijska doba eno leto.

Z G_i označimo glavnico, ki jo dobimo po i letih, z o_i pa označimo obresti, ki jih izračunamo po preteku i -tega leta. Vrednost i je lahko 1, 2, 3,...

G_0	začetna glavnica
$G_1 = G_0 + o_1$	glavnica po enem letu
$G_2 = G_1 + o_2$	glavnica po dveh letih

Na tak način nadaljujemo. Vprašanje, ki se nam na tem mestu zastavi, pa je, kako izračunamo obresti o_1, o_2, \dots

V nadaljevanju bomo izpeljali formulo pri predpostavki, da je podana dekurzivna obrestna mera oz. da je obrestovanje dekurzivno.

Pri obrestno obrestnem računu je glavnica G_1 , ki jo dobimo po enem letu, enaka vsoti začetne glavnice G_0 in pripadajočih obresti o_1 , ki jih izračunamo od glavnice G_0 . Za izračun obresti uporabimo formulo, ki smo jo že spoznali.

$$G_1 = G_0 + o_1 = G_0 + G_0 \cdot \frac{p}{100} = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Če glavnico G_1 pustimo, da se obrestuje še eno leto, bo njena nominalna vrednost po pripisu obresti znašala:

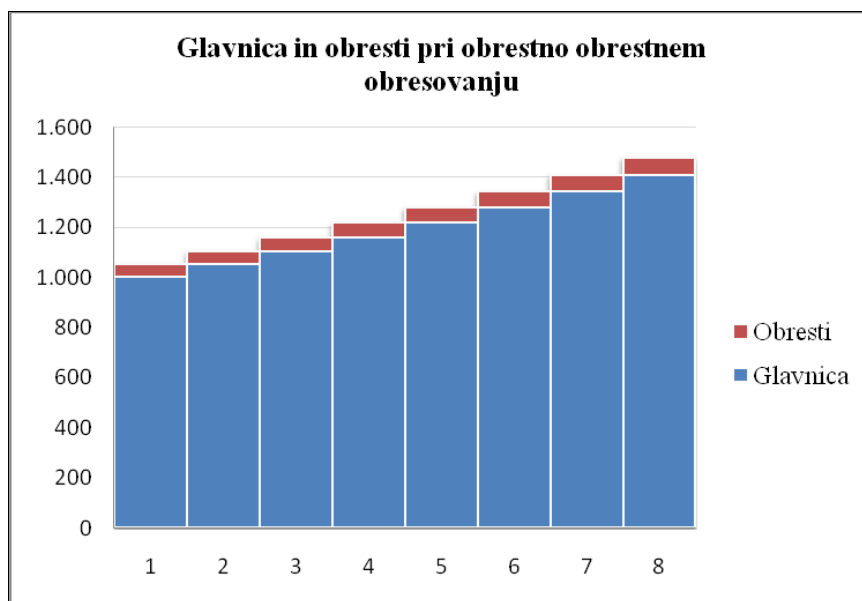
$$G_2 = G_1 + o_2 = G_1 + G_1 \cdot \frac{p}{100} = G_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Postopek nadaljujemo na isti način. Po preteku n let od vložitve začetne glavnice G_0 bo njena vrednost narasla na:

$$G_n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Znesek G_n imenujemo končna vrednost glavnice G_0 po preteku n let, pri letnem pripisu obresti in dekurzivni obrestni meri (Čibej, 2001).

Rast glavnice si oglejmo še grafično (Slika 20).



Slika 20: Obrestno obrestno obrestovanje



Glavnico 1.000 € obrestujemo 8 let na obrestno obrestni način z letno dekurzivno obrestno mero 5 %. Koliko denarja dobimo po osmih letih?



Uporabimo formulo, ki smo jo pravkar spoznali in namesto n uporabimo število 8.

$$G_8 = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8$$

Nalogo rešimo z uporabo kalkulatorja ali Excela. Če uporabljamo Excel, je pomembno, da pregledno napišemo podatke in da v formulah uporabljamo sklice.

V celico B1 vnesemo začetno vrednost glavnice, v B2 dobo varčevanja in v B3 letno obrestno mero.

Formulo za glavnico, ki nam jo bo banka izplačala čez pet let, sestavimo v celico B5. Ker imamo v celici B3 obrestno mero napisano v obliki 5 %, ne smemo obresti deliti s 100. Velja namreč 5 % = 0,05.

	A	B	C	D
1	Začetna vrednost glavnice	1.000,00		
2	Doba v letih	8		
3	Letna OM	5%		
4				=B1*(1+B3)^B2
5	Končna vrednost glavnice	1.477,46		

Slika 21: Obračun končne glavnice pri obrestno obrestnem varčevanju.



Znak ^ vnesemo takole: pritisnemo gumb Alt Gr, ga držimo in pritisnemo še gumb z znakom ^. Na zaslonu se znak prikaže šele, ko za njim vtipkamo naslednji znak.

Obresti po osmih letih izračunamo tako, da od končne glavnice odštejemo začetno glavnico. Dobimo 477,46 €. Preverimo lahko, da smo dobili 77,46 € obresti več, kot če bi bila glavnica obrestovana po navadnem obrestnem računu.

Končna vrednost glavnice s funkcijo FV

V Excelu imamo na voljo funkcijo FV (angl. future value), z uporabo katere lahko najenostavneje izračunamo končno vrednost glavnice. Funkcijo bomo spoznali v poglavju Varčevanje.

Začetna vrednost glavnice

Včasih poznamo končno glavnico in nas zanima, kakšna je bila njena začetna vrednost. Banka nam na primer ponuja vrednostni papir, za katerega je treba danes plačati določen znesek, po določenem obdobju pa bomo zanj dobili znesek, ki je označen na vrednostnem papirju.

Če poznamo obrestno mero in končno vrednost glavnice, lahko iz nje izračunamo njeno začetno ali sedanjo vrednost. Pravimo tudi, da glavnico diskontiramo ali razobrestimo za n let (Čibej, 2001, 182).

Po preureditvi formule za končno vrednost glavnice

$$G_n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

tako, da izrazimo iz nje G_0 , dobimo iz nje naslednjo formulo za začetno vrednost glavnice:

$$G_0 = \frac{G_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$



Kakšen znesek moramo vložiti na začetku 1. leta, da bi po 7 letih ob 6 % dekurzivni obrestni meri in letni kapitalizaciji imeli 50.000,00 €?



$$G_0 = \frac{50.000}{1,06^7} = 33.252,86$$

Začetna vrednost naše glavnice je 33.252,86 €.

Kasneje bomo spoznali funkcijo PV (angl. present value) z uporabo katere enostavno izračunamo začetno glavnico. Ker je funkcija PV uporabna še za nekatere druge izračune, jo bomo podrobneje obravnavali kasneje in si ogledali različne možnosti njene uporabe.

2.3.3 Obračun obresti pri večkratni kapitalizaciji na leto

Nekatere naložbe trajajo več kapitalizacijskih dob. Obresti se praviloma obračunajo po obrestno obrestnem računu. Na osebnem računu imamo mesečno kapitalizacijo evrskih sredstev. Banka ob koncu meseca obračuna obresti. V naslednjem mesecu pa se obresti računajo od novega stanja, ki upošteva prejšnje stanje glavnice in pripisane obresti.

Predpostavimo, da imamo začetno glavnico G_0 , ki jo eno leto obrestujemo z letno dekurzivno obrestno mero p , na dva načina:

- V prvem primeru je kapitalizacijska doba 1 mesec. Po obrestno obrestnem računu izračunamo končno glavnico G_{12} z uporabo relativne mesečne obrestne mere $\frac{p}{12}$.
- V drugem primeru glavnico G_0 samo obrestujemo eno leto.

Zastavimo si naslednje vprašanje. Ali sta končni glavnici enaki? Odgovor poiščimo s konkretnim primerom.



Glavnica 100.000,00 € se je obrestovala dekurzivno, 5 let, po 8 % letni obrestni meri in mesečni kapitalizaciji (se pravi, da so bile obresti pripisane vsak mesec). Kolikšna je njena končna vrednost?

Kolikšna bi bila njena končna vrednost, če bi se obrestovala 5 let po 8 % letni obrestni meri in bi bila kapitalizacija letna (pripis obresti je letni)?



Obe rešitve poiščimo s pomočjo Excela. V posamezne celice izven tabele vpišemo glavnico, ki se obrestuje (B1), dolžino obrestovanja v letih (B2) in letno obrestno mero (B3). Običajno se držimo pravila, da podatke, ki so skupni, vpisujemo nad tabelo in jih ne ponavljamo v stolpcih tabele.

Ker nas zanima končna glavnica, glede na uporabljeno kapitalizacijo (mesečno, letno), ostale podatke in obrazce uredimo v pregledno tabelo (Slika 22).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Začetna glavnica	100.000,00					
2	Doba let	5					
3	Letna obr. mera	8%					
4							
		Število kapitalizacij na leto	doba obrestovanja	Obrestna mera za kapit. dobo	obrestovana glavnica		
5	kapitalizacija						
6	letna	1	5	8,00%	146.932,81		
7	mesečna	12	60	0,67%	148.984,57		
8	polletna	2	10	4,00%	148.024,43		

Slika 22: Letna in večkrat letna kapitalizacija obresti

Končna glavnica je večja, če je kapitalizacija obresti dvanajstkrat na leto.

Iz primerjave lahko ugotovimo, da je za vlagatelja oz. posojilodajalca kapitalizacija, krajša od enega leta, ob uporabljeni relativni obrestni meri ugodnejša od letne kapitalizacije. Pogostejša kot je kapitalizacija, bolj ugodna je finančna naložba za vlagatelja ali posojilodajalca in manj ugodno za posojilojemalca.

Z uporabo relativne obrestne mere dobimo pri kapitalizaciji, ki je pogostejša od letne, vedno večjo vrednost končnih glavnice, kot pa jih dobimo pri dani letni obrestni meri p % z uporabo celoletne kapitalizacije. Kolikšna je ta razlika, je odvisno od pogostosti kapitalizacije in seveda od višine obrestne mere.

Relativna obrestna mera ni »poštena« obrestna mera. V nadaljevanju si bomo zato zastavili nalogo poiskati tak preračun letne obrestne mere na kapitalizacijsko dobo krajšo od enega leta, da bomo po enem letu z uporabo obrestno obrestnega računa s tako obrestno mero prejeli enako glavnico, kot bi jo, če bi glavnico obrestovali eno leto. Obrestna mera, ki ustreza našim željam, se imenuje konformna obrestna mera.

2.3.4 Konformna obrestna mera

Ena možnost preračuna letne obrestne mere na obdobje krajše od enega leta je metoda relativne obrestne mere, ki smo jo že spoznali. Druga možnost preračuna letne obrestne mere na krajše obdobje je metoda konformne obrestne mere.

Podano imamo letno obrestno mero p . Zanima nas, kakšno obrestno mero moramo vzeti, da bi pri M kapitalizacijah na leto dobili za isto obdobje enake obresti kot pri letni kapitalizaciji. Z odgovorom na to vprašanje dobimo konformno obrestno mero. Končna vrednost glavnice G_0 pri celoletni kapitalizaciji mora biti tako enaka končni vrednosti glavnice pri M -kratni kapitalizaciji v letu dni (Čibej, 2001, 202). Ker morata biti končni vrednosti glavnice enaki, iz tega sledi:

$$G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_0 \cdot \left(1 + \frac{{}_k P_M}{100}\right)^M$$

Po deljenju enačbe z G_0 na obeh straneh dobimo

$$1 + \frac{p}{100} = \left(1 + \frac{{}_k P_M}{100}\right)^M$$

Iz te enačbe dobimo konformno obrestno mero:

$${}_k P_M = \left(\sqrt[M]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right) \cdot 100$$



Letna obrestna mera je 8 %. Kakšne so enomesečna, trimesečna, polletna in letna relativna in konformna obrestna mera?



Po formulah, ki smo jih navedli v teoretičnem uvodu, izračunajmo trimesečno konformno in relativno obrestno mero.

Tri mesece predstavlja 1/4 leta, zato je število kapitalizacijskih obdobj na leto 4.

Konformno trimesečno obrestno mero izračunamo po formuli

$${}_k P_4 = \left(\sqrt[4]{1 + \frac{8}{100}} - 1\right) \cdot 100 = 1,94 \%$$

Relativna obrestna mera za četrletje pa je

$${}_r P_4 = \frac{8}{4} = 2,00 \%$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Letna OM	8%	=B\$1/B4				
2							
3	Kapitalizacija	Število kap. dob na leto	Relativna OM	Konformna OM			
4	mesečna	12	0,67%	0,64%	= (1+B\$1)^(1/B4)-1		
5	trimesečna	4	2,00%	1,94%			
6	polletna	2	4,00%	3,92%			
7	letna	1	8,00%	8,00%			

Slika 23: Izračun konformne obrestne mere

Rešitev naloge v Excelu vidimo na sliki (Slika 23).

V formuli smo uporabili računsko operacijo korenjenje. V Excelu izračunamo M-ti koren kot potenco 1/M. Tiste, ki ste na srednješolsko matematiko že pozabili, naj spomnimo, da to ni posebnost Excela, temveč pravilo za računanje s koreni. Velja namreč

$$\sqrt[m]{a} = a^{1/m}$$

Iz primera vidimo, da je konformna obrestna mera pri isti kapitalizacijski dobi krajši od enega leta nižja kot relativna obrestna mera za isto obdobje. Seveda pa ne smemo prezreti dejstva, da so razlike tem manjše, čim nižja je obrestna mera. O tej trditvi se lahko prepričamo tako, da obrestno mero iz primera povečamo ali zmanjšamo in si ogledamo izračune v Excelovi tabeli. Ob visokih obrestnih merah so razlike velike, zato so v času visoke inflacije relativno metodo v naši praksi popolnoma opustili. V letih od 1987 do 2002 se je v Sloveniji uporabljala samo konformna obrestna mera.

Postopek pri izračunu konformnih obrestnih mer je precej zahtevnejši od tistega, ki smo ga spoznali pri relativni obrestni meri. Za izračun relativne obrestne mere niti ne potrebujemo računalnika. Uporabimo le računski operaciji množenje in deljenje. Za izračun konformne obrestne mere je računalnik nepogrešljiv, saj je potrebno koreniti in potencirati. Predvsem pa so izračunane obresti pogosto neskončna decimalna števila. V bančni praksi je natančno predpisano, koliko decimalnih mest je potrebno upoštevati pri posameznih izračunih.

Na splošno lahko rečemo, da je enostavno izračunljiva relativna obrestna mera sprejemljiv približek za konformno obrestno mero v primeru, ko je izhodiščna letna obrestna mera nizka. Ker smo v zadnjih letih v obdobju nizkih obrestnih mer, konformna obrestna mera iz naše bančne prakse izginja.

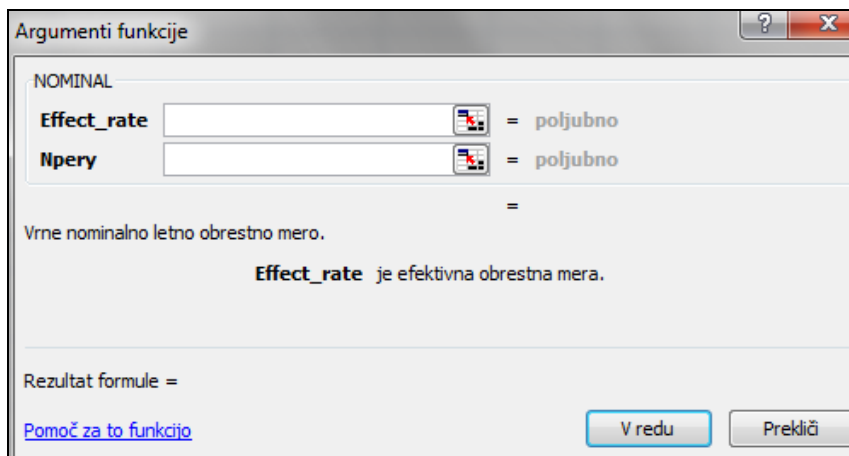


Za izračun konformne obrestne mere lahko v programu Excel uporabimo vgrajeno finančno funkcijo NOMINAL. Z njeno uporabo se izognemo korenjenju in zapletenim formulam.

Funkcija NOMINAL

Uporabljamo jo lahko za preračun letne obrestne mere na obrestno mero za krajše kapitalizacijsko obdobje po konformni metodi.

Po kliku na  izberemo funkcijo NOMINAL. Najdemo jo med vsemi ali med finančnimi funkcijami.



Slika 24: Funkcija NOMINAL



Ime funkcije naj nas ne zavede. Z njo računamo konformno in ne nominalne obrestne mere.

Po izboru funkcije dobimo na zaslon vnosni obrazec (Slika 24), kamor določimo parametre.

Effect_rate je letna obrestna mera.

Npery je število kapitalizacijskih obdobj na leto.

V verzijah Excela do vključno 2007 so argumenti funkcij napisani v angleščini. Šele v programu MS Excel 2010 so argumenti funkcij poslovenjeni.

V vseh funkcijah, kjer v čarovniku za funkcije ali pomoči najdemo enaka imena argumentov, imajo ti isti pomen. Argument **npery** nastopa v različnih finančnih funkcijah in povsod ima isti pomen.

Konformno obrestno mero, prilagojeno na obdobje krajše od enega leta, dobimo z uporabo formule

$$= \text{NOMINAL}(\text{effect_rate}; \text{npery}) / \text{npery}$$



Izven funkcije moramo deliti s številom kapitalizacijskih obdobj na leto!



Letna obrestna mera je 8 %. Kakšna je enomesečna, trimesečna in polletna konformna obrestna mera? Pri izračunu uporabimo funkcijo NOMINAL.



Nalogo bomo rešili v isto tabelo kot prej, le v nov stolpec.

	A	B	C	D	E
1	Letna OM	8%	=B\$1/B4		
2					
3	Kapitalizacija	Število kap. dob na leto	Relativna OM	Konformna OM	Konformna OM
4	mesečna	12	0,67%	0,64%	0,64%
5	trimesečna	4	2,00%	1,84%	1,94%
6	polletna	2	4,00%	3,92%	3,92%
7	letna	1	8,00%	8,00%	8,00%
8					
9			= $(1+B$1)^{(1/B4)}-1$	=NOMINAL(B\$1;B4)/B4	
10					

Slika 25: Uporaba funkcije NOMINAL

2.4 OBRESTNE MERE V BANČNI PRAKSI

2.4.1 Priporočila Banke Slovenije in Združenja bank Slovenije

Najprej je treba poudariti, da konformnega obrestovanja pri novih poslih ne uporabljamo več (ZBS, 2008). V tem poglavju so opisana priporočila, ki jih je julija 2008 izdalo Združenje bank Slovenije (ZBS) na podlagi priporočil Banke Slovenije (BS) in so veljala tudi še leta 2010, ko je bil napisan ta učbenik. Svetujemo pa, da na spletni strani Banke Slovenije (www.bsi.si, 30. 1.2011) ali na spletni strani Združenja bank Slovenije (www.zbs.si, 30. 1.2011) preverite, kakšna je trenutna bančna praksa in priporočila.

Šele nekaj zadnjih let banke ponujajo nespremenljivo obrestno mero tudi za večletne kredite. Dolgo smo bili navajeni, da imamo opraviti z dvema podatkom:

- prvi je ohranjal vrednost denarja, ki ji je grozila inflacija,
- drugi je pomenil višino realnega nadomestila za uporabo tujega denarja (pomenil je t. i. realno (obrestno mero).

Banke uporabljajo danes pri poslih bodisi nespremenljivo bodisi spremenljivo obrestno mero. Če v pogodbi ni posebej določeno drugače, je pogodbeno obrestna mera izražena bodisi kot:

- enovita (z eno številko zapisana) nominalna obrestna mera (npr. 3 %) ali kot
- sestavljena (skupna) nominalna obrestna mera, ki je zapisana kot vsota referenčne obrestne mere in obrestnega pribitka (npr. 6-mesečni EURIBOR+3 %).

Priznane referenčne obrestne mere so npr. medbančne obrestne mere (EURIBOR, LIBOR). Ob navedbi referenčne obrestne mere banka jasno navede tudi njen tip (na primer 1- , 3- , 6- ali 12-mesečni EURIBOR ali LIBOR) in na katero denarno enoto, ročnost oziroma drug dejavnik, ki vpliva na njeno višino, se veže.

Podatek o obrestni meri vedno predstavlja letno obrestno mero, če ob njem ni izrecno zapisano drugače. Letne obrestne mere so izražene najmanj na dve decimalni mesti v odstotnem zapisu, obrestne mere za krajša obdobja pa tako natančno, da je pri preračunu na letno raven zagotovljena predvidena natančnost letne obrestne mere.

2.4.2 Nominalna obrestna mera (NOM)

Nominalna obrestna mera (NOM) se zelo pogosto uporablja v naši bančni praksi. Na podlagi priporočil ZBS in BS lahko zapišemo naslednji sklep.

Nominalna obrestna mera je dekurzivna obrestna mera, ki se za krajša obdobja obrestovanja preračunava po proporcionalni metodi (metoda relativne obrestne mere).

Pri kratkoročnih poslih se uporablja nominalna obrestna mera (NOM), ki je nespremenljiva ves čas vezave sredstev ali najema kredita. Pri nekaterih dolgoročnih poslih se uporablja spremenljiva nominalna obrestna mera, ki je skupna obrestna mera, sestavljena iz referenčne obrestne mere in pribitka.

Ne zamenjajte nominalne obrestne mere in funkcije NOMINAL!

2.5 VRSTE OBRESTOVANJA

Na podlagi primerov smo spoznali različne vrste obrestovanja in s tem tudi različne vrste obrestnih mer, ki jih poznamo v praksi. Ločimo jih glede na njihove lastnosti in način računanja obresti. V nadaljevanju bomo pregledno uredili že znane pojme in dodali še nekaj novih:

- navadno in obrestno obrestno obrestovanje,
- kratkoročna in dolgoročna obrestna mera,
- nespremenljiva (fiksna) in spremenljiva obrestna mera,
- dekurzivna in anticipativna obrestna mera,
- relativna (ali proporcionalna) in konformna obrestna mera,
- nominalna in realna obrestna mera,
- efektivna obrestna mera.

Spoznali smo tudi izraz kapitalizacijska doba. To je doba, po kateri se obresti pripišejo glavnici.

Navdano obrestovanje (navadni obrestni račun) pomeni računanje obresti od iste, se pravi nespremenjene, glavnice. Obrestno obrestno obrestovanje (obrestno obrestni račun) pa označuje računanje obresti od glavnice, ki smo ji pripisali obresti iz prejšnjega kapitalizacijskega obdobja.

Pojma kratkoročno in dolgoročno bi lahko razumeli subjektivno, vsak po svoje. To preprečujejo slovenski računovodski standardi, po katerih kratkoročno označuje obdobja do enega leta. Daljša obdobja so dolgoročna. Kratkoročna obrestna mera (za krajše finančne naložbe) se v praksi zato nanaša na obdobja do enega leta. Dolgoročne obrestne mere pa so običajne za naložbe, ki trajajo več kot eno leto. S tem v zvezi je ponavadi tesno povezana fiksna in spremenljiva obrestna mera. Za krajša obdobja (do enega leta, lahko pa npr. tudi do treh let) banke upajo sklepati pogodbe z nespremenljivo obrestno mero. Za daljša obdobja pa je nespremenljiva obrestna mera tvegana tako za banko kot za komitenta. Banka namreč ne more predvideti, ali bo stopnja inflacije, ki lahko vpliva na ceno denarja, v prihodnjih letih enaka, nižja ali višja kot na dan sklenitve posla. Zato so za daljša obdobja običajne spremenljive obrestne mere, ki so sestavljene iz obrestne marže (zaslužek posojilodajalca) in pribitka, katerega vloga je ohranjanje vrednosti denarja. Več o spremenljivi obrestni meri bomo spoznali kasneje na primerih.

Dekurzivna obrestna mera pove, da se obresti obračunajo po koncu kapitalizacijske dobe. Anticipativna obrestna mera pa je značilna za posle, kjer se obresti obračunajo in plačajo na začetku.

Proporcionalna oziroma relativna obrestna mera je obrestna mera, pri kateri se za pogostejšo (na primer polletno, četrtno, mesečno ali dnevno) kapitalizacijo uporabljajo obrestne mere, ki so tolikokrat manjše od letne obrestne mere, kolikokrat je kapitalizacijsko obdobje krajše od enega leta (Čibej, 2001, 200). Uporabimo računski operaciji deljenje in množenje. Konformna obrestna mera pa označuje obrestno mero, ki je rezultat premise, da morajo biti obresti, ki jih obrestno obrestno obrestujemo M kapitalizacijskih dob (skupaj eno leto) enake obrestim, ki jih dobimo s celoletno kapitalizacijo obresti (Čibej, 2001, 202).

Nominalna obrestna mera je na letni ravni določena enovita obrestna mera, ki poleg osnovne obrestne mere vsebuje tudi določen pribitek. Praviloma je fiksna in se v času ne spreminja. Njena višina je odvisna od razmer na trgu in inflacijskih pričakovanj. Praviloma je tudi dekurzivna in proporcionalna. Realna obrestna mera se uporablja v primerih oz. državah z visoko inflacijo. Realna obrestna mera pomeni dohodek posojilodajalca. Običajno se v povezavi z realno obrestno mero uporabi še valorizacijska stopnja, katere vloga je ohranjanje vrednosti denarja zaradi visoke inflacije. Valorizacijska stopnja je običajno spremenljiva in se navaja posebej (ni vključena v realno obrestno mero).

Izraz efektivna obrestna mera bomo razložili kasneje v povezavi s krediti, kjer jo tudi najpogosteje srečamo.

2.6 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

16. Od katerih treh količin so odvisne obresti?
17. Napišite osnovno formulo za izračun obresti za naložbo, ki traja eno leto.
18. Opredelite naslednje pojme, jih med seboj primerjajte in ponazorite s primerom izračuna:
 - navadno in obrestno obrestno obrestovanje,
 - dekurzivna in anticipativna obrestna mera,
 - relativna (ali proporcionalna) in konformna obrestna mera.

19. Glavnico G v višini 300.000 € obrestujemo 1 leto. Koliko znašajo obresti, če je dekurzivna letna obrestna mera 3 %?

Rešitev: 9.000 €.

20. Glavnico G v višini 60.000 € obrestujemo 1 mesec. Koliko znašajo obresti za en mesec, če je mesečna obrestna mera 0,2 %?

Rešitev: 120 €.

21. Znesek 7.000,00 € želite vezati v navadnem letu za 91 dni. Letna obrestna mera, ki jo ponuja banka, je 5,7 %. Kolikšne bodo obresti, če bo banka obrestno mero preračunala po proporcionalni metodi z upoštevanjem dejanske dolžine leta?

Rešitev: 99,48 €.

22. Glavnico 2.000 € vežemo za 3 leta s 5,8 % letno obrestno mero. Kolikšen znesek nam bo izplačala banka po 3 letih skupaj z obrestmi?

Rešitev: 2.368,57 €.

23. Glavnica 120.000,00 € se je obrestovala od 6. 8. 2002 do 24. 12. 2002 s 6,3 % nominalno letno obrestno mero. Koliko znašajo obresti, če za preračun obresti uporabimo dolžino leta 360?

Rešitev: 2.940,00 €.

24. Glavnica 40.000,00 € se je obrestovala od 6. 2. 2002 do 16. 12. 2002 s 5,9 % obrestno mero. Koliko znašajo obresti, če za izračun po relativni metodi uporabite dejansko dolžino leta?

Rešitev: 2.023,78 €.

25. Glavnica 30.000,00 € se je obrestovala dekurzivno 10 let po 7 % relativni letni obrestni meri in mesečni kapitalizaciji (se pravi, da so bile obresti pripisane vsak mesec). Kolikšna je njena končna vrednost? Kolikšna bi bila njena končna vrednost, če bi se

obrestovala 10 let s 7 % letno relativno obrestno mero in bi bila kapitalizacija letna (pripis obresti je letni) ali pa polletna?

Rešitev: 59.014,54 € (letna kapitalizacija), 59.693,66 € (polletna kapitalizacija), 60.289,84 € (mesečna kapitalizacija).

26. Letna obrestna mera je 3 %. Kakšne so enomesečna, trimesečna, polletna in letna relativna in konformna obrestna mera, izračunane na dve decimalni mesti natančno?

Rešitev: Enomesečna relativna 0,25 %; trimesečna relativna 0,75 %; polletna relativna 1,50 %; enomesečna konformna 0,25 %; trimesečna konformna 0,74 %; polletna konformna 1,49 %.

3 VARČEVANJE

V tem poglavju bomo natančneje spoznali pogostejše načine varčevanja in se naučili obračunati obresti:

- za denarna sredstva, ki jih imamo na osebnem ali transakcijskem računu,
- na depozite,
- za postopno varčevanje enakih zneskov.

Kot smo že spoznali, je pri obračunu pomembno obdobje trajanja finančne naložbe, znesek naložbe, obrestna mera in metoda izračuna obresti, ki pa je običajno znana iz pridevnika ob podani letni obrestni meri. Npr. 3 % letna konformna obrestna mera.

3.1 OBRAČUN OBRESTI NA OSEBNIH IN TRANSAKCIJSKIH RAČUNIH

S 1. 7. 2003 so hranilne knjižice, žiro računi in tekoči računi odšli na smetišče naše bančne zgodovine. Vse to je za fizične osebe nadomestil osebni račun. Pravne osebe pa imajo transakcijske račune.

Banka preko osebnega računa za imetnika osebnega računa prejema vplačila domačih in tujih valut ter opravlja izplačila v okviru kritja. Omogoča tudi dovoljeno negativno stanje (limit). Osebni račun je lahko več valutni.

Banka sredstva pozitivnega stanja na osebnem računu obrestuje po nominalni obrestni meri, določeni za sredstva na vpogled. Za znesek dovoljene prekoračitve stanja obračuna obresti po nominalni obrestni meri, določeni v pogodbi o izrednem limitu oziroma v pogodbi o odprtju in vodenju osebnega računa, če gre za avtomatski limit na osebnem računu. Za znesek morebitnega nedovoljenega negativnega stanja banka obračuna zamudne obresti po vsakokrat veljavni zakoniti zamudni obrestni meri. Obrestna mera za negativno stanje je višja kot obrestna mera za pozitivno stanje.

Znotraj kapitalizacijske dobe se obresti računajo na navaden način z upoštevanjem nominalne obrestne mere. Za devizne vloge je obračunsko obdobje (kapitalizacijska doba) običajno eno leto, za evrske vloge pa en mesec.

Na osebnem računu beležimo prilive in odlive denarja. Banka obračunava obresti glede na stanje sredstev na računu. Vsakokratno stanje hranilne vloge (saldo) se obrestuje do naslednjega dviga ali pologa (do spremembe stanja) in od zadnje spremembe do konca obračunskega obdobja.



Iz bančnega izpiska je razvidno, da je na računu potekal naslednji promet:

1.5. 2010	stanje	10,00 €
5. 5. 2010	vloga	1.500,00 €
8. 5. 2010	dvig	250,00 €
15. 5. 2010	vloga	1.000,00 €
19. 5. 2010	dvig	320,00 €
26. 5. 2010	dvig	400,00 €

Kakšno stanje je bilo razvidno iz bančnega izpiska po pripisu obresti 1. 6. 2010, če je letna obrestna mera 0,1 %?



Reševanje na list papirja bi bilo v tem primeru zamudno, zato si takoj pomagajmo z Excelom.

Pri uporabi Excela je zelo pomembno, da tabelo pripravimo tako, da bo pregledna in bo omogočala čim preprostejše formule. Pri sestavljanju formul se izogibajmo konstantnim, se pravi konkretnim številskim vrednostim. Vse celice, ki bi se v prihodnosti lahko spremenile, v formulah uporabimo kot sklice.

Rešitev naloge je na sliki (Slika 26), razlaga pa v nadaljevanju.

V celice nad tabelo vpišemo podatke: letna obrestna mera in dolžina leta.

Saldo oz. začetno stanje na računu vpišemo v celico E7. V celico E8 pa sestavimo formulo, ki jo nato kopiramo po stolpcu navzdol:

$$=E7+C8-D8$$

Število dni v celici F7 smo izračunali po formuli

$$=B7-A7+1$$

To smemo narediti, ker vsakemu datumu pripada datumsko število. Razlika dveh datumov je zato razlika dveh datumskih števil in predstavlja število dni med datumoma. Enako smo prišteli, ker se obresti obračunajo za vse dni v intervalu. Na koncu naredimo vsoto dobljenih dni in preverimo, če je res enaka številu dni v mesecu, za katerega delamo obračun.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Obračun obresti na osebnem računu								
2									
3	Letna obrestna mera		0,10%						
4	Število dni v letu		365						
5									
6	Datum od	Datum do vključno	V dobro	V breme	Saldo	Št. dni	Obresti		
7	01.05.2010	04.05.2010			10,00	4	0,00		
8	05.05.2010	07.05.2010	1.500,00		1.510,00	3	0,01		
9	08.05.2010	14.05.2010		250,00	1.260,00	7	0,02		
10	15.05.2010	18.05.2010	1.000,00		2.260,00	4	0,02		
11	19.05.2010	25.05.2010		320,00	1.940,00	7	0,04		
12	26.05.2010	31.05.2010		400,00	1.540,00	6	0,03		
13						31	0,12		
14									
15	Stanje na osebnem računu po pripisu obresti				1.540,12				

Slika 26: Obračun pozitivnih obresti na osebnem računu

Obresti v celici G7 smo izračunali po formuli

$$=E7*\$C\$3*F7/\$C\$4$$

Ker se celici C3 (obrestna mera) in C4 (število dni v letu) pri kopiranju ne smeta spreminjati, smo ju fiksirali. Celico nato kopiramo po stolpcu navzdol.

Znesek obresti v celici G13 dobimo tako, da seštejemo celice v stolpcu, pri čemer vnos lahko poenostavimo z uporabo samodejne vsote.

$$=SUM(G7:G12),$$

Stanje na osebni račun po pripisu obresti, ki se izkazuje v celici E15, smo izračunali po formuli

$$=E12+G13$$

Metoda, ki smo jo opisali in ponazorili s primerom, se imenuje **stopnjevalna metoda** izračuna obresti.

Če imamo na osebni račun tudi negativno stanje, nalogo rešimo takole:

- za obdobje, ki ima pozitiven saldo, uporabimo pri izračunu obrestno mero za pozitivno stanje,
- za obdobje, ki ima negativen saldo v okviru dovoljenega negativnega stanja, uporabimo pri izračunu obrestno mero za dovoljeno negativno stanje,
- za obdobje, ki ima negativen saldo in presega dovoljen limit, uporabimo pri izračunu obrestno mero za nedovoljeno negativno stanje (običajno je to obrestna mera, po kateri se računajo zamudne obresti).

Tudi tako zapleteno nalogo lahko rešimo v Excelu. Uporabimo funkcijo IF (če imamo le dve možni obrestni meri) ali VLOOKUP, če je obrestnih mer več.

3.2 POSTOPNO VARČEVANJE ENAKIH ZNESKOV

V praksi se srečujemo z različnimi **namenskimi varčevanji**.

- Varčujemo lahko npr. v nacionalni stanovanjski varčevalni shemi, kjer vsak mesec vplačamo določen znesek in si ob koncu varčevanja zagotovimo razen obresti še posebno premijo, ki jo doda Stanovanjski sklad RS.
- Z banko npr. sklenemo pogodbo o rentnem varčevanju in vsak mesec vplačamo določen znesek.

V nadaljevanju bomo obravnavali primere postopnih varčevanj, kjer se postopno in enakomerno (npr. vsak mesec) plačuje enak znesek, obrestna mera pa je ves čas varčevanja enaka.



5 let v banki varčujemo na naslednji način. Vsak mesec vplačamo natančno 100 €. Banka obračuna obresti z uporabo letne obrestne mere 4 %. Koliko denarja dobimo ob koncu varčevanja?



Zanima nas, koliko bomo v določenem času privarčevali. Zanima nas torej končni znesek zaporednih vplačil oz. končna vsota naobrestovanih delnih plačil.

Za vsako vplačilo posebej bi izračun znali narediti s formulami, ki smo jih že spoznali. Prvo vplačilo bi obrestovali 60 mesecev, drugo 59, tretje 58 in tako naprej do zadnjega, ki se obrestuje le en mesec. Na koncu vseh 60 naobrestovanih zneskov seštejemo.

To pa je zamudno. Zato bomo premislili, kako tak izračun narediti v enem samem koraku.

3.2.1 Končna vrednost enakih, periodičnih zneskov

Predpostavka, ki jo bomo ves čas upoštevali, je, da enakomerno (npr. vsak mesec) vplačujemo enake zneske.

Če prvi znesek plačamo ob sklenitvi pogodbe, drugega natančno čez eno obdobje in nato enakomerno naprej, takim vplačilom rečemo **prenumerandni** zneski.

Če sklenemo pogodbo in nato prvi znesek plačamo natančno čez eno obdobje, nadaljnje zneske pa nato enakomerno naprej, takim vplačilom rečemo **postnumerandni** zneski.

Končna vrednost prenumerandnih zneskov

Na **začetku** prvega, drugega ..., n-tega leta vložimo v banko znesek a . Kolikšna je skupna vrednost teh zneskov S_n po preteku n let, če je obrestovanje dekurzivno in je kapitalizacija letna?

Podatki so torej naslednji:

a	je znesek, ki ga na začetku vsakega leta vložimo v banko,
p	je letna obrestna mera,
S_n	je znesek, ki se nabere v n letih oz. po n vplačilih in zajema obresti.

Z r označimo dekurzivni obrestovalni faktor, ki smo ga spoznali, ko smo obravnavali obrestno obrestni račun.

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

Polog a , ki ga vplačamo prvo leto, se obrestuje n let. Polog a , ki ga vplačamo drugo leto, se obrestuje $n-1$ let. In tako naprej. Polog a , ki ga vplačamo zadnje leto, se obrestuje eno leto.

Na koncu varčevanja dobimo torej naslednji znesek.

$$S_n = a \cdot r^n + a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^{n-2} + \dots + a \cdot r$$

To je vsota geometrijskega zaporedja, ki jo lahko poenostavljeno zapišemo z naslednjim obrazcem

$$S_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Ta obrazec daje t. i. končno vrednost n enakih periodičnih zneskov po preteku enega leta od dospelja zadnjega zneska. Ker zneski dospevajo ob začetku kapitalizacijskih dob, se zanje uporablja izraz prenumerandni zneski.

Končna vrednost postnumerandnih zneskov

Kadar zneski dospevajo ob **koncu** vsakega leta oz. ob koncu kapitalizacijskih dob, jih imenujemo postnumerandni zneski. Zanima nas, kolikšna je njihova skupna vrednost ob dospelju zadnjega zneska.

Podatki so torej naslednji:

a	je znesek, ki ga na koncu vsakega leta vložimo v banko,
p	je letna obrestna mera,
S_n	je privarčevani znesek, skupaj z obrestmi, ki se nabere v n letih oz. po n vplačilih, ki se izvajajo na koncu obdobja.

Polog a , ki ga vplačamo konec prvega leta, se obrestuje $n-1$ let. Polog a , ki ga vplačamo drugo leto, se obrestuje $n-2$ let. In tako naprej. Polog a , ki ga vplačamo konec zadnjega leta, se več ne obrestuje.

Ob koncu varčevanja dobimo torej naslednji znesek.

$$s_n = a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^{n-2} + \dots + a$$

To je vsota geometrijskega zaporedja, ki jo lahko poenostavljeno zapišemo s formulo:

$$s_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

V obeh primerih (prenumerandni in postnumerandni zneski) smo upoštevali, da je kapitalizacijska doba eno leto, da je določena letna obrestna mera in da so posamezni zneski dospevali letno. Vendar sta obrazca veljavna tudi za drugačno kapitalizacijsko dobo (npr. za en mesec) ob naslednjih predpostavkah:


- zneski vplačil so enaki in morajo dospevati ob vsakem začetku ali koncu te dobe,
- obrestna mera mora biti podana za to dobo.

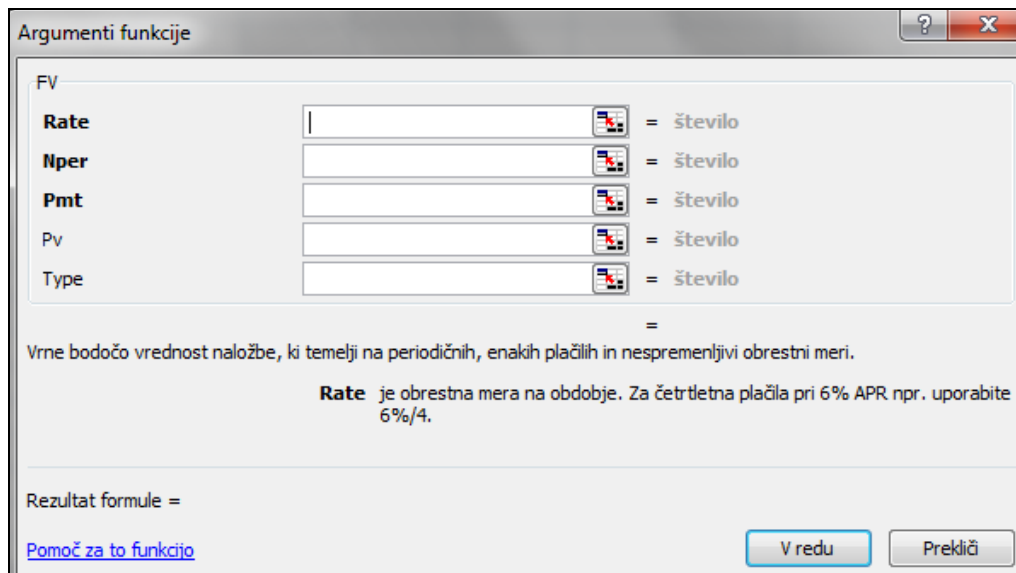
Obrazce lahko uporabimo npr. za mesečna vplačila, če določimo ustrezno mesečno obrestno mero. Če so vplačila mesečna in je določena letna obrestna mera, jo moramo pred uporabo formul preračunati v mesečno. Preračun obrestne mere lahko naredimo po relativni ali po konformni metodi. Uporabimo metodo, ki je zapisana ob podani letni obrestni meri.

Primere bomo naredili v nadaljevanju, ko bomo spoznali funkcijo FV, s pomočjo katere najlažje izračunamo končno vrednost glavnice.

3.2.2 Računanje končne vrednosti s funkcijo FV

Na voljo imamo funkcijo FV, ki spada v skupino finančnih funkcij. Funkcija FV vrne končno vrednost naložbe na osnovi enakih in enakomernih, periodičnih plačil ter nespremenljive obrestne mere.

Excelove finančne funkcije imajo veliko parametrov, zato jih vnašamo s pomočjo orodja *Prilepi funkcijo*, ki je dostopno s klikom na ikono . Dobimo, kar prikazuje Slika 27.



Slika 27: Funkcija FV

V starejših različicah Excela so argumenti funkcij angleški, v MS Excel 2010 pa so v slovenski različici.

Rate je obrestna mera za obdobje.

Če varčujemo mesečno in imamo podano letno obrestno mero (LOM), jo moramo preračunati na mesečno z uporabo relativne (LOM/12) ali konformne metode (odvisno od vrste letne obrestne mere).

<i>Nper</i>	je skupno število plačilnih obdobj oz. skupno število plačil. Če npr. pet let plačujemo mesečne zneske, je obdobje (<i>nper</i>) enako $5 \cdot 12$.				
<i>Pmt</i>	je plačilo za vsako obdobje. V času plačevanja se ne spreminja.				
<i>Pv</i>	je začetna vrednost ali enkratni znesek, ki se plača (oz. prejme) na začetku. Če ga izpustimo, program privzame zanj vrednost 0. Če na samem začetku ne plačamo kakšnega zneska, ki ni vezan na kasnejša, periodična plačila, je vrednost tega parametra 0.				
<i>Type</i>	je število 0 ali 1. Označuje, kdaj zapadejo plačila. Če argument izpustimo, program privzame zanj vrednost 0. <table style="margin-left: 40px;"> <tr> <td>0</td> <td>prvo plačilo se izvede na koncu prvega obdobja</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>prvo plačilo se izvede na začetku prvega obdobja</td> </tr> </table>	0	prvo plačilo se izvede na koncu prvega obdobja	1	prvo plačilo se izvede na začetku prvega obdobja
0	prvo plačilo se izvede na koncu prvega obdobja				
1	prvo plačilo se izvede na začetku prvega obdobja				



Argument vrsta (type) omogoča, da je funkcija FV ustrezna za prenumerandne (type =1) in postnumerandne zneske (type =0).

Pri uporabi te funkcije poskrbimo, da sta podatka obrestna mera (rate) in število plačil (*nper*) prilagojena isti časovni enoti.



Za vse argumente finančnih funkcij velja, da so odhodki (kar plačamo) predstavljeni z negativnimi števili, medtem ko so prihodki (kar prejmemo) predstavljeni s pozitivnimi števili.



Metka želi varčevati denar za nakup stanovanja. Banka bo za privarčevan denar obračunala obresti z letno nominalno obrestno mero 4,4 % in mesečno kapitalizacijo. V začetku vsakega meseca Metka položi na račun 300 €. Koliko denarja bo imela na računu čez 12 mesecev? Koliko denarja bo imela pod enakimi pogoji na računu čez 7 let?



Omenili smo, da izraz nominalna obrestna mera označuje dekurzivno obrestno mero, ki se iz letne preračunava po relativni metodi.

V celico B1 vpišimo letno obrestno mero, v celico B2 pa mesečno plačilo. Plačilo zapišemo z negativnim zneskom, saj Metka ta denar plača! Število kapitalizacijskih obdobj na leto je 12, kar vpišimo v celico B4. Ker je določena letna obrestna mera, pologi pa se plačujejo mesečno, v celici B5 letno obrestno mero preračunajmo v mesečno po relativni metodi. Uporabili bi lahko tudi konformno metodo, če bi banka računala obresti po tej metodi.

Dolžino varčevanja (število plačanih zaporednih obrokov) vpišimo v celici B8 in C8.

S funkcijo FV izračunajmo v celicah B9 in C9 končno vrednost mesečnih plačil. Pri tem upoštevamo, da se mesečni pologi izvedejo na začetku plačilnega obdobja (*type=1*).

	A	B	C
1	Letna obrestna mera	4,40%	
2	Mesečno plačilo	-300,00	
3	Število kapitalizacijskih obdobj na leto	12	
4			=B1/12
5	Mesečna relativna obrestna mera	0,37%	
6			
7		Doba varčevanja v mesecih	
8		12	84
9	Privarčevani znesek	3.686,96	29.557,19
10			
11	=FV(\$B\$5;B8;\$B\$2;;1)		=FV(\$B\$5;C8;\$B\$2;;1)
12			

Slika 28: Končna vrednost prenumerandnih zneskov



Funkcijo FV uporabljamo tudi za ugotavljanje končne vrednosti neke glavnice. V tem primeru pa je argument plačilo (pmt) enak 0.

3.2.3 Začetna vrednost enakih, periodičnih zneskov

Preden se lotimo računanja, si oglejmo primer, kjer nas zanima začetna vrednost enakih, periodičnih zneskov ob znani končni vrednosti. Najprej pa spoznajmo pojem renta.

Renta je redni dohodek, ki ga prejemo od vloženega kapitala. Omogoča reden in stabilen vir sredstev, ki lahko služi kot dodatna pokojnina.

Za rente je značilen naslednji tok dogodkov (Čibej, 2001):

- najprej vplačamo določeno glavnico (depozit) ali neko obdobje vplačujemo pologe ali pa kombiniramo oboje (vplačamo depozit in še neko obdobje vplačujemo pologe). Možne so vse tri variante.
- Privarčevani znesek določen čas miruje (npr. eno leto).
- Po preteku obdobja mirovanja banka izplača privarčevano glavnico v enem znesku ali jo izplačuje več let, v dogovorjenih mesečnih zneskih.



Starejša oseba, ki je prejela odpravnino ob upokojitvi, se odloči, da v banko položi kapital, da bi ji nato banka določen čas izplačevala rento. Zanima jo npr., koliko denarja mora položiti danes v banko, da bi 10 let prejela dodatno mesečno rento v znesku 200€.

Preden rešimo konkretni primer, izpeljimo ustrezne formule. Kot pri začetni vrednosti enakih periodičnih zneskov, je pomembno, ali se plačilo izvede ob začetku ali koncu obdobja.

Začetna vrednost postnumerandnih zneskov

Sprašujemo se, koliko denarja (s_0) moramo vložiti na začetku prvega leta, da bi ob **koncu** 1, 2 ..., n-tega leta lahko dvignili znesek b in s tem izčrpali vlogo. Obrestovanje je dekurzivno po p % obrestni meri, r je dekurzivni obrestovalni faktor, kapitalizacija pa je letna.

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

Vse zneske b , ki se izplačujejo, moramo najprej razobrestiti ali diskontirati na začetno vrednost in tako diskontirane zneske sešteti.

$$s_0 = \frac{b}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{b}{r^3} + \dots + \frac{b}{r^n}$$

Če upoštevamo, da je zgornja formula vsota geometrijskega zaporedja, jo lahko poenostavimo in dobimo obrazec

$$s_0 = b \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$$

ki podaja začetno vrednost n enakih periodičnih zneskov b . Vrednost s_0 je torej začetna vrednost postnumerandnih zneskov.

Začetna vrednost prenumerandnih zneskov

Sprašujemo se, koliko denarja moramo vložiti na začetku prvega leta, da bi ob **začetku** 1, 2 ..., n -tega leta lahko dvignili znesek b in s tem izčrpali vlogo. Obrestovanje je dekurzivno po p % obrestni meri, r je dekurzivni obrestovalni faktor, kapitalizacija pa je letna.

Ravnamo podobno kot prej. Vse zneske b , ki se izplačujejo, moramo najprej razobrestiti ali diskontirati na začetno vrednost in tako diskontirane zneske sešteti. Ker se prvi znesek izplača takoj, ga še ni treba razobrestiti.

$$S_0 = b + \frac{b}{r} + \frac{b}{r^2} + \dots + \frac{b}{r^{n-1}}$$

Če obrazec poenostavimo, dobimo enakovreden obrazec

$$S_0 = b \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)}$$

S tem obrazcem je podana začetna vrednost n enakih periodičnih zneskov (prenumerandnih zneskov), kjer se prvi znesek izplača takoj ob vplačilu vloge.

Kadar kapitalizacijska doba ni eno leto, sta oba obrazca (za izračun začetne vrednosti prenumerandnih zneskov in začetne vrednosti postnumerandnih zneskov) veljavna, ob naslednjih predpostavkah:


- zneski so enaki in morajo dospeti ob vsakem začetku ali koncu te dobe,
- obrestna mera mora biti podana za to dobo.

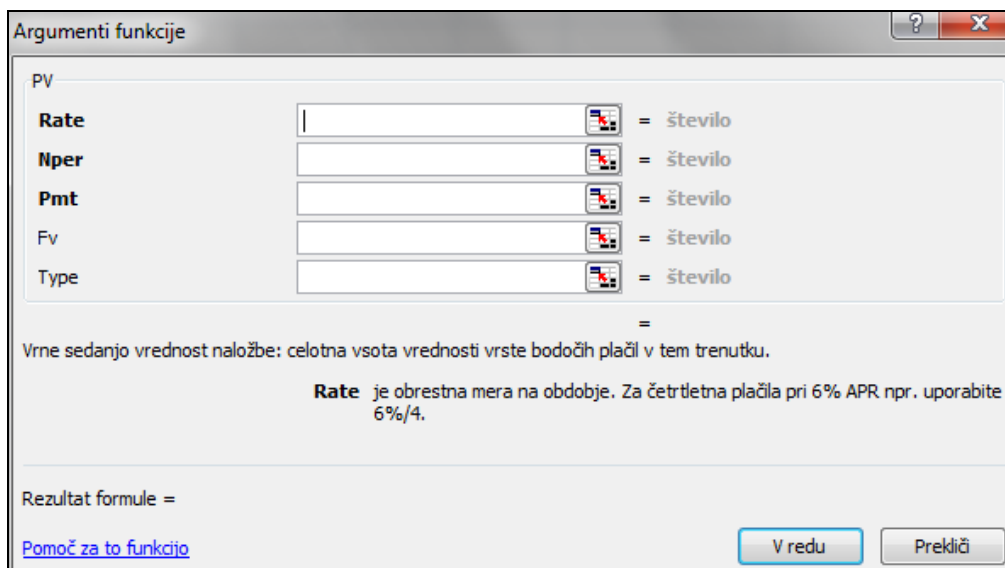
Obrazce lahko uporabite npr. za mesečna vplačila, če določimo ustrezno mesečno obrestno mero. Če so npr. vplačila mesečna in je določena letna obrestna mera, jo moramo pred uporabo formul preračunati v mesečno obrestno mero. Preračun obrestne mere naredimo po relativni ali konformni metodi.

Obrazci so zapleteni in bi imeli z njimi precej dela in veliko možnosti za napake. Zato si pri izračunu končne vrednosti enakih periodičnih zneskov pomagamo s funkcijo PV, ki je vgrajena v MS Excela.

3.2.4 Računanje začetne vrednosti s funkcijo PV


Funkcija PV vrne sedanjo ali začetno vrednost finančne naložbe (npr. rente, anuitetnega kredita, depozita).


Najprej bomo razložili njeno sintakso, nato pa navedli več primerov uporabe. Najprej si oglejmo sliko (Slika 29), ki jo dobimo po kliku na  in izboru funkcije PV iz nabora finančnih funkcij.




Slika 29: Funkcija PV

- Rate** je obrestna mera za obdobje.
 Če imamo npr. rento z 10 % letno obrestno mero, ki jo bomo prejeli mesečno, je mesečna obrestna mera izračunana po proporcionalni metodi, 10 %/12, kar je 0,83 %. V funkcijo bi kot obrestno mero vnesli 10 %/12 ali 0,83 % ali 0,0083 ali sklic na ustrezno celico.
- Nper** je skupno število plačil oz. plačilnih obdobj.
 Če npr. prejemo rento štiri leta, v mesečnih izplačilih, jo prejmemo 4*12 (ali 48) krat. V funkcijo bi za nper vnesli 48 oz. sklic na ustrezno celico.
- Pmt** je obročno plačilo, ki se med trajanjem plačevanja ne spreminja.
- Fv** je prihodnja (končna) vrednost ali blagajniško stanje, ki ga želimo doseči po izvedbi zadnjega plačila. Če ga izpustimo, privzame program zanj vrednost 0.
- Type** Vrsta je število 0 ali 1. Označuje, kdaj zapadejo plačila.
 0 na koncu obdobja
 1 na začetku obdobja
 Če argumenta ne vnesete, privzame Excel vrednost 0.

 Znesek, ki ga plačamo, zapišemo z negativnim številom. Znesek, ki ga prejmemo, zapišemo s pozitivnim številom.

 Marjeta je dobila odpravnino ob upokojitvi in ima nekaj prihrankov. Rada bi 10 let prejela dodatno mesečno »pokojnino« v višini 200 €. Odločila se je, da bo z banko sklenila pogodbo o izplačilu rente, pod naslednjimi pogoji. Dekurzivna obrestna mera, ki jo prizna banka, je 4,9 %. Rento bo banka izplačevala mesečno 10 let. Prvo plačilo bo banka izvedla čez en mesec. Koliko mora Marjeta danes položiti v banko, da bo lahko prejela takšno rento?

 Plačila bodo dospevala ob koncu obdobja. Gre torej za postnumerandne zneske (vrsta plačil je 0).

	A	B	C	D	E	F
1	Mesečno plačilo	200,00				
2	Letna obrestna mera	4,90%				
3	Vrsta plačil	0				
4	Število plačil	120				
5	Kapitalizacijsko število	12				
6						
7		Linearna	Konformna			=NOMINAL(B2;B5)/B5
8	Mesečna obrestna mera	0,41%	0,40%			
9	Začetna vrednost	-18.943,45	-19.037,11			=PV(C8;\$B\$4;\$B\$1;;C3)
10						

Slika 30: Izračun začetne vrednosti rente s funkcijo PV

Ker imamo podano letno obrestno mero, jo moramo preračunati na mesečno. Iz naloge ni razvidno, ali je podana letna obrestna mera relativna ali konformna, zato bomo naredili oba izračuna⁴. Po relativni metodi je mesečna obrestna mera ena dvanajstina letne. Po konformni metodi mesečno obrestno mero izračunamo s pomočjo funkcije NOMINAL, kot kaže slika (Slika 30).

Začetno vrednost rente izračunamo s pomočjo funkcije Pv, kot kaže slika (Slika 30).

Kasneje bomo ugotovili, da lahko funkcijo PV uporabimo tudi za izračun začetnih vrednosti kreditov.

3.2.5 Računanje višine varčevalnega zneska s funkcijo PMT

Izračunati znamo začetne in končne vrednosti prenumerandnih in postnumerandnih zneskov. Zdaj pa nas zanima znesek, ki ga moramo vsako dobo položiti v banko, da ob določeni obrestni meri privarčevani znesek naraste na neko želeno, končno vrednost.

Funkcija PMT

Slika 31: Funkcija PMT

Rate je obrestna mera za obdobje. Podana mora biti za enako obdobje, kot se plačujejo enaka, periodična plačila.

⁴ Če vrsta obrestne mere ni natančno določena, praviloma uporabimo relativno metodo.

- Nper* je skupno število plačilnih obdobj.
- Pv* je sedanja vrednost – skupni znesek, ki predstavlja sedanjo vrednost vsote naobrestovanih plačil.
- Fv* je končna vrednost ali stanje, ki ga želimo doseči po izvedbi zadnjega plačila. Če ga izpustimo, privzame program zanj vrednost 0.
- Type* je število 0 ali 1, ki označuje, kdaj zapadejo plačila.
 - 0 na koncu obdobja
 - 1 na začetku obdobja

Pri uporabi te funkcije pazimo, da sta podatka obrestna mera (rate) in število plačil (nper) prilagojena isti časovni enoti.



Koliko denarja moramo na začetku vsakega meseca položiti v banko, da po 10 letih privarčujemo 40.000,00 €, če je dekurzivna letna obrestna mera, ki jo zagotavlja banka, 4 %?

Nalogo lahko rešimo tako, da iz formule za izračun končne vrednosti prenumerandnih zneskov izrazimo plačilo (označili smo ga z a) ali, kar je enostavneje, uporabimo Excelovo funkcijo PMT.



Rešimo zdaj primer, ki smo si ga zastavili na začetku tega poglavja. Rešitev je na sliki (Slika 31).

V tabelo vpišemo vrednosti. Ker ni navedena vrsta obrestne mere, uporabimo relativno metodo za preračun letne obrestne mere na mesečno. Mesečni varčevalni znesek izračunamo s pomočjo funkcije PMT, ki jo sestavimo s pomočjo čarovnika.

	A	B	C	D
1	Doba	120	mesecev	
2	Privarčevani znesek	40.000		
3	Letna OM	4%	=B3/12	
4	Mesečna OM	0,33%		
5	Tip	1		
6	Mesečno plačilo	-270,74 €	=PMT(B4;B1;;B2;1)	

Slika 32: Izračun mesečnega varčevalnega zneska

3.3 DEPOZITI

Računanje obresti na depozite, ki trajajo manj kot eno leto, smo dejansko že spoznali v poglavju Obrestovanje. Na tem mestu bomo spoznali, kako lahko uporabimo funkciji FV in PV za izračune pri depozitih, ki trajajo več kapitalizacijskih obdobj in se kot način obrestovanja uporabi obrestno obrestni račun.

Računanje končne vrednosti depozita s FV

S pomočjo funkcije FV računamo končno vrednost depozitov, ki se obrestujejo na obrestno obrestni način in trajajo več kapitalizacijskih dob. Gre za klasično obrestovanje glavnice, ki smo ga v primeru obrestno obrestnega računa že spoznali. Na tem mestu pa si oglejmo primer rešitve z Excelom.



Miha je v banko vložil depozit v višini 5.000,00 € za 10 let z letno obrestno mero 6,61 %. Koliko denarja dobi po preteku vezave?



Zanima nas torej končna vrednost glavnice po preteku 10-letne vezave.

V Excelu rešimo nalogo, kot kaže slika (Slika 33).

V našem primeru je plačilo (pmt) enako 0, saj nimamo rednih in ponavljajočih se obročnih plačil. Argument lahko v tem primeru izpustimo.

	A	B	C	D
1	Depozit	-5.000,00		
2	LOM	6,61%		
3	Doba v letih	10		
4				
5	Končna vrednost	9.483,08 €		

Slika 33: Funkcija FV za izračun končne vrednosti depozita

Računanje začetne vrednosti depozita s PV

Pogosto nas zanima začetna vrednost neke naložbe, ki nam bo po preteku določenega časa prinesla neko znano končno vrednost. Na tržišču so npr. vrednostni papirji, ki jih danes kupimo z diskontom, po določenem času pa jih lahko unovčimo in zanje dobimo nominalno vrednost, označeno na papirju.

Funkcija PV je, podobno kot funkcija FV, zelo uporabna. Uporabljamo jo za ugotavljanje začetne vrednosti neke prihodnje glavnice ali za ugotavljanje sedanje vrednosti zaporednih enakih plačil.



Koliko denarja moramo vložiti danes v banko, da bomo po 10 letih dobili 10.000,00 €, če je dekurzivna letna obrestna mera, ki jo zagotavlja banka, 5 %?



Nalogo rešimo s funkcijo PV.

V preglednico najprej vpišimo podatke, kot prikazuje slika. Poznamo končno vrednost glavnice (fv), dobo varčevanja oz. število kapitalizacijskih obdobij, kolikor traja varčevanje (nper), in letno obrestno mero (rate).

Zanima nas začetna vrednost naložbe. Uporabimo čarovnika in sestavimo funkcijo PV. Ustrezne argumente vpišimo oz. jih pokažimo s klikom, kot prikazuje slika.

Argument plačilo (pmt) ni vpisan, saj med trajanjem depozita ne plačujemo nobenih dodatnih obrokov. K argumentu pmt bi lahko vpisali 0, saj obroka ni oz. je enak 0.

Argument vrsta (type) v tem primeru ni pomemben, saj se nanaša le na način vplačevanja obrokov, ki jih v tem primeru nimamo.

Rezultat formule je -6.139,13 €. Ker je določena končna vrednost glavnice s pozitivnim predznakom, pomeni, da bomo po preteku dobe varčevanja dobili denar. Ker moramo začetno vrednost te naložbe plačati banki, je podana z negativnim predznakom.

	A	B	C	D
1	Končna glavnica	10.000,00		
2	Doba	10		
3	Letna obrestna mera	5%		
4				
5	Začetna vrednost	-6.139,13	=PV(B3;B2;;B1)	

Slika 34: Začetna vrednost depozita, izračunana s PV

3.4 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

27. Kako računamo obresti za denarna sredstva, ki jih imamo na osebnem računu?
28. Kakšna je razlika med prenumerandnimi in postnumerandnimi zneski?
29. Iz bančnega izpiska je razvidno, da je na računu potekal naslednji promet:

do 5. 9. 2010	stanje	0
5. 9. 2010	vplačilo	1.500,00 €
8. 9. 2010	izplačilo	450,00 €
19. 9. 2010	izplačilo	350,00 €
22. 9. 2010	vplačilo	1.000,00 €
24. 9. 2010	izplačilo	320,00 €
25. 9. 2010	izplačilo	160,00 €

Kakšno stanje bi bilo razvidno iz bančnega izpiska po pripisu obresti 30. 9. 2010, če je letna nominalna obrestna mera 1 %?

Rešitev: 1.220,83 € (obresti 0,83 €).

30. Kakšen znesek moramo vložiti na začetku 1. leta, da bi po 10 letih ob 5,2 % dekurzivni obrestni meri in letni kapitalizaciji imeli 90.000,00 €?

Rešitev: 54.210,71 €.

31. Peter Minit je maja leta 1626 od Indijancev kupil otok Manhattan za 24\$. Koliko USD bi privarčevali do maja leta 2010, če bi denar naložili s stopnjo donosa 3 %? Koliko bi privarčeval, če bi denar naložil s stopnjo donosa 5 %?

Rešitev: 2.040.354,02 USD pri 3 % stopnji donosa; 3.287.774.968,00 € pri 5 % stopnji donosa (ni napaka!)

32. Razmišljate o renti, kjer bi v naslednjih 15 letih konec vsakega meseca dobili 500 €. Glavnico želite vplačati v enem znesku. Koliko denarja bi morali danes položiti, če je letna obrestna mera 6 %.

Rešitev: Začetna vrednost, če bo banka obresti računala po konformni metodi je 59.859,16 € in 59.251,76 €, če bo banka obresti računala na linearni način.

33. Na račun v banki naslednjih 35 mesecev ob začetku vsakega meseca položite 200,00 €. Banka vam pri tem mesečno pripisuje obresti v višini 5 % letno. Koliko boste imeli na računu ob koncu varčevanja?

Rešitev 7.550,67 € (po relativni metodi), 7.537,86 € (po konformni metodi).

34. Jana varčuje denar za nakup stanovanja. Banka bo za privarčevan denar obračunala obresti z letno nominalno obrestno mero 5,4 % in mesečno kapitalizacijo. V začetku vsakega meseca položi na račun 400 €. Koliko denarja bo imela na računu po dveh letih? Koliko denarja bi imela pod enakimi pogoji na računu čez 5 let?

Rešitev: 10.159,10 € po 2 letih, 27.605,56 € po 5 letih

35. Podjetje A položi v banko depozit v višini 500.000,00 € za 5 mesecev. Letna nominalna obrestna mera za depozite na 5 mesecev je 5,61 %. Koliko denarja dobi podjetje po 5 mesecih?

Rešitev: 511.797,29 €.

36. Majda je dobila odpravnino ob upokojitvi in ima nekaj prihrankov. Rada bi 10 let prejerala mesečno dodatno pokojnino v višini 700 €. Odločila se je, da bo z banko sklenila pogodbo o izplačilu rente pod naslednjimi pogoji. Dekurzivna, relativna obrestna mera, ki jo prizna banka, je 4,6 %. Rento bo banka izplačevala mesečno, 10 let, na začetku meseca. Koliko mora danes položiti v banko, da bo lahko prejerala takšno rento?

Rešitev: 67.487,10 €.

37. Koliko denarja morate vložiti vsak mesec ob koncu meseca v banko, da boste v 15 letih privarčevali 30.000,00 €, če je dekurzivna letna obrestna mera, ki jo zagotavlja banka, 5 %?

Rešitev: 111,77 €.

4 KREDITI

Kredit je pojem, ki ga ni potrebno posebej razlagati. Skoraj vsi, si vsaj občasno, izposodimo denar. To pomeni, da vzamemo kredit.

Rečemo lahko, da gre pri kreditu za sporazum med posojilodajalcem (npr. fizična oseba, banka podjetje, trgovina) in posojilojemalcem. Na začetku kreditnega razmerja gre za prenos denarja od posojilodajalca na posojilojemalca. Obveznost posojilojemalca je, da vrne izposojena finančna sredstva na dogovorjen način in skupaj z dogovorjenimi obrestmi. Določila v zvezi s kreditom opredeljujejo kreditni pogoji.

Kreditni pogoji so določila o trajanju, zavarovanju in drugih značilnostih posojila ter pripadajočih obrestih. Zakon o potrošniških kreditih (Ur.l. RS, št. 59/2010) opredeljuje, katere informacije mora obvezno vsebovati kreditna pogodba. Kreditojemalec ima veliko pravic, kreditodajalec pa kar nekaj obveznosti. Oba jih morata poznati pred sklepanjem kreditne pogodbe.

4.1 VRSTE KREDITOV

Kredite razvrstimo po različnih kriterijih, npr. glede na trajanje in glede na obliko vračanja.

4.1.1 Kratkoročni in dolgoročni krediti

Glede na trajanje kreditnega razmerja delimo kredite na kratkoročne in dolgoročne. Za kratkoročne štejejo praviloma krediti z dobo odplačevanja do enega leta. Ostali so dolgoročni.

V matematičnem smislu ni razlike med kratkoročnimi in dolgoročnimi krediti. V praksi je razlika predvsem v vrsti obrestne mere. Za kratkoročne kredite je značilna nespremenljiva obrestna mera. Za dolgoročne kredite, npr. za stanovanjske kredite s trajanjem 10 ali več let, je značilna spremenljiva obrestna mera. O spremenljivi obrestni meri bomo več povedali nekoliko kasneje.

4.1.2 Anuitetni in obročni krediti

Kredite delimo na obročne in anuitetne. Podjetja večinoma jemljejo obročne kredite, potrošniki pa anuitetne. Obe vrsti in razlike med njima bomo spoznali v nadaljevanju.

Anuitetni krediti

Za anuitetne kredite je značilno, da posojilojemalec kredit vrača z enakimi, rednimi (praviloma mesečnimi) plačili, ki zajemajo delno poplačilo glavnice in plačilo pripadajočih obresti.

Za anuitetni način je značilno, da vnaprej izračunamo, kolikšen znesek je treba periodično vračati, da bo v določenem številu obdobj vrnjena izposojena glavnica in bodo sočasno plačane tudi pripadajoče obresti (ZBS, 2008). Problem je matematično enak izplačilu rente, kjer z enakimi, periodičnimi plačili v določenem času izčrpamo začetni znesek.

Anuiteta je prvotno označevala letni znesek. Pri mesečnem odplačevanju kredita bi morali praviloma uporabljati izraz mesečna anuiteta. Vendar pa v praksi pogosto poenostavljamo in pridevnik mesečna izpuščamo.

Med vračanjem kredita se anuiteta ne spreminja, če gre za nespremenljivo obrestno mero skozi celotno obdobje. Če ima kredit spremenljivo obrestno mero (Euribor, Libor ...), se anuiteta kljub vsemu lahko spreminja, vendar praviloma ne pogosteje kot enkrat letno.

Obročni krediti

Obročni krediti so značilni za posle s podjetji.

Pri obročnih kreditih glavnico najpogosteje (ne pa nujno) razdelimo na enake dele in jo vrnemo v določenih rokih (vsak obrok do določenega datuma). Obresti se plačujejo posebej (ZBS, 2008). Najpogostejša praksa je mesečno plačevanje obresti ne glede na datume zapadlosti posameznega obroka kredita.



Podjetje si sposodi 10.000 € in se z banko dogovori, da znesek vrne v treh obrokih po 4.000 €. Prvi obrok zapade po štirih mesecih, drugi po šestih in tretji po dvanajstih.

Pripadajoče obresti podjetje plača vsak mesec.

Kot vidimo iz primera, podjetje obrokov ne plačuje periodično (na enake časovne intervale).

4.2 IZRAČUNI ANUITETNIH KREDITOV

V nadaljevanju nas bo zanimalo:

- koliko kredita lahko dobimo, če poznamo dobo vračanja, obrestno mero in mesečni znesek, ki ga lahko plačujemo (npr. del plače, ki ga lahko obremenimo s kreditom),
- kakšna bo anuiteta, če poznamo znesek kredita, dobo vračanja in obrestno mero,
- koliko glavnice plačamo z določeno anuiteto,
- koliko obresti plačamo z določeno anuiteto,
- koliko glavnice smo že plačali in koliko smo še dolžni,
- kakšna je efektivna obrestna mera našega kredita.

Pri izračunih anuitetnih kreditov z mesečnim odplačevanjem uporabljamo metodo $(30, 360)^5$. Izračunati moramo mesečno obrestno mero. Iz podane letne obrestne mere jo izračunamo po porcionalni metodi tako, da letno obrestno mero delimo z 12.

V zadnjem času skoraj ni več poslov, kjer bi banke računale obresti po konformni metodi (ZBS, 2008). Če pa bi jih, bi za preračun iz letne na mesečno obrestno mero uporabili konformni način (korenjenje in potenciranje oz. izračun s funkcijo NOMINAL).

Anuitete običajno zapadejo v plačilo ob koncu meseca. Prvo anuiteto je treba plačati konec naslednjega meseca glede na datum prejema glavnice. Taki zneski so postnumerandni. (Naj spomnimo, da so pri varčevanjih običajni prenumerandni zneski).

Pri anuitetnih kreditih uporabljamo matematične formule in funkcije, ki smo jih spoznali v poglavju o postopnem varčevanju enakih, periodičnih prenumerandnih ali postnumerandnih zneskov.

4.2.1 Izračun začetne vrednosti kredita – funkcija PV

Kdor je že kupoval kaj dražjega in potreboval kredit, si je najprej zastavil naslednje vprašanje: koliko kredita lahko dobim?

⁵ Leto je razdeljeno na 12 enakih mesecev s trajanjem 30 dni.

Izračun naredimo s pomočjo funkcije PV, ki smo jo spoznali v poglavju Varčevanje.



Janez potrebuje posojilo za nakup stanovanja. Banka bi mu ga odobrila za 15 let, s 6 % letno nominalno obrestno mero. Anuitete bi plačeval ob koncu meseca. Glede na višino plače lahko najame posojilo z višino mesečne anuitete največ 300 €. Kolikšen je najvišji znesek posojila, ki ga lahko dobi? Kolikšen je ta znesek, če je obrestna mera konformna?



Rešitev je na sliki (Slika 35).

	A	B	C	D	E
1	Mesečna anuiteta	-300,00			
2	Letna obrestna mera	6,00%			
3	Vrsta plačil	0			
4	Število plačil	180			
5					
6		linearna	konformna		
7	Mesečna obrestna mera	0,50%	0,49%		=NOMINAL(B2;12)/12
8	Začetna vrednost	35.551,05	35.915,49		
9					
10					=PV(B7;\$B\$4;\$B\$1;;B3)

Slika 35: Začetna vrednost kredita

Za izračun zneska kredita uporabimo funkcijo PV (začetna vrednost).

V preglednico najprej vpišimo podatke. Anuiteto vpišemo z negativnim predznakom, saj jo bo moral Janez plačati vsak mesec.

Obrestna mera je določena na letni ravni, zato jo moramo uskladiti z načinom plačevanja in pretvoriti v mesečno po formuli =B2/12

Funkcijo PV uporabimo s pomočjo čarovnika.

Števila, ki jih vrne funkcija, so lahko tako velika ali oblikovana, da se v celici prikaže #####. V tem primeru razširimo stolpec in zagledamo rezultat.

4.2.2 Izračun anuitete – funkcija PMT

Za izračun mesečne anuitete uporabimo finančno funkcijo PMT, ki vrne periodično plačilo, na temelju enakih plačil in nespremenljive obrestne mere.

Funkcijo PMT smo že spoznali v poglavju Varčevanje.



Peter je najel kredit v višini 10.000,00 € pod naslednjimi pogoji. Letna nominalna obrestna mera je 7,50 %. Kredit bo vrnil v 24 enakih mesečnih anuitetah, ki zapadejo konec meseca. Kolikšna je višina anuitete?



Rešitev je na sliki (Slika 36).

Parametra type nismo vnesli, ker se anuitete plačujejo ob koncu meseca.

	A	B	C	D
1	Kredit	10.000		
2	Letna NOM	7,50%		
3	Doba	24		
4				
5	Mesečna OM	0,63%	=PMT(B6;B4;B1)	
6	Višina anuitete	-450,00 €		
7				

Slika 36: Izračun mesečne anuitete s funkcijo PMT

Ker bo Peter anuitete plačeval, kredit pa je prejel, vrne funkcija PMT negativni predznak.

4.2.3 Razdolžnina – funkcija PPMT

Ko vračamo kredit, vračamo glavnico in obresti. Z vsako anuiteto vrnemo nekaj glavnice in plačamo vse obresti na preostali dolg. Delež plačila glavnice in obresti se z anuitetami spreminja. Na začetku odplačevanja kredita odplačamo manj glavnice in več obresti, proti koncu pa več glavnice in manj obresti.

Delež glavnice, ki jo plačamo s posameznim obrokom, imenujemo razdolžnina. Ime izhaja iz pomena, saj se za plačani del glavnice zmanjša dolg.

Funkcija PPMT vrne znesek oz. višino glavnice, ki jo odplačamo z določeno anuiteto. Razlago funkcije si oglejmo na primeru.



Najeli ste 90.000,00 € posojila, ki ga boste odplačevali naslednjih 20 let. Letna nominalna obrestna mera je 10 %. Kapitalizacija je mesečna. Zanima vas, koliko glavnice odplačate v prvem, stodvajsetem (na polovici) in zadnjem mesecu odplačevanja posojila?

Nalogo rešimo s pomočjo funkcije PPMT, katere rezultat je višina glavnice, ki jo plačamo z določeno anuiteto. Spoznajmo jo.

Argumenti funkcije

PPMT

Rate = število

Per = število

Nper = število

Pv = število

Fv = število

=

Vrne plačilo na glavnico za naložbo, ki temelji na enakih plačilih in nespremenljivi obrestni meri.

Rate je obrestna mera na obdobje. Za četrtletna plačila pri 6% APR npr. uporabite 6%/4.

Rezultat formule =

[Pomoč za to funkcijo](#) V redu Prekliči

Slika 37: Funkcija PPMT

Rate je obrestna mera za obdobje

Per je zaporedna številka obroka. Biti mora v obsegu 1 do nper.

Nper je skupno število plačilnih obdobj.

Pv je sedanja vrednost. To je skupni znesek, ki predstavlja začetno vrednost vrste

bodočih plačil. Pri kreditu je sedanja vrednost posojeni oz. izposojeni znesek.

Fv je končna vrednost ali stanje, ki ga želimo doseči po izvedbi zadnjega plačila. Če izpustimo argument *fv*, privzame program zanj vrednost 0. Končna vrednost posojila je 0.

Type je število 0 ali 1. Označuje, kdaj zapadejo plačila.

0 na koncu obdobja
1 na začetku obdobja



Rešitev je vidna na sliki (Slika 38).

	A	B	C	D	E	F
1	Kredit	90.000				
2	Doba	240				
3	Letna NOM	10%				
4	Mesečna NOM	0,83%				
5	Zap. št. obroka	Razdolžnina				
6	1	-118,52 €			=PPMT(\$B\$4;A6;\$B\$2;\$B\$1;;0)	
7	120	-318,19 €				
8	240	-861,34 €				
9						
10	Anuiteta	-868,52 €			=PMT(B4;B2;B1;;0)	

Slika 38: Razdolžnina v posamezni anuiteti

Obrestno mero smo po proporcionalni metodi preračunali na mesečno (celica B4). Formulo bi lahko vpisali tudi na mesto v funkciji, kjer se določi argument *rate*.

S prvo anuiteto plačamo le 118,52 € glavnice, s srednjo 318,19 €, z zadnjo pa kar 861,34 € glavnice.

Za primerjavo izračunamo še anuiteto (celica B10). Ugotovimo, da s prvo anuiteto odplačamo zelo malo kredita.

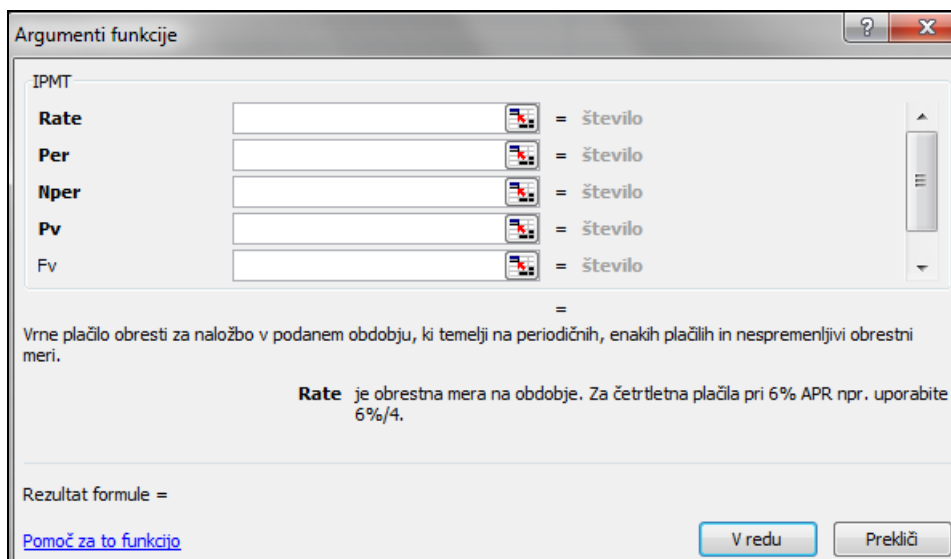
Ljudje pogosto zmotno mislimo, da na polovici dobe vračanja kredita odplačamo polovico dolga. Resnica je povsem drugačna. Pravkar rešeni primer to potrjuje. Največ kredita vrnemo v zadnjih dobah odplačevanja.

Pomembno je, da z vsakim obrokom plačamo vsaj malo glavnice. V nasprotnem primeru dolga ne zmanjšujemo in, če obresti presegajo anuiteto, postajamo vse več dolžni. To se lahko zgodi, če se zaradi spremenljive obrestne mere ali valutne klavzule spremenijo kreditni pogoji. V takih primerih se anuiteta praviloma poveča ali pa se dolžnik dogovori o reprogramiranju kredita (npr. za podaljšanje dobe).

Na začetku odplačevanja kredita z anuitetami plačujemo predvsem obresti, kar bo pokazal naslednji primer.

4.2.4 Obresti v obroku – funkcija IPMT

S pomočjo funkcije IPMT izračunamo znesek obresti, ki jih plačamo z določeno anuiteto. Po sintaksi je zelo podobna funkciji PPMT.



Slika 39: Funkcija IPMT

- Rate* je obrestna mera za obdobje.
- Per* je zaporedna številka anuitete, za katero hočemo ugotoviti, koliko obresti vsebuje. *Per* mora biti v obsegu 1 do *nper*.
- Nper* je skupno število plačilnih obdobj.
- Pv* je začetna vrednost kredita. Če izpustimo argument *pv*, privzame program zanj vrednost 0. Pri kreditu predstavlja sedanja vrednost začetno stanje oz. posojeno glavnico in ne more biti 0.
- Fv* je bodoča vrednost ali končno stanje, ki ga želimo doseči po izvedbi zadnjega plačila. Če izpustimo argument *fv*, privzame program zanj vrednost 0. Končna vrednost posojila je 0.
- Type* je število 0 ali 1. Označuje, kdaj so plačila zapadla (0 – na koncu obdobja, 1 – na začetku obdobja). Če ta argument izpustimo, privzame program zanj vrednost 0.

Finančna funkcija IPMT vrne plačilo obresti za naložbo na temelju periodičnih, enakih plačil in nespremenljive obrestne mere.



Najeli smo 90.000,00 € posojila, ki ga bomo odplačevali naslednjih 20 let. Letna nominalna obrestna mera je 10 %. Kapitalizacija je mesečna. Zanima nas, koliko obresti odplačamo v prvem, stodvajsetem (na polovici) in zadnjem mesecu odplačevanja posojila.



Nalogo rešimo v isto tabelo kot prej in dobimo rešitev, ki jo kaže Slika 40.

Funkcijo IPMT vstavimo s pomočjo čarovnika.

Če seštejemo razdolžnino in obresti, dobimo anuiteto. Kot se lahko prepričamo, se anuiteta ne spreminja. Spreminjata se le znesek razdolžnino in obresti, ki ju vsebuje določena zaporedna anuiteta.

	A	B	C	D	E
1	Kredit	90.000	=PPMT(\$B\$4;A6;\$B\$2;\$B\$1;;0)		
2	Doba	240			
3	Letna NOM	10%	=IPMT(\$B\$4;A6;\$B\$2;\$B\$1;;0)		
4	Mesečna NOM	0,83%			
5	Zap. št. obroka	Razdolžnina	Obresti	Skupaj	
6	1	-118,52 €	-750,00 €	-868,52 €	
7	120	-318,19 €	-550,33 €	-868,52 €	
8	240	-861,34 €	-7,18 €	-868,52 €	

Slika 40: Obresti v določeni anuiteti

V prvi anuiteti je delež obresti zelo visok, v zadnji zelo nizek.

4.2.5 Efektivna obrestna mera (EOM)

Včasih kreditodajalec zaračuna nadomestilo za odobritev posojila, zavarovanje in druge stroške.



Na banki si sposodimo 10.000 € za dobo 2 let. LNOM za kredit (kreditna obrestna mera) je 7 %. Banka zaračuna 42 € stroškov odobritve kredita in 184 € stroškov zavarovanja. Koliko denarja dejansko dobimo? Kolikšna je dejanska obrestna mera, če upoštevamo, da smo dobili manj denarja, kot je začetna vrednost kredita?



Dobili smo efektivno nižjo glavnico (namesto 10.000 € smo dobili 226 € manj, kar znese le 9.744 €). Očitno je, da je dejanska obrestna mera višja kot kreditna obrestna mera. O tem se bomo prepričali v nadaljevanju, ko bomo spoznali funkcijo RATE.

Različni ponudniki kreditov lahko ponudijo na videz enako obrestno mero. Dejanska obrestna mera, ki jo dobimo z upoštevanjem plačil pred odobritvijo posojila, se razlikuje od kreditne obrestne mere. Ker je tovrstno kreditiranje razširjeno tudi pri nas in za neukega končnega potrošnika nepregledno, je država zakonsko zaščitila potrošnike. Zakon o potrošniških kreditih (Ur.l. RS, št. 59/2010) zahteva, da kreditodajalec oz. ponudnik kredita kreditujemalcu naredi informativne izračune in poda efektivno obrestno mero. Zakon o potrošniških kreditih (Ur.l. RS, št. 59/2010) definira efektivno obrestno mero in njen izračun.

Poenostavljeno lahko rečemo, da je **efektivna obrestna mera (EOM)** tista letna obrestna mera (diskontna stopnja), ki jo izračunamo iz znanih podatkov o kreditu (anuiteta, doba vračanja), pri čemer začetno vrednost kredita (znesek kredita) zmanjšamo za stroške odobritve in stroške zavarovanja. Obrestno mero iz drugih podatkov o kreditu izračunamo s pomočjo funkcije RATE. Spoznajmo torej funkcijo RATE in si na primeru oglejmo izračun efektivne obrestne mere.

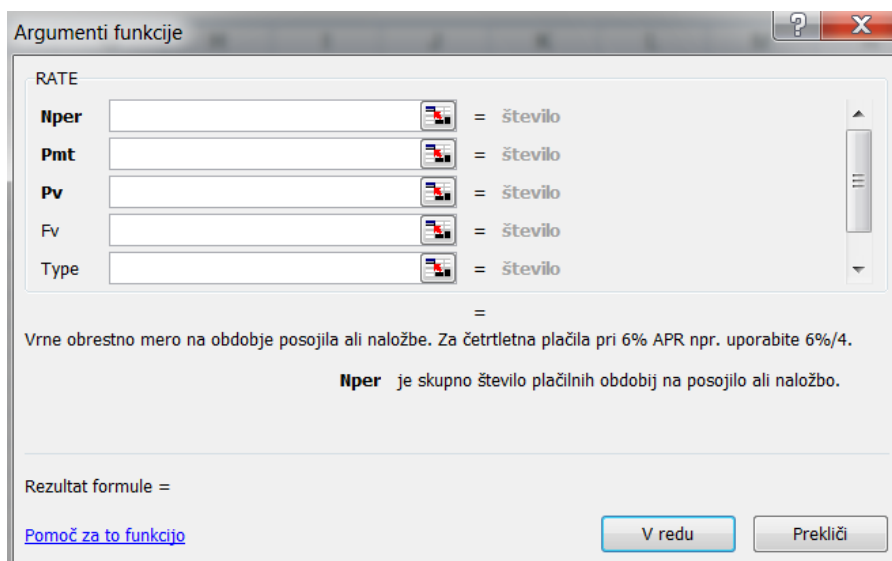
4.2.6 Obrestna mera – funkcija RATE

Kadar poznamo podatke kot znesek kredita ter število in višina anuitet, lahko s pomočjo funkcije RATE izračunamo dejansko obrestno mero. Zelo je uporabna, kadar želimo izračunati efektivno obrestno mero kredita.

Sintakso funkcije in njene parametre vidimo na sliki (Slika 41). Ima parametre, ki jih že poznamo, dodan pa je parameter *Guess*, ki pa nam ga ni treba določiti.

V finančnih funkcijah uporabljamo predznak, da označimo denarni tok oz., ali se določen znesek plača ali dobi plačanega. Vendar pri funkcijah, ki smo jih spoznali do sedaj, predznak

ni vplival na številski rezultat. Pri funkciji RATE pa je pomembno, da pravilno označimo denarni tok.



Slika 41: Funkcija RATE

- Nper* je skupno število plačilnih obdobj.
- Pmt* je obročno plačilo, ki se med trajanjem kredita ne spreminja. *Pmt* zajema glavnico in obresti.
- Pv* je začetna vrednost kredita (pri izračunu EOM zmanjšana za stroške). *Pmt* ima nasprotni predznak kot *Pv*. Če dobimo kredit, je znesek *Pv* pozitiven, znesek *Pmt* pa negativen, saj anuitete vračamo.
- Fv* je bodoča vrednost posojila – se pravi 0.
- Type* je število 0 ali 1. Označuje, kdaj zapadejo plačila.
- | | |
|---|--------------------|
| 0 | na koncu obdobja |
| 1 | na začetku obdobja |
- Guess* je naša ocena o tem, kolikšna naj bi bila obrestna mera. Polje pustimo prazno, razen če predvidevamo zelo visoko obrestno mero.



Pazljivi moramo biti pri predznakih parametrov Pmt in Pv.

Če imamo mesečne anuitete, je rezultat funkcije mesečna obrestna mera. Ker ponavadi potrebujemo letno obrestno mero, jo moramo izračunati na enega od naslednjih načinov, ki je odvisen od vrste obrestne mere:

- po proporcionalni metodi – mesečno obrestno mero pomnožimo z 12,
- po konformni metodi – mesečni dekurzivni obrestovalni faktor potenciramo z 12 in odštejemo 1.



Odplačujemo štiriletno posojilo v višini 8.000,00 €. Plačujemo mesečno anuiteto 200,00 €, ki zapade v plačilo ob koncu meseca. Ne vemo pa, kolikšna je letna obrestna mera. Kolikšna je torej letna obrestna mera?



S funkcijo RATE dobimo mesečno obrestno mero, ki znaša 0,77 %. Pretvorbo na letno proporcionalno obrestno mero naredimo tako, da mesečno obrestno mero pomnožimo z 12. Na tak način dobimo rezultat 9,24 %.

Kot vidimo na sliki, moramo biti pazljivi pri predznakih parametrov Pmt in Pv.

	A	B	C	D
1	Glavnica	8000		
2	Anuiteta	-200		
3	Doba v mesecih	48		
4				
5	Mesečna OM	0,77%	=RATE(B3;B2;B1)	
6	Letna OM	9,24%	=B5*12	
7				

Slika 42: Izračun obrestne mere

Funkcija RATE vrne obrestno mero za obdobje. Program računa obrestno mero z iterativno metodo in lahko pride do nič ali več rešitev. Če zaporedne rešitve funkcije RATE po 20 ponovitvah ne konvergirajo k vrednosti v intervalu manjšem od 0,0000001, vrne RATE vrednost napake #NUM! To se nam kaj hitro lahko zgodi, če napačno uporabimo predznake argumentov.

4.3 IZRAČUNI OBROČNIH KREDITOV

Do sedaj smo se ukvarjali s posebnim primerom kreditov, kjer se periodično plačujejo enaki zneski, ki vključujejo obresti in razdolžnino (anuitete). Tak način kreditiranja je namenjen predvsem prebivalstvu, saj ljudje najlažje sproti plačujemo predvidene zneske.

Spoznajmo še obročne kredite, kjer so izračuni enostavnejši kot pri anuitetnih, zato nimamo na voljo Excelovih funkcij za hitrejšo računanje. Za tovrstno kreditiranje se lahko odločijo podjetja oz. pravne osebe.

Obročni način odplačevanja pomeni ločeni plačili glavnice in obresti (BS, 2008). Pri obročnem načinu odplačila kreditov je glavnica najpogosteje razdeljena na enake dele (BS, 2008), a se lahko podjetje z banko dogovori tudi drugače. Pripadajoče obresti se obračunavajo za obračunsko obdobje, dogovorjeno v pogodbi, na navaden obrestni način (BS, 2008, st. 6). Glede plačila glavnice oz. razdolžnin so banke precej prožne in lahko dolžnik sugerira, kdaj bi plačal določen obrok glavnice. Plačilo obresti pa mora plačnik najpogosteje izvrševati vsak mesec, običajno na podlagi računa, ki mu ga pošlje banka.

4.3.1 Izračun razdolžnine pri obročnih kreditih

Razdolžnina je delež glavnice, ki jo posojilodajalec plača oz. vrne posojilodajalcu. Vsota vseh razdolžnin je izposojeni znesek kredita. Začetna glavnica je razdeljena na enake ali na poljubno velike razdolžnine, ki se plačujejo na dogovorjene termine oz. do dogovorjenega datuma.

Pri kreditiranju podjetij je dokaj pogosto, da se vsak mesec plačujejo obresti, celoten kredit pa se vrne po enem letu, v enem obroku.



Najeli smo 90.000,00 € posojila, ki ga bomo odplačevali mesečno, naslednji dve leti, z enakimi obroki. Koliko znaša razdolžnina v posameznem mesecu?



Glavnico 90.000 € razdelimo na 24 enakih delov. Mesečna razdolžnina je 3.750 €.

4.3.2 Izračun obresti pri obročnih kreditih

Plačilo obresti na kredit se običajno izvršuje mesečno. Obračunsko obdobje je koledarski mesec. Izračunamo, koliko znašajo obresti za določen znesek na preostali dolg (glavnica zmanjšana za že plačane razdolžnine).

Obresti računamo na podoben način kot smo računali obresti na vpogledna sredstva na transakcijskem računu. Pri anuitetnih kreditih smo izračune poenostavili in leto razdelili na enake mesece. Pri obročnih kreditih te poenostavitve ni in upoštevamo dejansko dolžino leta in meseca, za katerega računamo obresti.

Poglejmo najprej najpreprostejši primer.



Podjetje je najelo kratkoročni kredit v višini 100.000 €, ki ga mora vrniti v enkratnem znesku po enem letu. Letna nominalna obrestna mera za posojilo je 6,25 %. Obresti mora plačati vsak mesec. Koliko znašajo mesečne obresti?



Med letom se glavnica ne vrača, torej so vse razdolžnine med letom enake 0. Zadnja razdolžnina pa je celoten znesek kredita.

Mesečne obresti se obračunajo od stanja dolga. Ker se stanje dolga med letom ne zmanjšuje, se obresti ves čas računajo od istega, se pravi od začetnega zneska. Obresti se po mesecih razlikujejo, ker imajo meseci različno število dni.

V tabeli (Slika 43) vidimo izračun obresti v navadnem letu. Ker je znesek dolga ves čas enak in se skozi mesece ne spreminja, se mesečni zneski obresti razlikujejo samo zaradi različnega števila dni v posameznem mesecu.

	A	B	C	D	E
1	Znesek kredita	100.000			
2	Doba v letih	1			
3	Doba v mesecih	12			
4	Letna NOM	6,25%			
5	Dolžina leta	365			
6					
7	Dolžina meseca	Obresti			
8	28	479,45	= \$B\$1*\$B\$4*A8/\$B\$5		
9	30	513,70			
10	31	530,82			

Slika 43: Izračun obresti na kredit v navadnem letu glede na dolžino meseca



Podjetje je 31. januarja najelo kratkoročni kredit v višini 120.000,00 €, ki ga mora vrniti v dvanajstih enakih obrokih, ki zapadejo zadnji dan meseca. Prvi obrok se plača en mesec po najetju kredita (28. februarja). Letna nominalna obrestna mera za posojilo je 7 %. Obresti mora podjetje plačati vsak mesec. Koliko znašajo mesečne obresti po prvi plačani razdolžnini in koliko po dveh plačanih razdolžninah?



Med letom se glavnica vrača v enakih delih, torej so vse razdolžnine med letom enake in znašajo 10.000 €.

Mesečne obresti se obračunajo od stanja dolga. Stanje dolga pa se vsak mesec zniža za

10.000 €. Konec februarja plačamo prvo razdolžnino in znesek znižamo za 10.000 € na 110.000 €. Ker pa smo ves februar dolgovali 120.000 €, moramo obresti obračunati od tega zneska. V marcu pa obračunamo obresti od 110.000 €, kolikor je znašal naš dolg v marcu.

Prikaz rešitve je na sliki (Slika 44).

	A	B	C	D	E	F
1		Glavnica	120.000			
2		Letna NOM	7,00%			
3		Mesečna razdolžnina	10.000			
4		Dolžina leta	365			
5						=B7*\$C\$2*D7/\$C\$4
6	Zaporedna številka	Stanje dolga (od katerega se plačajo obresti)	Mesec	Število dni v mesecu	Obresti	
7	1	120.000	februar	28	644,38	
8	2	110.000	marec	31	653,97	

Slika 44: Obračun obresti obročnega kredita

4.4 KAJ ŠE MORAMO VEDETI O KREDITIH?

Vsaka kreditna pogodba ima opredeljeno vrsto obrestne mere.

4.4.1 Enovita in sestavljena obrestna mera

Enovita obrestna mera je z eno številko zapisana nominalna obrestna mera (ZBS, 2008). Uporablja se za krajše kreditne posle, pri čemer izraz »krajše« ni enolično opredeljen. Banke imajo namreč glede tega različno prakso. Zato si pred sklepanjem pogodb oglejte pogoje in vrsto obrestne mere, kar je za posamezno banko objavljeno na njeni spletni strani.

Do zdaj smo obravnavali primere z enovito obrestno mero.

Za daljše kreditne posle pa si banke ne upajo sklepati pogodb z enovito obrestno mero, saj težko predvidevajo, kakšne bodo v prihodnosti tržne obrestne mere in letna inflacija. Uporablja se **sestavljena (skupna)** nominalna obrestna mera, ki je vsota referenčne obrestne mere in obrestnega pribitka (ZBS, 2008).

Primer sestavljene obrestne mere: EURIBOR + 3 %

Sestavljena obrestna mera je **spremenljiva** obrestna mera. Sestavljena je iz splošno priznane referenčne obrestne mere (npr. EURIBOR⁶, LIBOR) in pribitka, ki bo odvisen od vrste (tveganosti) posla. Referenčne obrestne mere so najpogosteje medbančne obrestne mere, kjer banka razen imena navede tudi tip (na primer 1-, 3-, 6- ali 12-mesečni EURIBOR ali LIBOR) in na katero denarno enoto, ročnost oziroma drug dejavnik, ki vpliva na njeno višino, se veže. Ugotavljanje in prilagoditev vrednosti referenčne obrestne mere (dan in tip) morata biti vnaprej jasno določena (ZBS, 2008).

Čeprav se vrednosti EURIBOR-ja in LIBOR-ja mesečno spreminjajo, se anuitete kreditov s spremenljivo obrestno mero ne spreminjajo tako pogosto. V pogodbo se običajno določita en ali dva datuma na leto, na katera se odčita nov podatek in ta vrednost potem velja 12 oziroma 6 mesecev (ZBS, 2008). Vseeno pa moramo biti pri poslih, vezanih na referenčne obrestne mere, pripravljeni na spremenljivost "končne" obrestne mere in s tem tudi na nihanja našega bremena (pri posojilih) ali donosnosti (pri naložbah). To je še posebej očitno v obdobjih

⁶ Euro Interbank Offered Rate (medbančna referenčna OM za banke znotraj monetarne unije)

večjih finančnih kriz. Uporaba spremenljive obrestne mere namreč pomeni, da se bo naše "kreditno breme" spreminjalo v odvisnosti od nihanj na finančnih trgih (ZBS, 2008).

Kako računamo, če imamo spremenljivo obrestno mero? Preprosto. Referenčno obrestno mero in pribitek seštejemo. Dobimo skupno obrestno mero, ki jo uporabimo v izračunih.

Primer in rešitev:

Če je podani EURIBOR 2,3 % in pribitek 2,7 %, je skupna obrestna mera 5 %. V izračunih nato uporabimo izračunano obrestno mero – se pravi 5 %.



V banki najamemo posojilo 30.000 € za dobo 15 let. Vrnemo ga z mesečnimi anuitetami, ki zapadejo ob koncu meseca. Banka obračuna obresti z letno nominalno obrestno mero EURIBOR + 2,16 %. Kolikšna je anuiteta, če je EURIBOR 2,31 %?



EURIBOR in realno obrestno mero seštejemo. Postopek reševanja je viden na primeru (Slika 45).

	A	B	C	D	E	F
1	Glavnica	30.000				
2	Doba	180				
3	Tip	0				
4	EURIBOR	2,31%				
5	Pribitek	2,16%				
6	Skupna letna OM	4,47%				
7	Skupna mesečna OM	0,37%				
8	Anuiteta	-229,04 €				
9						
10						

pri izračunu anuitete smo uporabili funkcijo PMT; parameter Rate je mesečna skupna OM

Slika 45: Izračun anuitete z uporabo sestavljene obrestne mere

4.4.2 Interkalarni obresti

Veliko posojilojemalcev je neprijetno presenečenih, ko slišijo, da morajo plačati interkalarni obresti, saj so običajno precej visoke. Razložili jih bomo na primeru.



V banki najamemo kredit. Banka nam glavnico nakaže 12. marca. Prva anuiteta zapade v plačilo konec aprila. Od tedaj dalje anuitete plačujemo vsak mesec, najkasneje do konca meseca. S prvo anuiteto, ki zapade konec aprila, plačamo obresti za april. Obresti od 12. marca do 31. marca niso zajete v nobeni od anuitet. Zato moramo posebej plačati obresti za marec. Tem obrestim rečemo interkalarni obresti.

4.4.3 Amortizacijski načrti

Potrošniki med trajanjem kredita običajno ne vemo, koliko še dolgujemo. Občutek nas lahko zelo prevara, saj (kot smo že ugotovili) na polovici odplačevanja ne poplačamo polovice kredita. Preglednica, ki nam pomaga spremljati kredit in stanje dolga, je amortizacijski načrt.

Amortizacijski načrt je načrt odplačevanja posojila. Pripravljen je v obliki preglednice, ki prikazuje odplačevanje posojila skozi odplačilno dobo, po plačilnih obdobjih. Za vsako plačilno obdobje so izračunane obresti, razdolžnina ter stanje dolga.

Amortizacijski načrti se izdelujejo za vse vrste kreditov. Razen tega se amortizacijski načrti izdelujejo še za leasinge in rente.

V nadaljevanju bomo sestavili amortizacijske načrte za anuitetne in obročne kredite. Postopek izdelave si bomo ogledali na primerih.



Jaka je najel kredit v višini 5.000,00 €. Vrnil ga bo v 6 mesečnih anuitetah, ki zapadejo ob koncu meseca. Dogovorjena nominalna letna obrestna mera je 7%. Izdelajmo amortizacijski načrt.



Rešitev in postopek izdelave amortizacijskega načrta je na sliki (Slika 46).

	A	B	C	D	E	F
1	Glavnica	5.000,00		Letna OM	7%	
2	Št. anuitet	6		Mesečna OM	0,5833%	
3				=PPMT(\$E\$2;A11;\$B\$2;\$B\$1)		
4	Zap. št.	Razdolžnina	Obresti	Anuiteta	Stanje dolga	=E5+B6
5	0				5.000,00	
6	1	-821,26	-29,17	-850,43	4.178,74	
7	2	-826,05	-24,38	-850,43	3.352,68	
8	3	-830,87	-19,56	-850,43	2.521,81	
9	4	-835,72	-14,71	-850,43	1.686,09	
10	5	-840,59	-9,84	-850,43	845,50	
11	6	-845,50	-4,93	-850,43	0,00	
12						
13				=-E10*\$E\$2		

Slika 46: Amortizacijski načrt anuitetnega kredita

V glavo preglednice vpišemo podatke, ki se ne spreminjajo. Ti podatki so lahko glede na vrsto kredita različni. V našem primeru so podatki, ki se ne spreminjajo: izposojeni znesek (začetna vrednost kredita), nominalna letna in nominalna mesečna obrestna mera, anuiteta, število anuitet.

Nominalno mesečno obrestno mero izračunamo po proporcionalni metodi tako, da letno obrestno mero delimo z 12.

Nato napišemo opise stolpcev in vrstic tabele, ki prikazuje amortizacijski načrt. Za vsako zaporedno anuiteto nas zanima razdolžnina (plačana glavnica), obresti, višina anuitete in stanje dolga. Čeprav se anuiteta ne spreminja, jo običajno vpišemo v amortizacijski načrt.

Pod zaporedno številko 0 vpišemo še začetno stanje dolga.

Razdolžnino za posamezno anuiteto izračunamo s pomočjo funkcije PPMT. Funkcijo sestavimo z uporabo sklicev in absolutnih sklicev, tako da jo lahko kopiramo po stolpcu navzdol.

Obresti, ki jih plačamo v določeni anuiteti, so obresti na preostali dolg. Uporabimo formulo, ki je v tabeli (Slika 46), ali funkcijo IPMT kot smo se učili v poglavju Anuitetni krediti.

Stanje dolga je razlika med stanjem dolga v preteklem obdobju in plačano razdolžnino. Plačane obresti ne zmanjšujejo dolga!

Anuiteta je seštevek razdolžnine in obresti. Enak rezultat dobimo, če za izračun anuitete uporabimo funkcijo PMT.

Iz amortizacijskega načrta razberemo, da se obresti v anuitetah znižujejo, razdolžnina pa povečuje. Anuiteta je ves čas enaka in se ne spreminja.

V amortizacijskem načrtu mora biti stanje dolga po zadnjem plačilu anuitete enako 0. Če ni, smo zanesljivo naredili napako v izračunu.

Poglejmo še primer obročnega kredita, kjer so razdolžnine enake in se plačujejo periodično. Pri obračunu obresti upoštevamo dolžino leta in posameznih mesecev. Takšna je tudi bančna praksa.



Podjetje je v navadnem letu (dolžina 365 dni) najelo kredit v višini 15.000,00 €. **Glavnico** mora vrniti v 6 enakih mesečnih obrokih, ki zapadejo v plačilo od konca januarja do konca junija. Razdolžnina in obresti se plačujejo ob koncu meseca. Dogovorjena skupna nominalna letna obrestna mera je 7,5 %. Izdelajmo amortizacijski načrt.



Rešitev je na sliki (Slika 47).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Glavnica	15.000,00		Letna NOM	7,50%				
2	Št. obrokov	6							
3									
4	Zap. št.	za mesec	št. dni	Razdolžnina	Obresti	Mesečna obveznost	Stanje dolga		
5	0						15.000,00		
6	1	januar	31	-2.500,00	-95,55	-2.595,55	12.500,00		
7	2	februar	28	-2.500,00	-71,92	-2.571,92	10.000,00		
8	3	marec	31	-2.500,00	-63,70	-2.563,70	7.500,00		
9	4	april	30	-2.500,00	-46,23	-2.546,23	5.000,00		
10	5	maj	31	-2.500,00	-31,85	-2.531,85	2.500,00		
11	6	junij	30	-2.500,00	-15,41	-2.515,41	0,00		

Slika 47: Amortizacijski načrt obročnega kredita

Nad tabelo vpišemo naslednje podatke, ki se ne spreminjajo: začetna glavnica, število obrokov, letna obrestna mera.

V tabeli označimo naslednje stolpce: zaporedna številka plačila, za mesec, število dni v mesecu, razdolžnina, obresti, mesečna obveznost in stanje dolga.

Pod zaporedno številko 0 vpišemo znesek kredita.

Razdolžnina se v času trajanja kredita ne spreminja in znaša, ker so obroki enaki, šestino začetne glavnice kredita. Opremimo jo s predznakom minus, ker delamo amortizacijski načrt s stališča podjetja, ki je prejelo kredit, mesečno pa banki obveznosti plačuje.

Obresti, ki se plačajo z določenim obrokom, so obresti na preostali dolg. Izračunamo jih od trenutnega stanja dolga.

Mesečno plačilo banki je vsota razdolžnine in obresti.

Stanje dolga na določenem koraku je razlika med prejšnjim stanjem dolga in plačano razdolžnino. Znak plus v formuli pa je uporabljen zaradi različnih predznakov trenutnega stanja dolga in razdolžnine.

V amortizacijskem načrtu mora biti stanje dolga po zadnjem plačilu razdolžnine enako 0. Če ni, smo zanesljivo naredili napako v izračunu.

4.5 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

38. Jan potrebuje gotovinski kredit. Banka bi mu ga odobrila za 24 mesecev z letno 7 % nominalno obrestno mero. Glede na višino plače lahko najame posojilo z višino mesečne anuitete največ 641,20 €. Kolikšen kredit lahko dobi, če bo anuitete plačeval ob koncu meseca?

Rešitev: 14.321,27 €

39. Luka je najel kredit v višini 7.230,00 € pod naslednjimi pogoji. Letna nominalna obrestna mera je 8,50 %. Kredit bo vrnil v 12 mesečnih anuitetah, ki jih bo plačal ob koncu meseca. Kolikšna je višina anuitete?

Rešitev: 630,60 €

40. Najeli ste 12.000,00 € posojila, ki ga boste odplačevali naslednji dve leti z anuitetami, ki zapadejo v plačilo konec meseca. Letna nominalna obrestna mera je 11 %. Koliko glavnice boste odplačali v prvem, desetem in zadnjem mesecu odplačevanja posojila?

Rešitev: 449,29 €, 487,75 €, 554,21 €

41. Najeli ste 12.000,00 € posojila, ki ga boste odplačevali naslednji dve leti konec vsakega meseca. Letna nominalna obrestna mera je 11 %. Zanima vas, koliko obresti boste odplačali v prvem, desetem in zadnjem mesecu odplačevanja posojila?

Rešitev: 110,00 €, 71,54 €, 5,08 €

42. Najeli ste obročni kredit v znesku 60.000,00 €, ki ga boste odplačevali mesečno, naslednji dve leti, z enakimi razdolžninami. Koliko znaša razdolžnina v posameznem mesecu?

Rešitev: 2.500,00 €

43. Podjetje je najelo kratkoročni kredit v višini 200.000,00 €, ki ga mora vrniti v enkratnem znesku po enem letu. Letna nominalna obrestna mera za posojilo je 6,45 %. Obresti mora plačati vsak mesec. Koliko znašajo mesečne obresti v mesecu, ki ima 31 dni in je leto navadno?

Rešitev: 1.095,62 €

44. Za nakup stanovanja potrebujete 95.000,00 €. Banka vam je pripravljena dati stanovanjski kredit pod naslednjimi pogoji: za 15 let, s skupno letno nominalno obrestno mero 11 %. Anuitete boste plačevali mesečno ob koncu meseca. Najvišja možna mesečna anuiteta je 992,00 €. Dobite dovolj denarja?

Rešitev: Ne. Na banki dobite največ 87.278,08 €. Ostalo morate zbrati na drug način.

45. Posojilo v višini 10.000,00 € z 11 % letno nominalno obrestno mero morate odplačati v naslednjih 18 mesecih. Kolikšna je mesečna anuiteta, če plačila zapadejo na začetku ali na koncu obdobja?

Rešitev: 605,24 € (plačilo na začetku), 605,19 € (plačilo na koncu obdobja).

46. Znanu ste posodili 5.000 €. Dogovorila sta se, da vam posojilo vrne z enakimi mesečnimi anuitetami, v naslednjih 9 mesecih z 12 % nominalno obrestno mero. Kolikšen je mesečni znesek, ki vam ga mora znanec izplačati ob koncu vsakega meseca?

Rešitev: 583,70 €.

47. Odplačujete petletno posojilo v višini 20.000,00 €. Anuiteta v višini 444,89 € zapade ob koncu vsakega meseca. Kolikšna je letna obrestna mera, ki jo plačujete za dano posojilo?

Rešitev: 12 % letna nominalna.

48. Podjetje je najelo investicijski kredit v višini 180.000,00 €. Vrnilo ga bo v 12 mesečnih anuitetah, ki se plačujejo ob koncu meseca. Dogovorjena nominalna letna obrestna mera je 10,3 %. Izdelajte amortizacijski načrt.

49. Podjetje je najelo kredit v višini 72.000,00 €. Glavnico bo vrnilo v 24 enakih mesečnih obrokih. Razdolžnina in obresti se plačujejo ob koncu meseca. Dogovorjena skupna letna

nominalna obrestna mera je 12,25 %. Obresti izračunajte po poenostavljeni metodi (dolžina vsakega meseca 30 dni, dolžina leta 360 dni). Izdelajte amortizacijski načrt.

50. Podjetje je najelo kredit v višini 180.000,00 € pod naslednjimi pogoji. Moratorij na plačilo glavnice traja pol leta (to pomeni, da v tem času podjetje plačuje le obresti). Glavnico je treba vrniti v 12 enakih mesečnih obrokih po koncu moratorija. Obroki se plačujejo ob koncu meseca. Dogovorjena skupna letna nominalna obrestna mera je 10,85 %. V času moratorija in v času vračanja glavnice se vsak mesec plačajo obresti. Obresti izračunajte po poenostavljeni metodi (dolžina vsakega meseca 30 dni, dolžina leta 360 dni). Izdelajte amortizacijski načrt.

5 STATISTIČNO RAZISKOVANJE, UREJANJE IN PRIKAZOVANJE PODATKOV

Najprej bomo spoznali, kaj je statistika in osnovne statistične pojme, nato se bomo posvetili statističnemu raziskovanju, urejanju in prikazovanju podatkov. V naslednjih poglavjih pa bomo usvojili različne načine analize podatkov.

5.1 TEMELJNI STATISTIČNI POJMI



Statistika je beseda, ki jo v vsakdanjem življenju velikokrat srečamo. Ko brskamo po internetu, beremo časopise in revije, gledamo televizijo ali poslušamo radio, nam pogosto postrežejo z najrazličnejšimi podatki in njihovimi obdelavami. Na primer o:

- uspešnosti podjetij v določenem časovnem obdobju,
- številu vpisanih študentov na višje strokovne šole v nekem študijskem letu,
- priljubljenosti politikov in političnih strank,
- gospodarski rasti, plačah, inflaciji, uvozu, izvozu, ipd.

Bistvo statistike je proučevanje množičnih pojavov, njihova interpretacija in obdelava. Statistika je osnova za planiranje. Planirajo države, podjetja in druge organizacije, pa tudi posamezniki. S spremljanjem realizacije statistika pokaže, ali se načrti uresničujejo in odkriva morebitne pomanjkljivosti.



Vsako podjetje ima na primer načrt prodaje za prihodnje časovno obdobje. Naredi ga na podlagi prodaje v predhodnih časovnih obdobjih in ob določenih predpostavkah, ki temeljijo na drugih statističnih podatkih podjetja (npr. o proizvodnji, marketingu ...), podatkih o kupcih, tržišču, ipd. Ko podjetje spremlja dejansko prodajo, primerja plan in realizacijo ter glede na situacijo pravočasno ustrezno reagira (npr. poveča reklamo, spremeni marketinške aktivnosti, uvede kadrovske spremembe). Statistika pomaga pri odločitvah.

Statistika je veda, ki s posebnimi metodami raziskuje množične pojave, zbira podatke, jih analizira in rezultate prikaže na različne načine.

Statistične podatke na ravni države zbira, ureja, analizira in hrani Statistični urad Republike Slovenije (SURS). Sistematično urejene podatke vsako leto objavi v publikaciji z naslovom Statistični letopis Republike Slovenije. Podatke, ki jih SURS zbira in analize, ki jih na njihovi osnovi pripravi, najdemo na spletni strani <http://www.stat.si/>.

Na nivoju Evropske unije zbira in sistematično ureja statistične podatke Eurostat. Dostopni so na spletni strani <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/eurostat/home/>.

Hkrati pa vodijo in ažurirajo zbirke podatkov tudi po občinah, upravnih enotah, podjetjih, šolah, zavodih, itn.

V statistiki uporabljamo nekatere izraze, ki jih bomo natančneje opredelili: statistična populacija, enota, spremenljivka in parameter.

5.1.1 Statistična populacija

Statistična populacija (ali krajše populacija) je skupina enot, katerih lastnosti proučujemo. Npr. šolarji, prebivalci, prometne nesreče, podjetja, turisti itd. Populacijo je potrebno še natančneje opredeliti. V navedenih primerih namreč ni dovolj jasno:

- katere šolarje imamo v mislih (npr. osnovnošolce ali srednješolce, iz katere šole, v katerem časovnem obdobju),
- prebivalce katere države ali regije, v katerem času in obsegu (npr. vse ali le stare nad 15 let),
- kakšne vrste prometnih nesreč (npr. s smrtnim izidom ali z materialno škodo), na katerem področju (npr. Štajerska, RS) in v katerem obdobju.

Populacijo opredelimo po treh vidikih (kriterijih):

- stvarnem ali vsebinskem – koga ali kaj preučujemo,
- časovnem – kdaj,
- krajevnem – kje.

Časovni vidik

Populacijo časovno opredelimo z določitvijo trenutka (rečemo mu kritični trenutek) ali časovnega intervala opazovanja.



Primeri določitve trenutka:

- prebivalci ob popisu leta 2002 – za kritični trenutek je bil izbran datum *31. 3. 2002 ob 24.00⁷*,
- podjetja, ki so *1. 1. 2011* imela več kot 50 zaposlenih.



Primeri določitve časovnega intervala:

- prometne nesreče *v letu 2010*,
- ustanovitev podjetij *po letu 1991*,
- prihodi turistov *v avgustu 2010*.

Krajevni vidik

Krajevno opredelimo populacijo tako, da natančno določimo prostor opazovanja.



Primeri določitve kraja:

- osnovnošolci mesta *Maribor*,
- prebivalci *Slovenije*,
- prometne nesreče na avtocestah v *Republiki Sloveniji*,
- podjetja v *slovenskih mestih* z več kot 20.000 prebivalci,
- turisti v *zdraviliščih*.

Vsebinski vidik

Vsebinska opredelitev populacije je najbolj zahtevna. Z njo definiramo skupno lastnost, ki jo mora imeti enota, da bo zajeta v populacijo.



Primeri določitve vsebinskega vidika:

⁷ Popis se je izvajal več tednov, podatki pa so se beležili za stanje 31. marca 2002 ob 24.00

- učenci *osnovne šole Vič* iz Ljubljane,
- prometne nesreče *s smrtnim izidom*,
- komitenti *SKB banke*,
- slovenska podjetja *z več kot 5 zaposlenimi*,
- turisti, ki so leta 2011 *prvič obiskali Bled*.

Vsaka populacija mora biti natančno opredeljena po vseh treh vidikih. Če proučujemo rezultate neke statistične analize, mora biti navedeno, na katero populacijo in ob upoštevanju katerih vidikov se nanaša.

5.1.2 Statistična enota

Statistična enota je najmanjši sestavni element statistične populacije.



V primerih iz prejšnjega razdelka je to en osnovnošolec, en prebivalec Slovenije, ena prometna nesreča, eno podjetje in en turist.

Statistična enota (krajše enota) je element, ki ga opazujemo oz. od katerega ali o katerem pridobivamo podatke. Včasih ne moremo neposredno pridobiti podatkov od statistične enote, ampak jih pridobimo posredno, od drugega vira. Npr., če so statistična populacija osebni avtomobili, podatke pridobivamo od lastnika posameznega avtomobila, od organa, ki ga je registriral ali kako drugače.

5.1.3 Statistična spremenljivka

Predmet statističnega raziskovanja so **značilnosti** statističnih enot. Zanimajo nas tiste značilnosti, ki enotam niso skupne.



Primeri:

- pri opazovanju osnovnošolcev lahko opazujemo starost, spol, učni uspeh ...
- pri prebivalcih lahko opazujemo stopnjo izobrazbe, poklic, zaposlenost, plače ...
- pri prometnih nesrečah nas zanima vzrok nesreče, spol povzročitelja, višina škode ...
- pri podjetjih so statistične spremenljivke različni podatki iz bilanc, število redno zaposlenih, leto ustanovitve ...
- pri turistih so možne spremenljivke državljanstvo, starost, število nočitev ...

Statistična spremenljivka je lastnost enot, ki jih v danem primeru proučujemo. Pravimo ji tudi proučevana spremenljivka. Pri vsaki enoti ima neko vrednost, ki jo lahko izrazimo na dva načina:

- opisno – takim spremenljivkam rečemo opisne,
- številčno – takim spremenljivkam rečemo številske.



Primeri opisnih vrednosti spremenljivke:

- spol je lahko moški ali ženski,
- učni uspeh je lahko odličen, prav dober, dober, zadosten ali nezadosten,
- izobrazba je lahko osnovna, srednja, višja, itd.,
- vzrok prometne nesreče je neprilagojena hitrost, alkoholiziranost ...



Primeri številskih vrednosti spremenljivke:

- starost učenca,
- kvadratura stanovanja,
- višina plače,
- višina materialne škode pri prometni nesreči,
- število zaposlenih v podjetju.

Številske spremenljivke so lahko zvezne (poljubna realna števila) ali diskretne (cela števila).



Primeri diskretnih spremenljivk:

- število smrtnih žrtev v prometni nesreči (npr. 3),
- velikost družine, ki jo merimo s številom članov (npr. 4).



Kvadratura stanovanja je lahko decimalno število, se pravi zvezna spremenljivka. Stanovanje je npr. veliko $78,44 \text{ m}^2$.

5.1.4 Parametri

Parametri so lastnosti populacije. Pri statistični analizi dobimo vrednosti parametrov, s katerimi merimo lastnosti proučevanega pojava. Nekatere parametre dobimo preprosto s štetjem in razporejanjem enot v skupine glede na vrednost spremenljivke, druge parametre pa je potrebno izračunati.



Primeri parametrov:

- število učencev v posameznih razredih,
- povprečna velikost družine, merjena s številom družinskih članov,
- povprečna starost povzročiteljev prometnih nesreč,
- pri raziskavi prometnih nesreč smo npr. ugotovili, da je bila v 77 % nesreč vzrok prehitra vožnja in da se je 54 % nesreč pripetilo ponoči,
- promet podjetja v posameznem mesecu,
- število nočitev tujih gostov v RS v avgustu 2011.

Najpogostejši parametri so v praksi vsota, srednje vrednosti (npr. povprečje) in deleži. Več o izračunih se bomo naučili v nadaljevanju.



Površen bralec lahko zameša spremenljivko in parameter. Spremenljivka je lastnost enote. Parameter je lastnost populacije.



V populaciji *prometne nesreče s smrtnim izidom, RS, avgust 2011*, je spremenljivka število smrtnih žrtev. Podatek pridobimo za vsako prometno nesrečo iz opisane populacije (torej za vsako enoto). Parameter pa je npr. število smrtnih žrtev vseh prometnih nesreč, ki so se pripetile v RS, avgusta leta 2011. Parameter je v prvem primeru vsota vrednosti, ki smo jih pridobili za posamezno enoto iz populacije. Izračunali bi lahko še en parameter, npr. povprečno število smrtnih žrtev na prometno nesrečo iz izbrane populacije.

5.2 STATISTIČNO RAZISKOVANJE

Statistično raziskovanje je postopek, s katerim načrtno zberemo podatke in iz njih izluščimo njihove lastnosti. Sestavljeno je iz naslednjih korakov, ki si sledijo in morajo biti medsebojno usklajeni:

- načrtovanje statističnega raziskovanja,
- zbiranje podatkov (statistično opazovanje),
- urejanje in obdelava podatkov,
- analiza rezultatov.

5.2.1 Načrtovanje statističnega raziskovanja

Statistično načrtovanje je predvidevanje poteka celotnega raziskovanja od opazovanja pojava (zbiranja podatkov) do njegove analize.



Podjetje Telefonček se je odločilo narediti tržno raziskavo, s katero naj bi ugotovili, kakšen mobilni telefon potrebujejo upokoenci. Izdelali so anketo in najeli popisovalce (anketarje), ki so zbirali podatke. Pozabili pa so jim povedati, da je anketa namenjena starejšim prebivalcem. Je bila raziskava dobro načrtovana? Verjetno ne, saj bi dobro načrtovanje to napako preprečilo.

Zbiranje podatkov je lahko drago in časovno zahtevno. Pogosto je treba anketirati ljudi. Vse to pa so razlogi, ki zahtevajo, da moramo vse faze statističnega raziskovanja dobro premisliti in napraviti načrt pred izvedbo zbiranja podatkov. V nasprotnem primeru raziskovanje ne bo dalo objektivnih odgovorov na zastavljena vprašanja.

Preden se odločimo za statistično raziskovanje, postavimo vprašanja o lastnostih populacije, ki bi jih radi raziskali. Npr., kolikšen delež zaposlenih prebivalcev uporablja internet, kolikšna je povprečna višina petošolca ali petošolke ... Na podlagi tega določimo populacijo (z vsebinskim, krajevnim in časovnim vidikom) in spremenljivke. Odločiti se moramo še za način zbiranja podatkov (npr. z anketiranjem), opredeliti kdo in kako jih bo zbiral, kdo in kako jih bo obdelal, kako jih bomo prikazali ipd.

Vprašanja, ki jih moramo zadostiti pri statističnem načrtovanju, so:

- vsebinska, krajevna in časovna opredelitev populacije in določitev proučevanih spremenljivk,
- organizacijsko–tehnična vprašanja (kako bo opazovanje izvedeno, kako bo potekala obdelava podatkov in kako bodo zbrani podatki prikazani),
- analitična vprašanja (določimo parametre),
- finančna vprašanja (kako bomo pokrili stroške).

Če se želimo izogniti kasnejšim težavam z izvedljivostjo postopkov in doseganjem ciljev, se moramo na statistično raziskovanje dobro pripraviti.

5.2.2 Zbiranje podatkov ali statistično opazovanje

Statistično opazovanje je zbiranje podatkov o enotah populacije. Rezultat opazovanja je množica podatkov, ki so osnova za analize. Zato morajo biti podatki vedno:

- **popolni** – zajemati morajo vse enote, ki smo jih predvideli in
- **točni** – ustrezati morajo dejanskemu stanju o enotah populacije pri vseh opazovanih spremenljivkah.

Da bi to dosegli, moramo v fazi načrtovanja pripraviti točna in razumljiva navodila za delo tistih, ki opazovanje izvajajo.



Populacije so lahko zelo velike. Prebivalcev Slovenije je npr. več kot 2 milijona, podjetij je preko 150.000. Podjetja ali pa npr. študenti, ki delajo raziskavo za diplomsko nalogo, nimajo časa in/ali denarja za obdelavo tako velikih populacij. Glede na to, ali zajamemo v opazovanje celotno populacijo ali le en del, ločimo popolno in delno opazovanje.

Glede na obseg delimo statistična opazovanja na:

- **popolno** opazovanje, ki zajame vse enote populacije (npr. popisi, registri) in
- **delno** opazovanje, ki zajame le neko podmnožico enot populacije (tržne raziskave, ugotavljanje javnega mnenja itd.).

Popolno opazovanje

Popolno opazovanje izvajamo, če je potrebno zajeti vse enote populacije.



Primeri: rojstna matična knjiga, register prebivalcev, register motornih vozil itd. V matične knjige in registre vpisujemo podatke sproti, ob nastanku ali spremembi dogodka. Takoj po prijavi spremembe naslova stalnega prebivališča uradna oseba podatek spremeni v registru prebivalstva. V teh primerih gre za administrativno zbiranje podatkov.

Oblika popolnega statističnega opazovanja je popis. V Sloveniji sta najbolj znana popis prebivalcev in popis nepremičnin. Izvajali so se tudi drugi popisi, npr. popis vinogradov.



Popis prebivalcev leta 2002 se je izvajal več tednov, zato so izbrali dan in uro, 31. 3. 2002, ko so še upoštevali uradno število popisanih. Otroci, ki so se rodili pred obiskom popisovalca, a po tem datumu, v popis niso bili zajeti.

S popisom zajamemo vse enote populacije v določenem trenutku, ki mu rečemo kritični trenutek. Popis daje sliko o populaciji v kritičnem trenutku.

Popis je zelo draga metoda zbiranja podatkov, zato se ga poslužujemo praviloma le takrat, ko res potrebujemo natančne podatke o vseh enotah. Tak primer je popis nepremičnin, saj služi kot podlaga za njihovo obdavčitev.

Delno ali vzorčno opazovanje

Kadar ne potrebujemo podatkov o vseh enotah populacije, kadar je opazovanje vseh enot nemogoče, prezamudno ali predrago, se odločimo za delno opazovanje. Nato skušamo oceniti značilnosti nekega pojava na podlagi podatkov, ki smo jih zbrali od manjšega števila enot.

Del populacije, ki jo izberemo za proučevanje, se imenuje vzorec, metoda izbiranja pa vzorčenje. Vzorčenje je pomembna in zahtevna naloga. Pravilna izbira vzorca zagotavlja, da zbrane podatke lahko posplošimo na celotno populacijo.



Vzporedne volitve se izvajajo na vzorcu. Ker je vzorec strokovno izbran in reprezentativen za populacijo volivcev, so lahko v kratkem času po zaprtju volišč znani rezultati, ki ne odstopajo dosti od kasneje objavljenih uradnih rezultatov.

Če izbiramo enote za opazovanje tako, da ima vsaka enota enako možnost, da bo zajeta v opazovanje, tako izbiro imenujemo slučajno izbiro, vzorec pa slučajni vzorec. Slučajni vzorec dobimo npr. z žrebanjem enot.

V praksi ni vedno možnosti za slučajno izbiro enot. Zato med enotami izberemo tiste, za katere menimo, da so tipične za opazovan pojav. Ker ta izbira lahko temelji na subjektivni presoji, dajemo prednost slučajnim vzorcem.

Način zbiranja podatkov

Podatke lahko zbiramo na najrazličnejše načine, ki so lahko zelo enostavni ali pa bolj zapleteni. Poglejmo nekaj najpogostejših načinov zbiranja podatkov.

1. Merjenje



Primeri:

- merjenje količin padavin, temperature, vlage in drugih vremenskih spremenljivk,
- merjenje telesnih lastnosti učencev 5. razreda (višina, teža),
- merjenje časa itd.

2. Štetje



Primeri:

- štetje prometa,
- štetje kupcev.

3. Evidentiranje

Evidentiranje uporabimo za neprekinjeno spremljanje pojava, ki traja določen čas. V ta namen izdelamo posebne obrazce, v katere se vpisujejo podatki takoj, ko se nek pojav zgodi.



Primeri:

- evidenca prisotnosti na delu,
- evidenca naročnikov,
- različne matične knjige,
- različni registri itd.

4. Anketiranje

Anketiranje je pogost način pridobivanja podatkov, kjer s pomočjo pripravljenih vprašalnikov (anket) zbiramo vrednosti proučevanih spremenljivk.

Vprašalnik je obrazec, v katerega vnašamo odgovore na postavljena vprašanja, ki se nanašajo na opazovano enoto. Vprašanja so lahko zaprta (s predvidenimi odgovori, izmed katerih anketiranec izbere enega ali več) ali odprta (anketiranec vnese poljuben odgovor). Ko sestavljamo vprašalnik z zaprtimi odgovori, moramo paziti, da zajamemo vse možne odgovore. Če nismo prepričani v popolnost, dodamo še izbiro – drugo. Vprašanje o spolu ima lahko le dve možnosti. Če pa npr. sprašujemo o

verski pripadnosti in ponudimo kot odgovor najpogostejše veroizpovedi, je smiselno dodati še odgovor drugo, saj vseh možnosti pač ne moremo predvideti.

V zvezi z vprašalniki je koristnih še nekaj nasvetov. Vprašalnik mora biti enostaven, pregleden, nedvoumen in razumljiv. Vprašanja ne smejo biti prezahtevna in naj se raje ne nanašajo na probleme, o katerih posamezniki ne bi želeli govoriti. Število vprašanj naj ne bo preveliko. Na vprašalniku morajo biti napisana navodila za izpolnjevanje in cilji, ki jih želimo z opazovanjem doseči. Vljudno je, če se anketirancem za sodelovanje v raziskavi zahvalimo.

Delitev opazovanja glede na čas

Opazovanje je lahko:

- **stalno** opazovanje (evidentiranje rojstev, smrti, porok ...),
- **periodično** – opazujemo v enakih časovnih razmikih (poslovne bilance, popis osnovnih sredstev ...),
- priložnostno (elementarne nesreče, tržne raziskave, raziskave javnega mnenja ...).

Kontrola statističnega opazovanja

Namen kontrole je preprečevanje napak med opazovanjem. Slučajne napake niso pomembne, ker se njihov učinek pri velikem številu enot izravna. Sistematične napake pa imajo stalno enak učinek pri vseh enotah, zato se učinek ne izravna. Če npr. tehtamo proizvode s tehtnico, ki prikazuje premajhno težo, je skupna teža manjša od dejanske.

Vrste kontrol pravilnosti odgovorov:

- računske (npr. število delavcev, razporejenih po stopnjah izobrazbe mora biti enako skupnemu številu delavcev),
- logične (npr. zdravnik s starostjo 12 let ni mogoč podatek).

5.2.3 Urejanje podatkov

Urejanje podatkov ima v statističnem raziskovanju dva pomena:

- zapis podatkov v pregledno obliko,
- iskanje napak in nelogičnosti ter posledično popravljanje podatkov.

Ko podatke o opazovani populaciji zberemo, jih je potrebno urediti in obdelati. Cilji urejanja podatkov so večja preglednost, lažja obdelava in kakovostnejša analiza.

Običajno najprej razvrstimo enote v skupine glede na vrednosti spremenljivk. Možna delitev je npr. na moške in ženske. Primere bomo spoznali v nadaljevanju.

Skupine pri številskih spremenljivk se imenujejo razredi. O skupinah in razredih bomo več povedali v poglavju *Frekvenčne porazdelitve*.

5.3 GRAFIČNO PRIKAZOVANJE STATISTIČNIH PODATKOV

Zaradi večje preglednosti podatke prikazujemo grafično. To storimo z različnimi grafikoni in s tabelami.

5.3.1 Tabele (preglednice)

Tabela ali preglednica je sistem stolpcev in vrstic, s katerimi prostor razdelimo na polja, v katera vpišemo podatke.

Primer prazne tabele je list programa Excel. V nadaljevanju si oglejmo primere tabel. Pozorni bodimo na oznake.



Primeri:

Tabela 2: Število podjetij in zaposlenih glede na velikost podjetja

Podatki za leto 2008, RS		
VELIKOST PODJETJA	ŠTEVILO PODJETIJ	ŠTEVILO ZAPOSLENIH
mikro (0–9 zaposlenih)	142.283	217.874
majhno (10–49 zaposlenih)	7.661	154.166
srednje (50–249 zaposlenih)	2.212	216.745
veliko (več kot 250zaposlenih)	385	292.813
Skupaj	152.541	881.598

Vir: Statistični letopis, 2010

Tabela 3: Prebivalstvo Slovenije na dan 1. 10. 2010

PREBIVALSTVO RS	ŠTEVILO
Moški	1.013.976
Ženske	1.034.975
Skupaj	2.048.951

Vir: <http://www.stat.si/> (1. 2. 2011)

Vrstice in stolpci tabele s podatki morajo imeti opisno označbo njihovega pomena. Tabela ima naslovno vrstico in/ali naslovni stolpec. V celice tabele vnašamo vrednosti spremenljivk. Seštevke vrstic in stolpcev prikazujemo v zbirnih vrsticah in/ali stolpcih.

Tabela mora imeti naslov, iz katerega je razvidno, katere podatke v njej prikazujemo ter vir, od koder smo podatke črpali. Točno morajo biti navedene tudi merske enote in zaokrožitev vrednosti podatkov.

5.3.2 Grafikoni

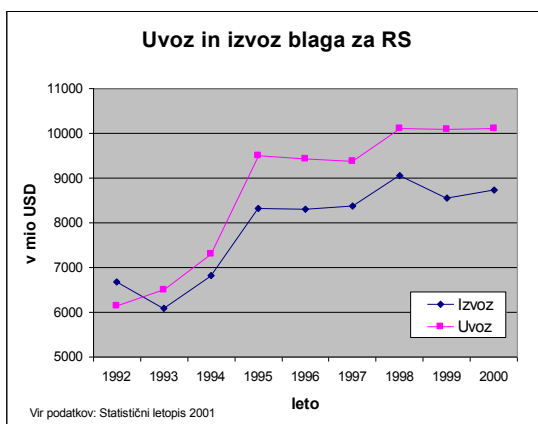
Iz tabel je velikokrat težko razbrati količinska razmerja, trende, hitrost rasti ali padanja neke količine. Zato je nastala potreba, da se rezultati statističnih obdelav prikažejo v bolj pregledni in razumljivi obliki, to je v obliki grafikonov.

Za grafični prikaz statističnih podatkov obstajajo najrazličnejši grafikoni. Najbolj pogosto in v vsakdanji praksi uporabljamo linijske (ali črtne), stolpčne (histograme) in krožne (tortne). Najhitreje jih izdelamo s pomočjo računalniškega programa MS Excel.

V današnjem času grafikonov ne rišemo več ročno, temveč v ta namen uporabimo primeren računalniške program. Pri predmetu Informatika smo se naučili izdelati različne grafikone s pomočjo Excela ali Calca.

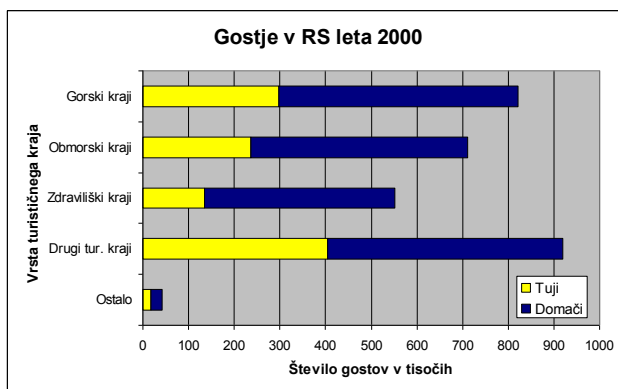
Tudi grafikoni morajo biti opremljeni tako, da je jasno razvidno, na katere podatke se nanašajo in v katerih merskih enotah so izraženi. V ta namen imajo naslov, obrazložitev simbolov, legendo, vir podatkov, ipd.

Linijski ali **črtni grafikon** prikazuje podatke v koordinatnem sistemu s točkami, ki so povezane z daljicami. Primeren je za prikaz številskih in časovnih vrst. Na abscisno os (os x) nanašamo čas, na ordinatno os (os y) pa količino ali vrednost pojava, ki ga opazujemo. Primer linijskega grafikona prikazuje Slika 48.



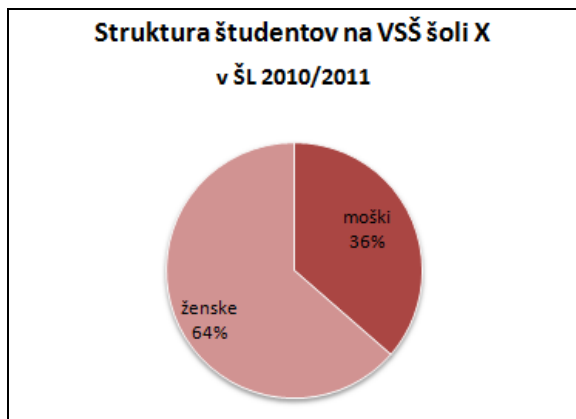
Slika 48: Primer črtnega grafikona

Stolpčne grafikone uporabljamo predvsem za opisne statistične vrste, zlasti za krajevne vrste. Stolpci so za prikazovanje časovnih vrst manj primerni.



Slika 49: Primer stolpčnega grafikona

S **krožnim** ali **tortnim grafikonom** prikažemo prispevke določenih vrednosti k skupni vrednosti. Torta je razdeljena v manjše dele (rezine). Velikost rezine predstavlja velikostni delež, ki ga posamezen del prispeva k celoti. S tortnim grafikonom lahko prikazujemo le en niz podatkov.



Slika 50: Primer krožnega grafikona

5.4 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

51. Razložite pojme: statistična populacija, enota, spremenljivka in parameter.
52. Določite statistično populacijo za tržno raziskavo o smiselnosti uvedbe službe za podporo uporabnikom v podjetju, ki se ukvarja s prodajo tečajev tujih jezikov. Opredelite vse tri vidike opredelitve populacije.
53. Za statistično populacijo, ki ste jo poiskali v prejšnji vaji, opredelite vsaj tri opisne in vsaj tri numerične spremenljivke.
54. Za statistično populacijo, ki ste jo obdelali v prejšnji vaji, opredelite vsaj dva parametra.
55. Na primeru (Tabela 4) opredelite osnovne statistične pojme: statistična populacija (z vidiki), enota, spremenljivka. Kaj so skupine, kaj so parametri?

Tabela 4: Družine po številu otrok in tipu, Slovenija, Popis 2002 (na dan 31.3.2002)

Tip družine	Družine po številu otrok						SKUPAJ
	0	1	2	3	4	5 +	
SKUPAJ	127.642	208.018	181.865	32.137	4.845	1.438	555.945
Zakonski par z ali brez otrok	114.835	117.882	144.766	26.851	4.019	1.208	409.561
Mati z otroki	-	63.052	22.894	3.167	452	118	89.683
Oče z otroki	-	10.323	3.685	502	77	22	14.609
Zunajzakonska partnerja z ali brez otrok	12.807	16.761	10.520	1.617	297	90	42.092

(Podatki so točni, vir: Statistični letopis 2002)

56. Vaše podjetje bi želelo uvažati nek nov proizvod (npr. tablični računalnik). Dobili ste nalogo raziskati trg. Predmet raziskave so potencialni kupci tega proizvoda.

Naredite načrt raziskave:

- opredelite populacijo in določite spremenljivke,
- odgovorite na organizacijsko–tehnična vprašanja (kako bo opazovanje izvedeno, kako bo potekala obdelava podatkov in kako bodo zbrani podatki prikazani),
- določite parametre,
- predvidite način prikaza rezultatov,
- opredelite potrebna finančna sredstva in kako bi pokrili stroške.

57. Sestavite kratek anketni vprašalnik za tržno raziskavo iz prejšnje vaje.
58. Podatke iz tabele (Tabela 4) na različne načine grafično predstavite. Vse grafikone ustrezno označite.

6 RELATIVNA ŠTEVILA

V določeni fazi statističnega raziskovanja rezultatov ne moremo več opisati z absolutnimi števili.



Kadar nas npr. ne zanima absolutno število vpisanih moških, temveč delež moških, od vseh vpisanih v drugi letnik programa ekonomija na neki višji strokovni šoli, število moških delimo s številom vseh študentov.

Določene zaključke naredimo na podlagi primerjanja. Posamezne podatke na primer primerjamo z istovrstnimi podatki v drugem kraju ali časovnem obdobju, deleže primerjamo s celoto ipd. Rezultate teh primerjanj imenujemo relativna števila.

Relativno število dobimo z izračunom **razmerja** med dvema podatkoma.

V nadaljevanju bomo spoznali naslednje vrste relativnih števil: struktura, koeficient, indeks in stopnja.

6.1 STRUKTURA

Struktura je razmerje med dvema istovrstnima podatkoma, pri čemer se podatek, ki ga primerjamo, nanaša na del, podatek, s katerim primerjamo, pa na celoto pojava.

Strukture uporabljamo, kadar želimo vrednosti podatkov prikazati kot delež ali odstotek glede na vse enote v populaciji.

Z Y_j označimo podatek, ki se nanaša na del pojava, z Y pa celoto pojava.

Izračunamo lahko:

- strukturni delež

$$P_j = \frac{Y_j}{Y}$$

- strukturni odstotek (procent)

$$P_j\% = 100 \frac{Y_j}{Y}$$

- strukturni odtisoček (promil)

$$P_j\%_o = 1000 \frac{Y_j}{Y}$$



V populaciji učencev 5. a razreda je 14 deklic in 11 dečkov. Če nas zanima struktura te populacije, nas pravzaprav zanima, kolikšen je delež deklic v celotnem razredu (14 od 25) in kolikšen je delež dečkov v celotnem razredu (11 od 25).



Poglejmo postopek reševanja.

Vrsta strukture	Deklice	Dečki	Skupaj
Strukturni delež	$\frac{14}{25} = 0,56$	$\frac{11}{25} = 0,44$	1
Strukturni odstotek	$\frac{14}{25} \times 100 = 56$	$\frac{11}{25} \times 100 = 44$	100
Strukturni odtisoček	$\frac{14}{25} \times 1000 = 560$	$\frac{11}{25} \times 1000 = 440$	1000

Če izračunamo odstotke in odtisočke s kalkulatorjem in ročno zapisujemo rezultate, dodamo še ustrezni znak (% oz. ‰).



Populacija naj bodo vsa slovenska podjetja leta 2008 glede na velikost, po kriteriju število zaposlenih. Podatki in izračun deležev so na naslednji sliki (Slika 51). Za izračun uporabimo Excel.



Delež izračunamo tako, da število podjetij v posamezni vrsti podjetja delimo z vsemi podjetji. Celico B3 delimo s celico B7, nato B4 z B7 itn.

	A	B	C	D	E
1	RS, leto 2008				
2	Velikost podjetja	Število podjetij	Strukturni delež podjetij	Strukturni %	
3	mikro (0-9 zaposlenih)	142.283	0,93	93,28%	
4	majhno (10-49 zaposlenih)	7.661	0,05	5,02%	
5	srednje veliko (50 do 249 zap.)	2.212	0,01	1,45%	
6	veliko (250+ zap.)	385	0,00	0,25%	
7	Skupaj	152.541	1,00	100,00%	
8	Vir: Statistični letopis 2010				

Slika 51: Izračun strukturnega deleža



V Excelu uporabimo enako formulo za računanje strukturnega deleža in strukturnega odstotka. Prikaz v celicah pa določimo z oblikovanjem. V prvem primeru celice oblikujemo kot števila, v drugem kot odstotke.

Iz tabele razberemo, da največji delež predstavljajo mikro podjetja z 0 do 9 zaposlenimi, ki jih je kar 93 %.

Opazimo, da ima strukturni delež vrednosti med 0 in 1, kjer 1 predstavlja celoto. Strukturni odstotek ima vrednosti od 0 do 100 %, kjer 100 % predstavlja celoto.



Strukture grafično predstavljamo s krožnim grafikonom.

6.2 KOEFICIENT

Statistični koeficienti je razmerje med dvema raznovrstnima podatkom, ki ju je vsebinsko smiselno primerjati.



Če npr. primerjamo bruto narodni dohodek s številom prebivalcev, sklepamo na gospodarsko razvitost države. Če primerjamo število novorojenih otrok s številom prebivalcev, dobimo nataliteto. Raven zdravstvenega varstva lahko ugotavljamo s številom zdravnikov na 1000 prebivalcev.

Primerjalna podatka morata biti časovno enako opredeljena. Pomembno je torej, da se primerjalna podatka nanašata na **isti trenutek** ali na **isti časovni interval**.

Obrazec za izračun je:

$$K = \frac{Y}{X} \quad Y, X : \text{raznovrstna podatka}$$



Po podatkih SURS se je v letu 2009 v RS rodilo 21.856 otrok, prebivalcev pa je bilo istega leta v povprečju 2.045.901. Kolikšen je koeficient živorojenih otrok na 1000 prebivalcev?



Vrednost, ki jo delimo (deljenec), je število živorojenih otrok. Delitelj je ena tisočina števila prebivalcev. Podatki in postopek je v tabeli na sliki (Slika 52).

	A	B	C	D
1	Prebivalstvo in živorojeni otroci, RS, leto 2009			
2				
3	Število živorojenih otrok	21.856		
4	Število prebivalcev	2.045.901	=B4/1000	
5	Število prebivalcev v 1000	2.045,9		
6	Koeficient živorojenih na 1000 prebivalcev	10,68	=B3/B5	
7				
8	Vir: www.stat.si (03.02.2011)			

Slika 52: Izračun koeficienta

Izračun pokaže, da se je na 1000 prebivalcev rodilo 10,7 živih otrok.



V gospodarstvu pogosto govorimo o pokritosti uvoza z izvozom. Oglejmo si primer izračuna.

V oktobru 2010 smo v RS uvozili za 1.800,7 milijonov € blaga, izvozili pa za 1.637,8 milijonov € blaga.



Koeficient pokritosti uvoza z izvozom izračunamo tako, da znesek izvoza delimo z zneskom uvoza. Podatke in postopek reševanja si oglejmo v tabeli na sliki (Slika 53).

Ker je izvoz nižji od uvoza, je izračunani koeficient manjši od 1. Če podatke prikažemo v odstotkovnem formatu, dobimo rezultat 91 %.

	A	B	C	D
1	Uvoz in izvoz, RS, oktober 2010			
2				
3	Uvoz v milijonih EUR	1.800,7		
4	Izvoz v milijonih EUR	1.637,8		
5	Koeficient pokritosti uvoza z izvozom	0,91	=B4/B3	
6				
7	Vir: www.stat.si (03.02.2011)			

Slika 53: Izračun statističnega koeficienta

6.2.1 Recipročni koeficient

Nekatere koeficiente lahko izrazimo na dva načina.

Izračunamo lahko:

- koeficient števila dijakov na srednješolskega učitelja ali koeficient števila srednješolskih učiteljev na dijaka,
- koeficient števila avtomobilov na prebivalca ali koeficient števila prebivalcev na en avto.

V takih primerih govorimo o koeficientu K in o recipročnem ali obratnem koeficientu K_r , ki ga izračunamo po naslednji formuli:

$$K_r = \frac{X}{Y} = \frac{1}{K}$$



V RS je bilo na dan 1. 1. 2011 registriranih 1.061.646 avtomobilov. Prebivalcev je bilo 2.050.189 (www.stat.si; 2011). Kolikšen je koeficient števila avtomobilov na prebivalca? Kolikšen je recipročni koeficient, se pravi koeficient števila prebivalcev na avtomobil?



Koeficient števila avtomobilov na prebivalca:

$$1.061.646 / 2.050.189 = 0,5178$$

Običajno podamo število avtomobilov na 1.000 prebivalcev. V tem primeru dobimo rezultat 517,8.

Koeficient števila prebivalcev na avtomobil je v tem primeru recipročni koeficient. Izračunamo ga tako, da deljenec in delitelj obrnemo oz., da število 1 delimo s prej izračunanim koeficientom.

$$1 / 0,5178 = 1,93$$

Recipročni koeficient pove, da je bil v RS, na dan 1. 1. 2011, en avtomobil na 1,93 prebivalca.

6.2.2 Koeficient obračanja zalog

Poglejmo najprej primer.



Predpostavimo, da je trgovsko podjetje v letu 2010 doseglo prodajo v vrednosti 600.000 €. Njegove zaloge so bile na začetku leta 2010 vredne 112.000 €, konec leta 2010 pa 88.000 €. Kolikšen je bil koeficient obračanja zalog? Koliko časa je trajal en obrat?



Koeficient obračanja zalog je razmerje med vrednostjo prodaje in vrednostjo zalog. Ker imamo podatka o zalogah na začetku in na koncu leta, izračunamo najprej povprečno zalogo in ta podatek uporabimo v izračunu koeficienta.

X je torej povprečna letna zaloga, ki jo izračunamo tako, da znani vrednosti zalog seštejemo in seštevek razpolovimo.

$$X = (112.000 + 88.000) / 2 = 100.000$$

Y je letna prodaja.

$$Y = 600.000$$

$$K = 600.000 / 100.000 = 6$$

Koeficient obračanja zalog 6 pove, da je bilo 6 obratov zalog v opazovanem letu.

Recipročni koeficient nam pove, koliko časa traja en obrat.

$$K_r = 1 / K = 1/6 \text{ leta} = 2 \text{ meseca}$$

Zaloge so se torej v povprečju obrnile šestkrat. En obrat je trajal 2 meseca.

Koeficient obračanja zalog je razmerje med vrednostjo prodaje in vrednostjo povprečne zaloge. Izračunamo ga po formuli:

$$K_{oz} = \frac{P}{Z}$$

P je oznaka za promet oz. vrednost prodaje in Z za vrednost zaloge. Vrednost prodaje se nanaša na časovni interval. Povprečno zalogo izračunamo iz podatkov, ki se nanašajo na opazovani trenutek (npr. na začetek ali konec meseca, lahko se nanaša tudi na mesečno povprečje).

Koeficient obračanja zalog pove, kolikokrat se v danem časovnem obdobju obrnejo zaloge oz., kolikokrat je prodaja večja od zaloge.



V naslednji tabeli imamo podatke o prodaji in zalogah podjetja X (Tabela 5).

Tabela 5: Podatki o prodaji in zalogah v podjetju X

Leto	Promet podjetja X v €	Povprečna mesečna zaloga	Povprečno število prodajalcev
Januar	500.000	100.000	6
Februar	700.000	200.000	7
Marec	900.000	300.000	8
Povprečje 1. kvartal	700.000	200.000	7

Izračunajmo povprečno mesečno vrednost prodaje na prodajalca v prvem kvartalu in mesečni koeficient obračanja zaloge v prvem kvartalu.



Povprečno mesečno vrednost prodaje na prodajalca izračunamo tako, da povprečno mesečno prodajo delimo s povprečnim številom prodajalcev v prvem kvartalu.

$$K_{jan-mar} = \frac{700.000}{7} = 100.000$$

Mesečni koeficient obračanja zaloge v prvem kvartalu izračunamo tako, da povprečno mesečno vrednost prodaje delimo s povprečno mesečno vrednostjo zaloge.

$$K_{oz} = \frac{700.000}{200.000} = 3,5$$

Zaloga se je v prvem kvartalu povprečno obrnila 3,5-krat.

6.3 INDEKS

Indeks je relativno število, ki prikazuje 100-kratnik razmerja med dvema istovrstnima podatkom v različnem časovnem obdobju. Število v imenovalcu imenujemo osnova.

Poznamo dve vrsti indeksov:

- indeksi s stalno osnovo in
- indeksi s spremenljivo osnovo.

6.3.1 Indeks s stalno osnovo

Imamo vrednosti $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, ki predstavljajo podatke, pridobljene v zaporednih časovnih trenutkih ali intervalih.

Osnovo označimo z Y_0 . Število, ki ga primerjamo z osnovo Y_0 , označimo z Y_j .

Indeks na stalno osnovo Y_0 označimo z $I_{j/0}$ in ga izračunamo po naslednji formuli:

$$I_{j/0} = 100 \frac{Y_j}{Y_0}$$



V izobraževalnem centru X2 izvajajo tečaje za uporabo računalnikov. Podatki o številu udeležencev v letih od 2001 do 2010 so prikazani v stolpcu B tabele na sliki (Slika 54). Kakšen je indeks v posameznem letu glede na leto 2001?



Rešitev in postopek reševanja je na sliki (Slika 54).

Ker je osnova stalna (število tečajnikov v letu 2001 – celica B2), formulo v celici C2 sestavimo tako, da je delitelj celica B2, deljenec pa fiksirana celica B2 (pravimo, da uporabimo absolutni sklic). Vrednost moramo še pomnožiti s 100. Formulo pripravimo na ta način zaradi kopiranja po stolpcu navzdol.

Indeks I, ki je večji kot 100, pomeni, da je primerjalni podatek večji od osnove. Indeks 100 pomeni, da sta primerjalna podatka enaka. Indeks I, ki je manjši od 100, pa pomeni, da je primerjalni podatek manjši od osnove.

	A	B	C	D	E
			Indeks s stalno osnovo na leto		
1	Leto	Število udeležencev	2001		
2	2001	4.158	100,00		
3	2002	4.529	108,92	=100*B2/\$B\$2	
4	2003	4.833	116,23		
5	2004	4.738	113,95		
6	2005	3.157	75,93		
7	2006	4.153	99,88		
8	2007	3.241	77,95		
9	2008	2.703	65,01		
10	2009	2.359	56,73		
11	2010	3.733	89,78		
12	Vir: B2 d.o.o.				

Slika 54: Izračun indeksa s stalno osnovo

6.3.2 Indeks s spremenljivo osnovo ali verižni indeks

Imamo vrednosti $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, ki predstavljajo podatke, pridobljene v zaporednih časovnih trenutkih ali intervalih.

Verižni indeks izračunamo po naslednji formuli:

$$I_{j/j-1} = V_j = 100 \frac{Y_j}{Y_{j-1}},$$

pri čemer je Y_j vrednost pojava v nekem časovnem trenutku, Y_{j-1} pa vrednost pojava v predhodnem časovnem trenutku oz. intervalu.



Uporabimo enake podatke kot v prejšnjem primeru (podatki o številu tečajnikov v izobraževalnem centru X2). Izračunajmo še indeks s stalno osnovo na leto 2010 in verižni indeks.



Izračuni so prikazani v tabeli na sliki (Slika 55).

Opazimo, da za izračun indeksa s stalno osnovo uporabimo absolutni sklic celice (v naslovu celice uporabimo znak \$), pri izračunu indeksa s spremenljivo osnovo oz. verižnega indeksa pa relativni sklic.

Iz primera lahko razberemo spremembe v času, na primer:

- da je bilo leta 2004 za 13,95 % več tečajnikov kot leta 2001 (celica C5 – 100),
- da je bilo leta 2006 za 11,25 % več tečajnikov kot leta 2010 (celica D7 – 100),
- da je bila največja zaporedna letna rast tečajnikov iz leta 2009 na leto 2010, in sicer za 58,25 % (celica D11 – 100).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Leto	Število udeležencev	Indeks s stalno osnovo na leto 2001	Indeks s stalno osnovo na leto 2010	Verižni indeks		
2	2001	4.158	100,00	111,38			
3	2002	4.529	108,92	121,32	108,92		
4	2003	4.833	116,23	129,47	106,71	=100*B3/B2	
5	2004	4.738	113,95	126,92	98,03		
6	2005	3.157	75,93	84,57	66,63		
7	2006	4.153	99,88	111,25	131,55		
8	2007	3.241	77,95	86,82	78,04		
9	2008	2.703	65,01	72,41	83,40		
10	2009	2.359	56,73	63,19	87,27		
11	2010	3.733	89,78	100,00	158,25		
12			=100*B2/\$B\$2	=100*B2/\$B\$11			
13							

Slika 55: Izračun verižnega indeksa

6.4 STOPNJA

Stopnja je primerjava med dvema istovrstnima podatkom, ki sta vezana na dogajanje v času.

V praksi pogosto slišimo izraza stopnja rasti in negativna stopnja rasti.

Stopnjo S_j izračunamo po naslednji formuli

$$S_j = 100 \frac{Y_j - Y_{j-1}}{Y_{j-1}}$$



Uporabimo enake podatke kot v prejšnjem primeru (podatki o številu tečajnikov v izobraževalnem centru X2) in izračunajmo še stopnjo.



Postopek reševanja in rešitev si oglejmo na sliki (Slika 56).

	A	B	C	D	E	F
1	Leto	Število udeležencev	Verižni indeks	Stopnja		
2	2001	4.158				
3	2002	4.529	108,92	8,92%		= (B3-B2)/B2
4	2003	4.833	106,71	6,71%		
5	2004	4.738	98,03	-1,97%		
6	2005	3.157	66,63	-33,37%		
7	2006	4.153	131,55	31,55%		
8	2007	3.241	78,04	-21,96%		
9	2008	2.703	83,40	-16,60%		
10	2009	2.359	87,27	-12,73%		
11	2010	3.733	158,25	58,25%		
12						
13			=100*B3/B2			

Slika 56: Izračun verižnega indeksa in stopnje

Opazimo podobnost med verižnim indeksom in stopnjo. Če od verižnega indeksa odštejemo 100 in dodamo znak za %, dobimo stopnjo.

Iz primera tudi razberemo, da so stopnje pozitivne in negativne. Pozitivna stopnja pomeni rast. V našem primeru je bila rast števila tečajnikov v letih 2002, 2003, 2006 in 2010 glede na predhodno leto. V letih 2004, 2005, 2007, 2008 in 2009 je bila zabeležena negativna rast glede na predhodno leto.

Negativna stopnja rasti pomeni upad pojava glede na primerjalni podatek.

6.5 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

59. V RS je bilo leta 2010 registriranih 59.248 novih vozil, od tega 9.953 znamke Renault. Kolikšen tržni delež je imel Renault?

Rešitev: 0,168 strukturni delež, 16,8 % strukturni odstotek.

60. V nekem razredu je 14 deklic in 10 dečkov. Kakšna je struktura učencev po spolu? Narišite krožni graf in na njem označite strukturne odstotke.

Rešitev: 0,5833 strukturni delež deklic, 0,4167 strukturni delež dečkov.

61. V RS je bilo leta 2010 registriranih 59.248 novih vozil. Prebivalcev je bilo v povprečju 2.048.951. Kolikšen je koeficient novo registriranih avtomobilov na 1000 prebivalcev?

Rešitev: 28,92.

62. V letu 2009 je bila v RS povprečna bruto plača 1.438,96 €, v letu 2008 pa 1.391,43 €. Kolikšen je indeks rasti plače iz leta 2008 na leto 2009?

Rešitev: 103,42.

63. Izračunajte verižni indeks, stopnje rasti in indeks z osnovo na leto 2005, iz podatkov o bruto plačah v RS, podanih v naslednji tabeli.

Tabela 6: Podatki o plačah v RS

Leto	Bruto plača
2005	1.157
2006	1.213
2007	1.285
2008	1.391
2009	1.439

Vir: <http://www.stat.si/> (1. 2. 2011)

64. Vsak indeks iz prejšnje naloge še grafično prikažite v obliki linijskega grafikona.
65. Izdelajte stolpčni grafikon za podatke o plačah v tabeli (Tabela 6).

7 FREKVENČNE PORAZDELITVE

Eden od načinov urejanja podatkov je oblikovanje primernih skupin in razvrščanje enot v te skupine glede na vrednost spremenljivke. Pri tem nas pogosto zanima, koliko enot je v posamezni skupini. Računamo tudi strukturne odstotke glede na število vseh enot v populaciji.



V različnih raziskavah zbiramo demografske podatke o anketirancih: spol, starostni razred, območje prebivališča, poklic, zaposlitveni status ... Za spol oblikujemo dve skupini (moški, ženske), v katerih preštejemo enote. Izračunamo še strukturo po spolu in jo grafično predstavimo. Podobne izračune naredimo tudi za druge podatke.

7.1 OBLIKOVANJE SKUPIN IN RAZREDOV

V skupine združujemo več sorodnih vrednosti spremenljivke, npr.: sorodne poklice, geografska območja, podobne starosti. Pri tem pa je potrebno upoštevati dve zahtevi.

1. Skupine morajo biti opredeljene tako, da lahko vsako enoto razporedimo v **natančno** eno skupino. (To pomeni, da je pri razporejanju enot v skupine vsaka enota razporejena in ni dvoma, v katero skupino sodi posamezna enota).
2. Skupine morajo vsebovati čim bolj sorodne enote (npr. osebe podobne starosti).

Število skupin določimo smiselno glede na naravo obdelave in vsebino raziskave.



Starostna razdelitev prebivalstva bi bila npr. precej nepregledna, če starostne skupine ne bi oblikovali po starostnih intervalih (npr. po desetletjih). Če pa proučujemo populacijo osnovnošolcev, ena starostna skupina obsega manjši interval (npr. eno leto).

Priporočljivo je, da skupine oblikujemo že v fazi statističnega načrtovanja.

7.1.1 Skupine pri opisnih spremenljivkah

Kako oblikujemo skupine?

- Če ima spremenljivka manjše število možnih vrednosti, oblikujemo skupino za vsako vrednost spremenljivke, npr. za spol ali za stopnjo šolske izobrazbe.
- Če ima spremenljivka veliko število vrednosti, združimo enote v skupine s podobnimi vrednostmi.

Predhodno naredimo klasifikacijo ali nomenklaturu. Znane so klasifikacije poklicev, dejavnosti, ipd.

Med opisnimi spremenljivkami so tudi tiste, ki so povezane s krajem, npr. bivanja, sedeža podjetja, ipd. Skupine so v teh primerih obstoječe upravne razdelitve, kot so občine, regije ali države.

V primerih, ko so vrednosti spremenljivke povezane s časom, so skupine lahko dnevi, meseci, kvartali ali leta.

7.1.2 Skupine pri številskih spremenljivkah



Denimo da so naša populacija vse kinodvorane v Sloveniji, spremenljivka, ki jo opazujemo pa število sedežev v dvorani. Naredili bi lahko naslednje skupine kinodvoran z:

- do 100 sedežev,
- od 101 do 200 sedežev,
- od 201 do 300 sedežev,
- od 301 do 400 sedežev,
- več kot 400 sedežev.

Skupinam, kakršne smo formirali, rečemo **razredi**. Razred tvorimo tako, da odredimo njegovo spodnjo in zgornjo mejo. Vse enote, ki imajo vrednost spremenljivke med tema dvema mejama, spadajo v ta razred.

Pri opredelitvah razredov uporabljamo tudi naslednje simbole (Tabela 7):

Tabela 7: Oznake pojmov v razredih

OZNAKA	POMEN
$Y_{j,s}$	spodnja meja j-tega razreda
$Y_{j,z}$	zgornja meja j-tega razreda
Y_j	sredina j-tega razreda
d_j	širina j-tega razreda

Sredina in širina razreda

Razlika med zgornjo in spodnjo mejo se imenuje **širina razreda**.

Širino razreda izračunamo po formuli

$$d_j = Y_{j,z} - Y_{j,s}$$

Sredino razreda izračunamo po formuli:

$$Y_j = \frac{Y_{j,s} + Y_{j,z}}{2}$$



Opredelimo npr. starostni razred od 50–64 let. Izračunajmo sredino in širino razreda.



Po sistemu zaokrožanja na najbližje celo število spadajo v starostni razred 50 do 64 let prebivalci, ki so stari vključno 49,5 let do 63,5 let.

Sredino razreda izračunamo takole:

$$\frac{49,5 + 63,5}{2} = 57$$

Širino razreda izračunamo tako, da spodnjo mejo razreda odštejemo od zgornje meje, se pravi

$$64,5 - 49,5 = 15$$

Razredi imajo lahko enake ali neenake širine.



Primer neenakih razredov je prikazan v tabeli (Tabela 2). Populacijo sestavljajo vsa podjetja. Spremenljivka je število zaposlenih v podjetju. Podjetja imajo lahko le enega zaposlenega ali pa več tisoč zaposlenih. Največ je takih, ki imajo manj kot 10 zaposlenih. Če bi se odločili za enako široke razrede s širino 100 ali 150, bi dobili zelo nejasno sliko o številu zaposlenih v manjših podjetjih. V takih primerih se torej odločimo za neenake razrede.

Ustrezno delitev na razrede oblikujemo sami, glede na vsebino problema in distribucijo vrednosti spremenljivk.

Za enake širine se odločimo, če imamo vrednosti spremenljivke enakomerne porazdeljene.

Če imamo v nekem območju veliko podatkov, oblikujemo v njem razrede z manjšimi širinami. V območju, kjer je podatkov malo, so širine razredov običajno večje. Primer oblikovanja razredov z različnimi širinami je v tabeli (Tabela 2).

Meje razredov



Najprej si zamislimo, da so študenti pisali izpit iz Informatike. Ocene, ki so jih dobili, so 1, 2, 3, ... 10. Če nas zanima, koliko študentov je prejelo določeno oceno, oblikujemo razrede od 1 do 10. Če bi nas negativne ocene podrobneje ne zanimale, bi oblikovali razrede 1–5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ocene so diskretne spremenljivke. Oblikovanje razredov je enostavno. Izberemo posamične vrednosti ali intervalne vrednosti.

Če imamo zvezne spremenljivke, so vrednosti poljubna decimalna števila.

Predpostavimo, da smo oblikovali k razredov. Razredi morajo skupaj zajeti vse vrednosti (brez lukenj). Za vse razrede $j=1, 2 \dots k-1$ zato velja, da je

$$Y_{j,z} = Y_{j+1,s}$$

To pomeni, da je zgornja meja predhodnega razreda enaka spodnji meji naslednjega razreda.

Omenili smo, da mora biti nedvoumno, kam sodi določena vrednost. Iz zgornjega zapisa pa ni jasno, v kateri razred spada mejna vrednost. Zato moramo to natančno opredeliti tako zase kot za tiste, ki so jim naša statistična poročila namenjena. Matematično to storimo z uporabo oglatih in okroglih oklepajev.

Vrednost na desni strani intervala (zgornja meja razreda) lahko uvrstimo v naslednji razred (spodnja meja naslednjega razreda). Vendar pa to ni pravilo, ki bi ga morali upoštevati. Uvrstimo jo lahko tudi v isti razred. Vsekakor pa se držimo ene ali druge možnosti, in jih v isti analizi ne mešamo.

Izberemo torej eno od možnosti:

Prva možnost: $[Y_{j,s}, Y_{j,z})$ ($j=1, 2 \dots k$)

Druga možnost: $(Y_{j,s}, Y_{j,z}]$ ($j=1, 2 \dots k$)



Opazujemo povprečne bruto plače v RS, za mesec maj 2011. Kot vemo, se plače izplačujejo v €, na stotine natančno. Za oblikovanje razredov imamo dve možnosti, kar vidimo v tabeli (Tabela 8).

Tabela 8: Primer oblikovanja razredov

RAZRED GLEDE NA VIŠINO PLAČE V €	PRVA MOŽNOST	DRUGA MOŽNOST
0 – 750	Vrednosti od 0 do 749,99	Vrednosti od 0 do vključno 750,00
750 – 1.000	Vrednosti od 750,00 do 999,99	Vrednosti od 750,01 do 1.000,00
1.000 – 1.500	Vrednosti od 1.000,00 do 1,499,99	Vrednosti od 1.000,01 do 1.500,00
1.500 – 2.000	Vrednosti od 1.500,00 do 1.999,99	Vrednosti od 1.500,01 do 2.000,00
2.000 in več	Vrednosti višje od 2.000,00	Vrednosti višje od 2.000,00



Excelove funkcije in orodja, kjer podamo razrede, imajo vgrajeno drugo možnost.

7.1.3 Frekvenčna porazdelitev in frekvenca



Predstavljajmo si knjižno omaro, sestavljeno iz štirih knjižnih polic, z oznakami Leposlovje, Naravoslovje, Družboslovje in Ostalo. V njej je skupaj 170 knjig, zloženih na police po kriteriju vrsta knjige. Podatki so v tabeli (Tabela 9).

Tabela 9: Primer frekvenčne porazdelitve

VRSTA KNJIGE	ŠTEVILO KNJIG
Leposlovje	30
Naravoslovje	45
Družboslovje	40
Ostalo	55
Skupaj	170

Takšna uvrstitev knjig na police je primer frekvenčne porazdelitve. Število knjig na posamezni polici je frekvenca.

Frekvenčna porazdelitev je vsaka razvrstitev enot v skupine, ne glede na vrsto spremenljivke, pri čemer so skupine oblikovane tako, da je vsako spremenljivko možno uvrstiti natančno v eno skupino.

Frekvenca je število enot v posamezni skupini. Označimo jo s f_j .

Vsota vseh frekvenc je enaka številu vseh enot v populaciji. To matematično zapišemo s formulo

$$\sum_{j=1}^k f_j = N,$$

pri čemer je k število skupin ali razredov, N pa število vseh enot v populaciji.



V našem primeru (Tabela 9) populacijo sestavljajo knjige iz naše knjižne omare, skupina je polica oz. vrsta knjige, enote so knjige, frekvenca skupine pa je število knjig na posamezni polici.

Frekvenci rečemo tudi absolutna frekvenca.

7.1.4 Relativna frekvenca



Kaj je relativna frekvenca, si oglejmo na primeru že znane knjižne omare (Tabela 9). Izračunajmo strukturalni delež in strukturalni odstotek posamezne (absolutne) frekvence glede na vse enote v populaciji.



Izračun si oglejmo na sliki (Slika 57).

	A	B	C	D
	Vrsta knjige	Število knjig (Frekvenca)	Strukturalni delež (Relativna frekvenca)	
1				=B2/\$B\$6
2	Leposlovje	30	0,1765	
3	Naravoslovje	45	0,2647	
4	Družboslovje	40	0,2353	
5	Ostalo	55	0,3235	
6	Skupaj	170	1	

Slika 57: Frekvenca in relativna frekvenca

Če stolpec C oblikujemo s % formatom, dobimo vrednosti izražene v odstotkih, vsota (celica C6) pa je 100 %.

Relativna frekvenca je strukturalni delež posamezne frekvence, ali če ga izrazimo v odstotkih, strukturalni odstotek.

Vsota relativnih frekvenc je 1 oz. 100 %.

7.1.5 Kumulativna in relativna kumulativna frekvenca

Kumulativna frekvenca na primeru knjižne omare ni smiselna. Pomen ima npr. pri frekvenčnih porazdelitvah, kjer so skupine razredi.

Kumulativno frekvenco označujemo s F_j in jo izračunamo po naslednjem pravilu:

$$F_1 = f_1$$

$$F_j = F_{j-1} + f_j, j=1,2,\dots,k$$

Relativna kumulativna frekvenca se izračuna na podoben način, le da se seštevajo relativne frekvence.



V naslednji tabeli (Slika 58) imamo podatke o podjetjih, ki smo jih razdelili v razrede po številu zaposlenih: 0 do 1, 2 do 9, 10 do 49, 50 do 249 in več kot 250 zaposlenih. V posameznem razredu (stolpec A) je število podjetij (frekvenca), ki je podano v stolpcu B.



V stolpcu C izračunamo relativno frekvenco tako, da frekvenco posameznega razreda delimo s številom vseh podjetij (v C3 zapišemo naslednjo formulo: = B3/\$B\$8).

Kumulativno frekvenco v stolpcu D izračunamo tako, da najprej prepisemo frekvenco najnižjega razreda. V celico D3 torej zapišemo =B3. Na naslednjem koraku pa h kumulativni frekvenci iz predhodnega koraka prištejemo frekvenco na tekočem koraku. V celico D4 tako zapišemo =D3 + B4, nato pa formulo kopiramo po stolpcu navzdol.

Če frekvence postopoma seštevamo, dobimo kumulativne frekvence po razredih, ki pomenijo, koliko enot iz populacije ima manjšo ali enako vrednost, kot je zgornja meja danega razreda.

Kumulativna frekvenco, izračunana v celici D5, ima naslednji pomen: vseh podjetij, ki imajo do 49 zaposlenih, je skupno 149.944.

	A	B	C	D	E	F
1	<i>RS, leto 2008</i>					
	Velikost podjetja po številu zaposlenih	Število podjetij (frekvenca)	Relativna frekvenca	Kumulativna frekvenca	Relativna kumulativna frekvenca	
2						=C3
3	0 do 1	100.923	0,6616	100.923	0,6616	
4	2 do 9	41.360	0,2711	142.283	0,9328	=E3+C4
5	10 do 49	7.661	0,0502	149.944	0,9830	
6	50 do 249	2.212	0,0145	152.156	0,9975	
7	nad 250	385	0,0025	152.541	1,0000	
8	Skupaj	152.541	1,0000			
9	<i>Vir: Statistični letopis 2010</i>					

Slika 58: Izračun absolutne in relativne kumulativne frekvence

7.1.6 Grafični prikaz frekvenčne porazdelitve

Frekvence in relativne frekvence grafično ponazorimo s krožnim grafikonom, če nas zanimajo odnosi deležev glede na celoto (npr. delež moških in žensk v populaciji).

Če nas zanimajo posamezne frekvence in odnosi med njimi oz., če posamičnih frekvenc ne primerjamo z vsoto frekvenc, uporabimo bodisi linijski bodisi stolpčni grafikon. V linijskem grafikonu frekvence nanašamo na y koordinato nad točko x, ki predstavlja sredino razreda.

Kumulativne frekvence nanašamo v linijski grafikon, ki ga imenujemo ogiva. Kumulativne vrednosti nanašamo na zgornje meje (in ne v sredine) razredov.



Na popisu prebivalstva leta 2002 je bila v Sloveniji starostna struktura prebivalstva, ki je prikazana v tabeli (Slika 59).

	A	B	C	D	E
1	Prebivalstvo, po starosti, Slovenija, Popis 2002				
2					
3	Starostni razred	SKUPAJ (moški in ženske)	Kumulativna frekvenca	Relativna frekvenca	Kumulativna relativna frekvenca
4	0-9	184.357	184.357	9,4%	9,4%
5	10-19	245.839	430.196	12,5%	21,9%
6	20-29	292.664	722.860	14,9%	36,8%
7	30-39	294.130	1.016.990	15,0%	51,8%
8	40-49	310.753	1.327.743	15,8%	67,6%
9	50-59	243.703	1.571.446	12,4%	80,0%
10	60-69	199.159	1.770.605	10,1%	90,2%
11	70-79	142.861	1.913.466	7,3%	97,4%
12	80+	50.570	1.964.036	2,6%	100,0%
13	SKUPAJ	1.964.036		100,0%	
14					
15	Vir: Statistični urad RS, Popis prebivalstva, gospodinjstev in stanovanj 2002.				

Slika 59: Starostna struktura prebivalcev na popisu leta 2002

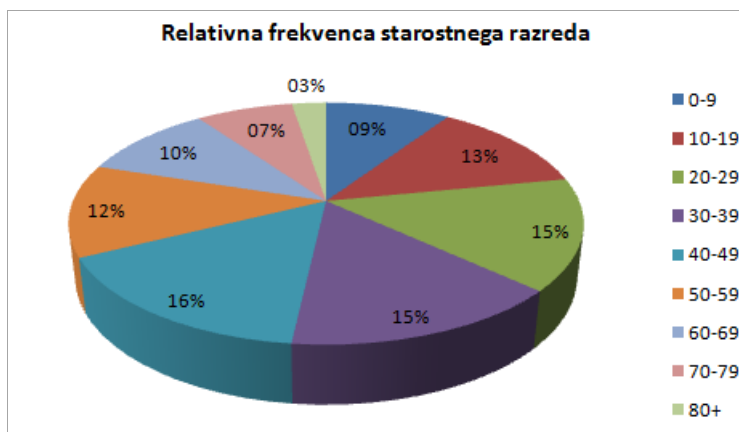
Na primeru naredimo naslednje grafikone:

- krožni grafikon, ki prikazuje relativne frekvence (stolpec D),
- linijski grafikon (poligon) in stolpčni grafikon (histogram), kamor naneseemo absolutne frekvence starostnih razredov (stolpec B),
- linijski grafikon (poligon), kamor naneseemo kumulativne relativne frekvence starostnih razredov (stolpec E).



Krožni grafikon

Na sliki (Slika 59) imamo relativne frekvence zapisane v obliki strukturnega deleža. V grafikonu (Slika 60) smo prikazali strukturne odstotke.



Slika 60: Primer krožnega grafikona za prikaz relativne frekvence

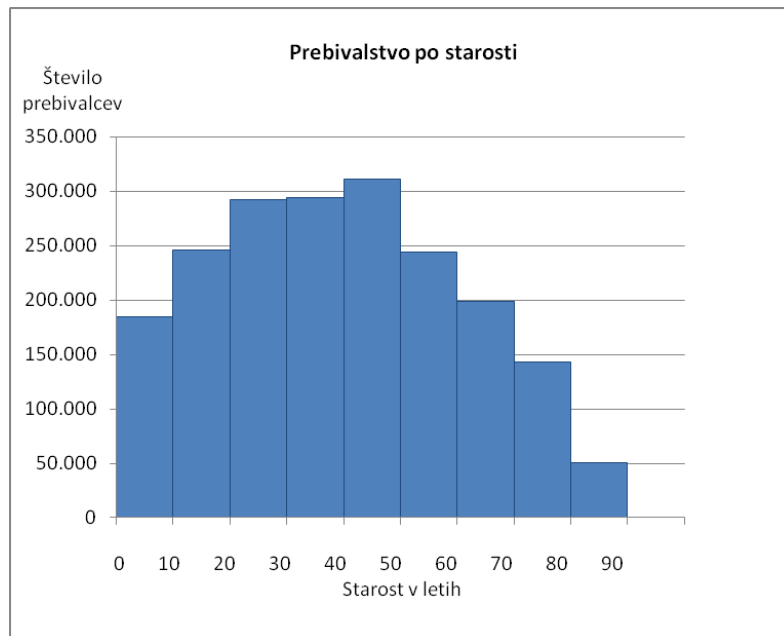
Stolpčni grafikon za prikaz frekvenc

Stolpčni grafikon ali histogram je sestavljen iz pravokotnikov, katerih širine ustrezajo razrednim širinam, višine pa razrednim frekvencam. Na abscisno (vodoravno oz. x) os

nanesemo lestvico vrednosti spremenljivke (v našem primeru starost), na ordinatno (navpično oz. y) os pa lestvico razrednih frekvenc.

Na abscisno os nanesejo le meje razredov. Zadnji razred je v resnici odprt in nima znane zgornje meje.

Dobimo grafikon, ki je prikazan na sliki (Slika 61).



Slika 61: Stolpčni graf (histogram) za prikaz absolutnih frekvenc

Posamezni stolpec označuje število prebivalcev v starostni skupini, ki je opredeljena s spodnjo in zgornjo mejo razreda.

Grafikon opremimo z opisom osi in naslovom.

Linijski grafikon za prikaz frekvenc

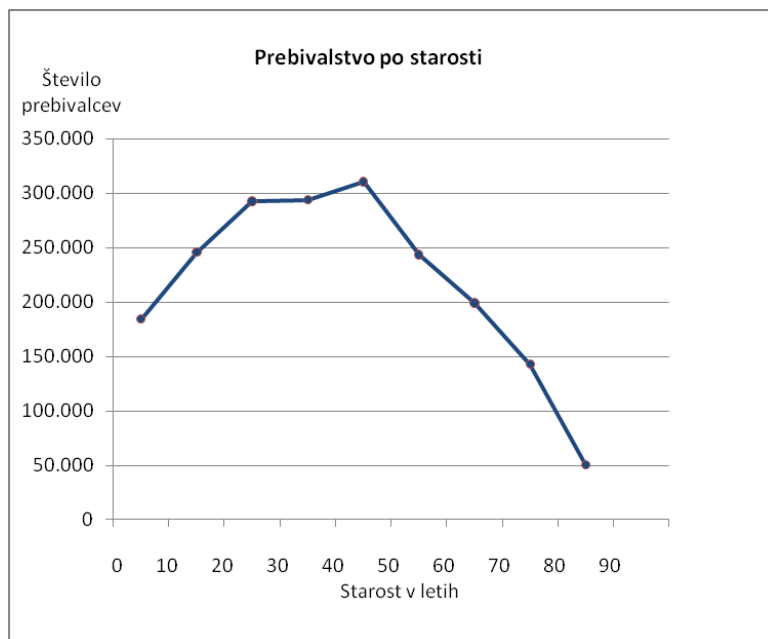
Na abscisni (vodoravni oz. x) osi je lestvica vrednosti spremenljivke (v našem primeru starost), na ordinatni (navpični oz. y) osi je lestvica razrednih frekvenc.

Z linijskim grafikonom ali poligonom povežemo točke, ki jih dobimo na naslednji način. Ustrezne frekvence nanašamo na y koordinate nad točkami x, ki predstavljajo sredine razredov.

Izračunati moramo torej sredine razredov. Te so: 5, 15, 25 ... Zadnji razred je odprt, saj so v njem prebivalci stari 80 let in več.

Grafikon je na sliki (Slika 62).

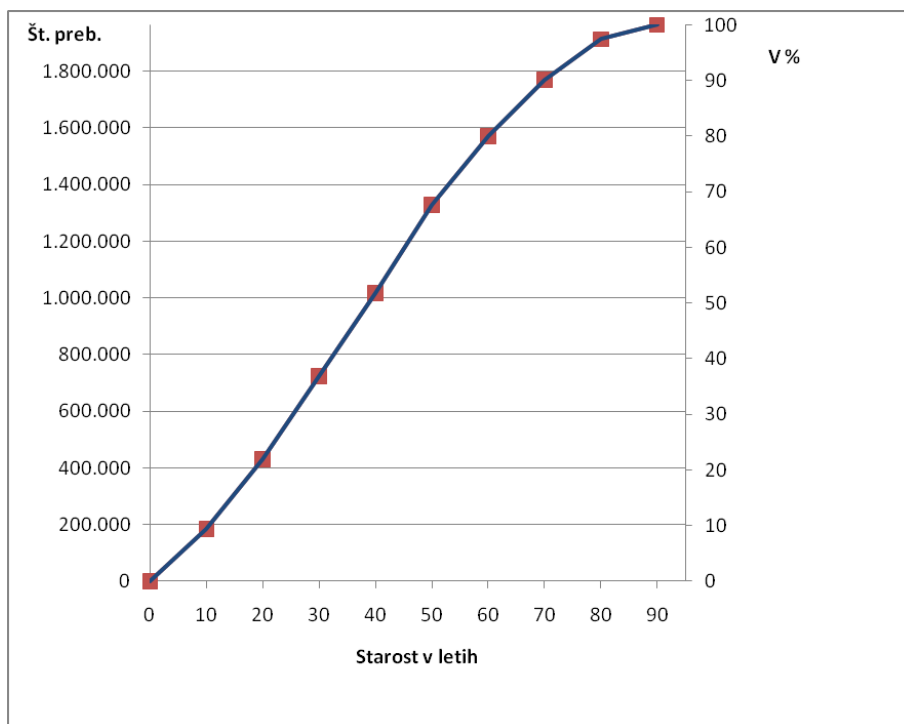
Poligon še ni sklenjen. Narediti moramo še točko za razred, ki je pred najnižjim razredom in še točko za razred, ki je za najvišjim razredom. V teh dveh razredih sta frekvenci enaki nič. V našem primeru imamo težavo, saj ne poznamo natančne zgornje meje zadnjega razreda.



Slika 62: Linijski graf (poligon) za prikaz absolutnih frekvenc

Linijski grafikon za prikaz kumulativnih relativnih frekvenc

Kumulativne frekvence nanašamo na zgornje meje razredov. Dobimo grafikon, ki je prikazan na sliki (Slika 63).



Slika 63: Poligon za prikaz kumulativnih relativnih frekvenc

7.1.7 Računanje frekvenc s funkcijo Frequency

Kadar imamo veliko število še neurejenih podatkov, je z razvrščanjem v razrede veliko dela in tudi veliko možnosti za napake. Zato si pomagamo s funkcijami in orodji, ki nam olajšajo izračune in grafične prikaze.



Zaradi boljše preglednosti in varčevanja s prostorom bomo izbrali primere z malo vrednostmi. V realnih primerih je enot za razvrščanje praviloma zelo veliko. Za frekvenčne porazdelitve in računanje frekvenc se odločamo, če jih je več kot 30.



Podjetje X prodaja svoj izdelek v 12 trgovinah v Sloveniji. Dobili smo podatke o številu prodanih izdelkov v posamezni trgovini v nekem časovnem obdobju. Podatki so zbrani v spodnji tabeli.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Oznaka trgovine	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12
	Število prodanih												
2	izdelkov	58	43	51	47	42	33	33	41	44	52	39	40

Slika 64: Primer podatkov za frekvenčno porazdelitev



Če naredimo osnovne izračune, ugotovimo:

- najmanj izdelkov je bilo prodanih v trgovinah T6 in T7, kjer je bilo prodanih 33 izdelkov.
- Največ izdelkov je bilo prodanih v trgovini T1, kjer je bilo prodanih 58 izdelkov.
- Skupaj je bilo prodanih 523 izdelkov (seštevek celic od B2 do M2).

Oblikujemo razrede po številu prodanih izdelkov in izračunajmo, koliko trgovin je v posameznem razredu. Za določitev razredov najprej poiščemo najmanjšo in največjo vrednost. Najprimernejši način za to je uporaba Excelovih funkcij MIN in MAX. Rešitev vidimo na sliki (Slika 65). Najnižji razred se v našem primeru začne pri 33, najvišji se konča pri 58.

Koliko razredov določimo in kako široki so, se odločimo sami, glede na podatke. Odločimo se lahko za enakomerne (z enakimi širinami) ali za neenakomerne razrede (z različnimi širinami). Mi se bomo odločili za naslednje razrede: 33 do 40, 41 do 50, 51 do 58.


Za potrebe izračunavanja v Excelu, vpišemo le zgornje meje razredov, kar vidimo na območju A5 do A7 tabele, ki je na sliki (Slika 65).

Določili smo razrede. V naslednjem koraku bi morali začeti s preštevanjem števila trgovin, ki so prodale do 40 izdelkov (vidimo, da so take 4), od 41 do 50 izdelkov (takih je 5) in od 51 do 58 izdelkov (take so 3). Za 12 trgovin kaj takega lahko naredimo »ročno«, s pregledom tabele (Slika 64). V primeru obsežnejših podatkov bi bilo ročno pregledovanje zamudno, verjetnost napake pa precejšnja. Če pa poznamo Excelovo funkcijo Frequency, si lahko prihranimo precej časa in verjetnost za napako zmanjšamo na nič.

Za računanje frekvenc posameznih razredov, relativnih frekvenc in kumulativnih frekvenc imamo na voljo funkcijo FREQUENCY.

Pri vstavljanju funkcije si pomagamo s čarovnikom oz. orodjem Vstavi funkcijo.

V našem primeru (Slika 65) je postopek vnosa naslednji:

- najprej označimo območje, kjer bodo izračunane frekvence – v našem primeru B5:B7,
- vstavimo funkcijo FREQUENCY (kliknemo ikono  in iz menija statističnih funkcij izberemo Frequency),

- določimo območje podatkov (data_array), na katerih računamo frekvence – v našem primeru B2:M2,
- določimo območje, kjer so podani razredi – v našem primeru A5:A7,
- vnos zaključimo tako, da držimo tipki CTRL in SHIFT ter hkrati pritisnemo še ENTER.
- Funkcija FREQUENCY spada v skupino matričnih funkcij. Njihova značilnost je, da vrnejo rezultate v območje celic in ne v eno samo celico, kot smo bili navajeni doslej.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Oznaka trgovine	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	Skupaj	Min.	Maks.		
2	Število prodanih izdelkov	58	43	51	47	42	33	33	41	44	52	39	40	523	33	58		
3																		
4																		
5		40																
6		50																
7		58																
8	Skupaj																	
9																		

Slika 65: Izračun frekvenc s pomočjo funkcije Frequency



Uporaba funkcije FREQUENCY zahteva pozornost. Najprej označimo celice, v katerih želimo rezultat, nato vnesemo funkcijo z argumenti in na koncu vnos zaključimo s kombinacijo tipk CTRL+SHIFT+ENTER.

Celotno območje se naenkrat napolni z rezultati.

Izračunajmo še relativne frekvence, kumulativne frekvence in kumulativne relativne frekvence. Dobimo rezultate, ki jih prikazuje tabela (Slika 66).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Oznaka trgovine	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12
2	Število prodanih izdelkov A	58	43	51	47	42	33	33	41	44	52	39	40
3													
4		Razred (zg. vrednost)	Frekvenca	Relativna frekvenca v %	Kumulativna frekvenca	Kumulativna odstotnih deležev							
5		40	4	33%	4	33%							
6		50	5	42%	9	75%							
7		58	3	25%	12	100%							
8	Skupaj		12	100%									

Slika 66: Izračun frekvenc, relativnih in kumulativnih frekvenc

Popravljanje vnosa matrične funkcije je možno le, če ponovno označimo celotno območje in pritisnemo F2. Enako velja za brisanje. Posameznih celic v območju vnosa matričnih funkcij ni mogoče brisati.

Iz dobljenih izračunov razberemo, da je največ trgovin (5) prodalo od 41 do 50 kosov izdelka. To je, izraženo v odstotkih, 42 %. Tri četrtine trgovin (natančneje 75 %) trgovin je prodalo do vključno 50 kosov, četrtina (25 %) trgovin pa od 51 do 58 kosov.

Podatke lahko s pomočjo Excela tudi grafično prikažemo. Potrebno znanje smo pridobili pri predmetu Informatika. Za prikaz je najprimernejši stolpčni graf, kjer na os x nanesemo razrede, na os y pa ustrezne frekvence.



V Excelu velja, da vrednosti, ki so na zgornji meji intervala, spadajo v interval. To nedvoumno povemo s tem, da označimo le zgornje meje (stolpec A, Slika 66). V tabeli (Tabela 8) smo tak način obravnavanja mejnih vrednosti označili z možnost 2.

7.1.8 Excelovo orodje Histogram

Za grafično predstavitev frekvenc in kumulativnih relativnih frekvenc je zelo primerno Excelovo orodje Histogram.

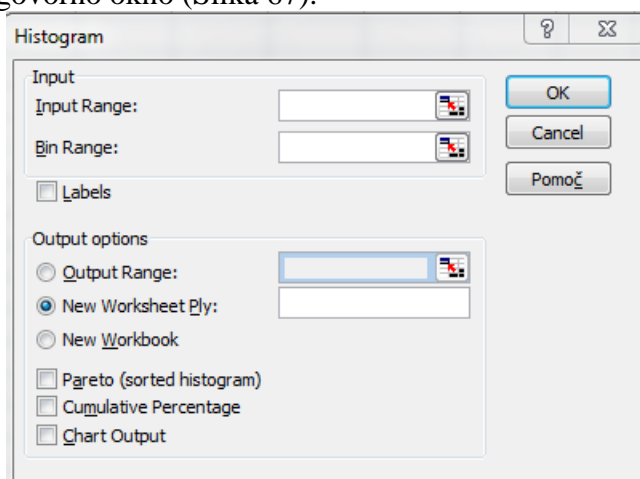


Podjetje X prodaja svoj izdelek v 12 trgovinah v Sloveniji. Dobili smo podatke o številu prodanih izdelkov v posamezni trgovini v nekem časovnem obdobju. Podatki so zbrani v prvih dveh stolpcih tabele na sliki (Slika 69). Izračunajmo frekvence in grafično predstavimo rezultate.



Rešitev dobimo s pomočjo naslednjega postopka.

- V meniju **PODATKI** izberemo možnost **ANALIZA PODATKOV**⁸.
- V seznamu izberemo opcijo **HISTOGRAM** in kliknemo na gumb **OK**. Prikaže se naslednje pogovorno okno (Slika 67).

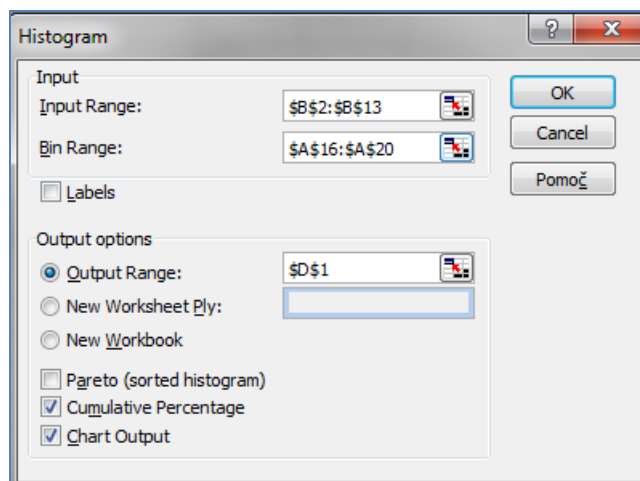


Slika 67: Excelovo orodje Histogram

- V polje **INPUT RANGE** vpišemo oz. označimo območje, kjer imamo osnovne podatke (v našem primeru B2 do B13).

⁸ To možnost imamo na voljo, če so vklopljena orodja za analizo.

- V polje **BIN RANGE** vpišemo oz. označimo območje, kjer imamo razrede (v našem primeru A16 do A20).
- V polje **OUTPUT RANGE** vpišemo zgornjo levo celico območja, kamor želimo, da nam program vpiše rezultate (v našem primeru D1).
- Če je kljukica pri opciji **PARETO (SORTED HISTOGRAM)**, nam bo program dodal tri stolpce tako, da bodo frekvence urejene v padajočem vrstnem redu. To pomeni, da bo razred, katerega frekvenca je največja na vrhu, razred, katerega frekvenca je najmanjša, pa na dnu.
- Če je kljukica pri opciji **CUMULATIVE PERCENTAGE**, nam bo program dodal stolpec, ki smo ga mi imenovali kumulativni odstotni delež.
- Če je kljukica le pri opciji **CHART OUTPUT**, bo program dodal stolpčni graf frekvenc vseh razredov. Če so kljukice tudi pri opcijah **PARETO** in/ali **CUMULATIVE PERCENTAGE**, potem program izdela kombinirani stolpčno linijski graf frekvenc in kumulativnih frekvenc, urejenih padajoče.
- Ko označimo ali vtipkamo vsa območja in izberemo vse želene opcije, potrdimo pogovorno okno Histogram z **OK**.



Slika 68: Pogovorno okno Histogram s podatki

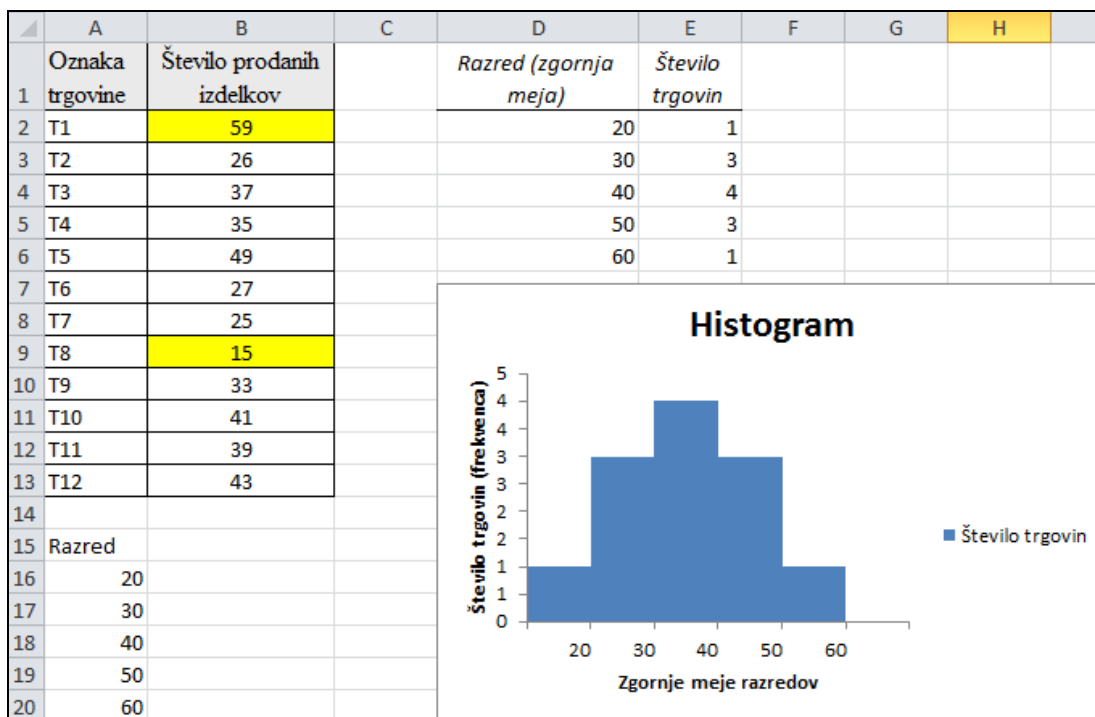
Rezultat za naš primer je na naslednji sliki (Slika 69).

Na abscisni osi (x os) imamo vrednosti, ki prikazujejo meje razredov glede na število prodanih izdelkov. Posamezna oznaka se nanaša na zgornjo mejo razreda oz. na spodnjo mejo naslednjega razreda. S tem imamo zajete intervale 0 do 20, 21 do 30, itn. Oznake so na desni in s tem grafično označujejo, da je zgornja meja zajeta v intervalu.

Na ordinatni osi (y os) imamo stolpce, ki prikazujejo število trgovin, ki so prodale izdelke v posameznem razredu. Do 20 izdelkov je prodala ena trgovina, od 21 do 30 so jih prodale 3, itn.

Ugotovimo lahko, da orodje ne naredi stolpca relativnih frekvenc in stolpca kumulativnih absolutnih frekvenc. Vse to lahko dodamo sami, saj je tabelo mogoče poljubno dopolnjevati.

Graf in tabelo je potrebno še malo polepšati ter angleške izraze prepisati s slovenskimi.



Slika 69: Frekvence, kumulativne relativne frekvence in stolpčni graf



V Excelu velja, da vrednosti, ki so enake zgornji meji intervala, spadajo v interval.

7.2 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

66. V čem je razlika med skupino in razredom? Katere značilnosti veljajo za razrede?
67. Zamislite si, da delate raziskavo o uporabi e-bančništva v populaciji oseb, starejših od 18 let.
 - Opredelite populacijo in spremenljivke za demografske podatke.
 - Oblikujte skupine za naslednje demografske podatke: spol, poklic, zaposlitveni status.
 - Oblikujte razrede za starost anketirancev.
68. V RS je bilo leta 2010 registriranih 59.248 novih vozil, od tega 9.953 znamke Renault. Kaj v smislu frekvenčne porazdelitve predstavlja Renault in kaj podatek o prodanem številu vozil?
69. Izračunajte relativno frekvenco prodanih vozil Renault na podatkih prejšnje naloge.
R: 16,8 %
70. Poglejte podatke v tabeli (Tabela 4). Izračunajte relativne frekvence in kumulativne relativne frekvence družine vrste *mati z otroki* glede na vse družine.
71. Ali podatki v tabeli o bruto plačah (Tabela 6) predstavljajo frekvenčno porazdelitev? Odgovor utemeljite.

8 RANGI IN KVANTILI



Države sveta razvrstimo po površini ozemlja. Nato pa nas npr. zanima, katera po vrsti, od najmanjše do največje, je Slovenija. Zanima nas torej njen rang. Razen tega bi nas npr. zanimalo, ali spada Slovenija po površini med 50 % največjih ali 50 % najmanjših držav? Odgovore na ta in podobna vprašanja poiščemo s kvantili.

8.1 RANGI

8.1.1 Ranžirna vrsta

Vrednosti številske spremenljivke uredimo po vrsti, od najmanjše do največje. Tako dobimo **ranžirno vrsto**. Poglejmo primer.



Na testu znanja je 12 učencev (U1 do U12) doseglo naslednje rezultate:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Šifra učenca	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	U11	U12
2	Doseženo število točk	96	45	18	45	96	52	21	56	75	71	17	73

Slika 70: Rezultati testa znanja



Če te rezultate uredimo v naraščajočo vrsto, po doseženih točkah, dobimo ranžirno vrsto. Rezultat je v tabeli na sliki (Slika 71).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Šifra učenca	U11	U3	U7	U4	U2	U6	U8	U10	U12	U9	U1	U5
2	Doseženo število točk	17	18	21	45	45	52	56	71	73	75	96	96

Slika 71: Ranžirna vrsta

Število enot v populaciji je N . V našem primeru ima N vrednost 12.

V ranžirno vrsto postavimo spremenljivke glede na njihovo vrednost, od najmanjše proti največji vrednosti.

Ranžirna vrsta so po velikosti (od najmanjše do največje vrednosti) urejeni podatki proučevane populacije.

8.1.2 Absolutni in kvantilni rang

Vsaka vrednost v ranžirni vrsti ima zaporedno številko ali **rang**. Vrednosti ranga so od 1 do N (število enot v populaciji).

Opazujmo podatke na sliki (Slika 71). Vrednost 17 ima rang 1, 18 ima rang 2, 45 ima rang 4 in rang 5. 75 ima rang 10. Rezultate vidimo na sliki (Slika 72).

Rangu rečemo tudi absolutni rang. S tem poudarimo, da gre za mesto, ki jo ima enota v ranžirni vrsti.

Navedba (absolutnega) ranga ima smisel, če navedemo število vseh enot v populaciji. Rang učnega dosežka učenca je pomenljiv podatek, če vemo, koliko je bilo vseh učencev.



Dober primer je naslednja šala o sporočanju športnih rezultatov. Rusi poročajo: ruski tekmovalec je bil odličen drugi, Američan predzadnji. Zgodbo popolnoma drugače razumemo, če vemo, da sta bila le dva tekmovalca in je zmagal Američan, Rus pa je bil drugi ali zadnji.

Da bi se izognili podobnim manipulacijam s podatki oz. izločili vpliv velikosti populacije, navedemo **relativni** ali **kvantilni rang**.

Pri izračunavanju rangov spremenimo diskretni (celoštevilski) rang R v zveznega, ki ga označimo z R_p tako, da celoštevilski vrednosti pripišemo enotski razmik. Najmanjša vrednost ranga R_p je 0,5, največja pa $N+0,5$. Vrednost kvantilnega ranga je pri najmanjši vrednosti ranga (0,5) enaka 0, pri največji vrednosti ranga ($N+0,5$) pa 1.

Slika (Slika 72) prikazuje, kako določimo rang R_p

Kvantilni rang dobimo kot razmerje med rangom in številom enot populacije (N)

$$P = \frac{R_p - 0,5}{N}$$

Kvantilni (relativni) rang pove, koliko % enot populacije ima manjšo ali kvečjemu enako vrednost od dane enote.



Poglejmo vse skupaj na primeru učnih rezultatov.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Šifra učenca		U11	U3	U7	U2	U4	U6	U8	U10	U12	U9	U1	U5	
2	Doseženo število točk		17	18	21	45	45	52	56	71	73	75	96	96	
3	Rang R		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
4	Rang R_p		0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12,5
5	Kvantilni rang P		0	0,04	0,13	0,21	0,29	0,38	0,46	0,54	0,63	0,71	0,79	0,88	0,96
6															
7															

Slika 72: Ranžirna vrsta, rang in kvantilni rang

Opazimo, da ima učni rezultat učenca U7 rang 3 (bil je tretji od dvanajstih). Njegov kvantilni rang je enak

$$\frac{3-0,5}{12} = 0,2083$$

To pomeni, da je imelo 20,83 % populacije dvanajstih učencev, ki so pisali učni test, slabše rezultate od učenca U7.

8.1.3 Grafični prikaz rangov

Ranžirno vrsto in range prikažemo z linijskim grafikonom. Na abscisno os nanese vrednosti spremenljivke, na ordinatni osi pa uporabimo dve merski lestvici: eno za vrednosti ranga, drugo za vrednosti kvantilnega ranga.

8.2 KVANTILI

Vrednost spremenljivke, ki ustreza določenemu kvantilnemu rangju, imenujemo kvantil. Razred, v katerem je ta vrednost, imenujemo kvantilni razred.

Kvantil je vrednost, ki razdeli ranžirno vrsto na enake dele. Najbolj znani kvantili so mediana, kvartili, decili in centili. Mediana razdeli ranžirno vrsto na dva enaka dela, kvartili jo delijo na štiri enake dele, decili na 10 enakih delov.

8.2.1 Računanje kvantilov in kvantilnih rangov iz ranžirne vrste

Računanje ranga in kvantilnega ranga za dano vrednost spremenljivke Y

Spremenljivka Y je lahko v ranžirni vrsti, ali pa tudi ne.



Poglejmo učne rezultate, ki so v tabeli (Slika 72). Zanima nas, kateri rang in kvantilni rang bi pripadal učencu, ki bi na testu znanja dosegel 70 točk.

Rang za dano vrednost spremenljivke Y označimo z R_Y , kvantilni rang pa s P_Y . Izračunamo ju na naslednji način.

1. Podatke uredimo v ranžirno vrsto.
2. V ranžirni vrsti poiščemo dve zaporedni vrednosti Y_0 in Y_1 , med katerima leži dana vrednost Y. Njima ustrezna ranga iz ranžirne vrste označimo z R_0 in R_1 .

$$R_0 \leq R_Y < R_1$$

3. Iskano vrednost ranga R_Y izračunamo po formuli:

$$R_Y = R_0 + (R_1 - R_0) \frac{(Y - Y_0)}{(Y_1 - Y_0)}$$

4. Kvantilni rang izračunamo po formuli:

$$P_Y = \frac{R_Y - 0,5}{N}$$



Rešimo zdaj našo nalogo.

Ranžirno vrsto že imamo. Vrednost 70 je med vrednostma 56 in 71, njima pa ustrezata zaporedna ranga 7 in 8.

$$R_Y = 7 + (8 - 7) \times (70 - 56) / (71 - 56) = 7,93$$

$$P_Y = (7,93 - 0,5) / 12 = 0,62$$

Našemu učencu bi pripadal rang 7,93 in kvantilni rang 0,62, s čimer bi se uvrstil med 40% najboljših učencev glede na opravljeni učni test.

Računanje kvantilov iz ranžirne vrste

Zanima nas, kateri kvantil ustreza določenemu kvantilnemu rangju.



Za podatke, ki jih imamo v tabeli (Slika 72) nas npr. zanima, katera vrednost spremenljivke ustreza kvantilnemu rangi 0,5. V tem primeru torej iščemo vrednost spremenljivke, ki bi bila na sredini ranžirne vrste. Če ni nas npr. zanimalo, katera vrednost spremenljivke ustreza kvantilnemu rangi 0,25, bi iskali vrednost spremenljivke, ki bi bila na četrtini ranžirne vrste.

Podan imamo kvantilni rang P , iščemo pa ustrezeni kvantil Y_p .

1. Izhajamo iz formule za kvantilni rang

$$P = \frac{R_p - 0,5}{N}$$

2. Iz nje izračunajmo absolutni rang podatka:

$$R_p = NP + 0,5$$

3. Nato pogledamo, med katerima absolutnima rangoma R_0 in R_1 v ranžirni vrsti je R_p . Veljati mora

$$R_0 \leq R_p < R_1$$

4. Rangoma R_0 in R_1 ustrezeni vrednosti spremenljivke označimo z Y_0 in Y_1 .
5. Predpostavimo proporcionalno spreminjanje absolutnega ranga od R_0 do R_1 in proporcionalno spreminjanje vrednosti spremenljivke od Y_0 do Y_1 ter dobimo naslednjo formulo, ki jo uporabimo za izračun kvantila:

$$Y_p = Y_0 + (Y_1 - Y_0) \frac{(R_p - R_0)}{(R_1 - R_0)}$$



V našem primeru (Slika 72) je $P = 0,5$. Razlika med R_1 in R_0 je 1.

R_p izračunamo po formuli:

$$R_p = NP + 0,5 = 12 \times 0,5 + 0,5 = 6,5$$

R_p torej leži na intervalu med rangoma 6 in 7, ki jima ustrežata vrednosti spremenljivke 52 in 56.

Izračunajmo še Y_p .

$$Y_p = Y_0 + (Y_1 - Y_0)(R_p - R_0) = 52 + (56 - 52)(6,5 - 6) = 54$$

Ugotovili smo, da kvantilnemu rangi 0,5 ustreza vrednost 54. Opazimo, da je rang 6,5 povprečje med 6 in 7, vrednost spremenljivke 54 pa povprečje med 52 in 56. To velja, kadar imamo v ranžirni vrsti liho število podatkov.

Kvantil, ki smo ga pravkar izračunali, se imenuje mediana.

8.2.2 Kvantili s posebnimi imeni

Nekateri kvantili imajo posebna imena. Vse izračunamo podobno kot mediano, le da vzamemo za P ustrezno vrednost.

Mediana ali središčnica

Mediano smo že izračunali.

Mediana (Me) je kvantil, ki ustreza kvantilnemu rangju $P = 0,5$. Mediana je torej tista vrednost spremenljivke, ki razdeli populacijo, glede na število enot, na dva enaka dela.

Kvartil

Kvartili (Q) so kvantili, ki razdelijo populacijo, glede na število enot, na štiri enake dele.

Prvi kvartil ustreza kvantilnemu rangju $P = 0,25$. Drugi kvartil ustreza kvantilnemu rangju $P = 0,5$. Tretji kvartil ustreza kvantilnemu rangju $P = 0,75$.

Označimo jih s Q_1 , Q_2 in Q_3 .

Q_1 označimo tudi z $Y_{P = 0,25}$, s čimer poudarimo, da gre za kvantil, ki ustreza kvantilnemu rangju $P = 0,25$. Podobno označujemo tudi druge kvantile.



Za podatke v tabeli (Slika 72) poiščimo prvi kvartil.



Zanima nas, katera vrednost spremenljivke ustreza kvantilnemu rangju 0,25.

$P = 0,25$.

R_p izračunamo po formuli:

$$R_p = NP + 0,5 = 12 \times 0,25 + 0,5 = 3,5$$

R_p torej leži na intervalu med 3 in 4. Njima ustrežata vrednosti spremenljivke 21 in 45.

Izračunajmo še Y_p .

$$Y_p = Y_0 + (Y_1 - Y_0)(R_p - R_0) = 21 + (45 - 21)(3,5 - 3) = 33$$

Vrednost 33 je povprečje med 21 in 45.



V Excelu imamo za računanje kvartilov na voljo funkcijo QUARTILE.

Decil

Decili (D) so kvantili, ki razdelijo populacijo glede na število enot na deset enakih delov. Ustrezajo kvantilnim rangom $P = 0,1$; $P = 0,2$; $P = 0,3$... $P = 0,9$.

Označimo jih z D_1 , D_2 ... D_9 .

Centil

Centili (C) so kvantili, ki razdelijo populacijo glede na število enot na deset enakih delov. Ustrezajo kvantilnim rangom $P = 0,01$; $P = 0,02$... $P = 0,99$.

Označimo jih s C_1 , C_2 ... C_{99} .



Za podatke v tabeli (Slika 72), nas zanimajo vrednosti mediane, prvega kvartila, prvega decila in prvega centila.



Rešitev je na sliki (Slika 73).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Šifra učenca		U11	U3	U7	U2	U4	U6	U8	U10	U12	U9	U1	U5	
2	Doseženo število točk		17	18	21	45	45	52	56	71	73	75	96	96	
3	Rang R		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
4	Rang R _p	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12,5
5															
			Kv.												
6	Ime kvantila	rang	R _p	R ₀	R ₁	x ₀	x ₁	Kvantil	=F7+(G7-F7)*(C7-D7)						
7	Mediana	0,5	6,50	6	7	52	56	54							
8	Kvartil	0,25	3,50	3	4	21	45	33							
9	Decil	0,1	1,70	1	2	17	18	17,7							
10	Centil	0,01	0,62	0	1	0	17	10,54							

Slika 73: Primer izračuna kvantilov

Povezava med kvantili

Med kvantili veljajo naslednje enakosti: $Me = Q_2 = D_5 = C_{50}$

8.2.3 Računanje kvantilov in kvantilnih rangov iz frekvenčnih porazdelitev

Ranžirne vrste so primerne za prikaz majhnih populacij. Za velike populacije je urejanje v ranžirne vrste (ranžiranje) prezamudno. Zato za prikaz podatkov uporabimo frekvenčne porazdelitve.

Iz ranžirne vrste izračunamo natančne vrednosti kvantilov. Pri frekvenčni porazdelitvi pa ne poznamo dejanskih vrednosti, zato iz nje določimo približno vrednost kvantila za dani kvantilni rang.

Namesto absolutnega ranga uporabimo njegov približek. To je absolutna kumulativna frekvenca.

Računanje ranga in kvantilnega ranga za dano vrednost številske spremenljivke Y

Rang za dano vrednost spremenljivke Y označimo z R_Y , kvantilni rang pa s P_Y . Izračunamo ju na naslednji način.

1. V frekvenčni porazdelitvi poiščemo razred, v katerem leži dana vrednost Y. Ta razred imenujemo kvantilni razred. Njegovo spodnjo mejo označimo z Y_0 in zgornjo mejo z Y_1 . Velja:

$$Y_0 \leq Y < Y_1$$

2. Kumulativna absolutna frekvenca kvantilnega razreda pomeni število vseh enot, katerih vrednosti spremenljivke so pod Y_0 . Označimo jo s F_0 . Kumulativno absolutno frekvenco naslednjega višjega razreda označimo s F_1 . Vrednosti F_0 in F_1 uporabimo kot približka absolutnih rangov spremenljivk Y_0 in Y_1 . Označimo širino razreda z d in frekvenco s f_0 .

Na podlagi linearne interpolacije izračunamo dani vrednosti Y ustrezen približek za rang R_Y z obrazcem:

$$R_Y = F_0 + f_0 \frac{(Y - Y_0)}{d}$$

3. Izračunamo še kvantilni rang

$$P_Y = \frac{R_Y - 0,5}{N}$$

Računanje kvantilov iz frekvenčne porazdelitve

Pri danem kvantilnem rangju P izračunamo kvantil Y_P na naslednji način.

1. Izračunamo absolutni rang, ki ustreza kvantilnemu rangju P, po obrazcu:

$$R_P = NP + 0,5$$

2. Pogledamo, med katerima zaporednima kumulativnima frekvencama F_0 in F_1 leži izračunani rang R_P :

$$F_0 \leq R_P < F_1$$

3. Razred s kumulativno frekvenco F_0 je kvantilni razred z mejama Y_0 in Y_1 in z navadno absolutno frekvenco f_0 . Širina razreda je d . Za izračun kvantilnega ranga uporabimo obrazec:

$$Y_P = Y_0 + d \frac{(R_P - F_0)}{f_0}$$



Izračunajmo tretji kvartil ($P = 0,75$) za podatke na sliki (Slika 58).



$$R_P = NP + 0,5 = 152.541 \times 0,75 + 0,5 = 114.406,25$$

Izračunana vrednost leži med kumulativnima frekvencama 100.923 in 142.283. Meji razreda sta 2 in 9. Absolutna frekvenca razreda je 41.360.

$$Y_P = 2 + 7 \frac{(114.406,25 - 100.923)}{41.360} = 4,28$$

Izračunani podatek pokaže, da je vsako podjetje z več kot 4,28 zaposlenimi med 25% največjih podjetij po kriteriju število zaposlenih.

8.3 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

72. Podjetje ima prodajno mrežo 87 trgovin po Sloveniji. Slika 74 prikazuje podatke o prodaji v posamezni trgovini v Sloveniji. Oblikujte razrede širine 10 (razen prvega in zadnjega) glede na število prodanih artiklov. Izračunajte frekvence, relativne frekvence, kumulativne frekvence in narišite histogram.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Osrednja Slovenija					Štajerska			Primorska	
2	43	40	47	47	29	46	42	38	34	27
3	51	58	49	59	26	45	46	58	41	43
4	47	30	41	48	36	35	33	34	28	46
5	42	44	48	39	48	25	39	43	41	44
6	33	29	33	30		33	53	38	35	35
7	33	52	41	40		25	37	51	37	47
8	41	39	46	43		40	53		44	32
9	44	31	38	30		47	45		33	
10	52	33	53	36		43	35		29	
11	39	54	50	48		34	42		44	

Slika 74: Podatki o prodaji

73. V čem je prednost kvantilnega ranga pred rangom? Kaj je kvantil? Katere posebne kvantile poznamo in kaj je zanje značilno?
74. Podatke v tabeli (Slika 74) uredite v ranžirno vrsto in izračunajte rang vrednosti 29.
75. Za podatke na sliki (Slika 72) izračunajte tretji kvartil, peti decil in dvajseti centil.
76. Z izračunom na podatkih v tabeli (Slika 74) se prepričajte, da je $Me = Q_2 = D_5 = C_{50}$.
77. Na podatkih iz tabele (Slika 74) izračunajte, ali je trgovina, ki je prodala 42 izdelkov med 25 % najuspešnejših trgovin.
78. Koliko artiklov bi morala prodati trgovina, da bi se uvrstila med 10% najuspešnejših trgovin (Slika 74).

9 SREDNJE VREDNOSTI



Pogosto nas zanimajo tipične lastnosti populacije. Ugotoviti npr. želimo, kolikšna je povprečna višina šestletnika. Nadalje bi nas npr. zanimalo, vsaj koliko mora biti visok šestletnik, da ne zaostaja v rasti. Na podobna vprašanja bomo našli odgovore v tem poglavju.

Z izračuni srednjih vrednosti in mer variabilnosti želimo poiskati lastnosti populacije, ki nam pomagajo odkriti podobnosti v populaciji.

9.1 SREDNJE VREDNOSTI

Naša želja je najti podatek, s katerim bi čim boljše predstavili populacijo.

Srednja vrednost je parameter, ki naj bi karseda dobro predstavljal vrednosti vseh opazovanih enot. Srednjo vrednost skušamo določiti tako, da se večina opazovanih vrednosti ne razlikuje veliko od njihove srednje vrednosti. Zato jo imenujemo tudi tipična vrednost.

Najbolj znana srednja vrednost je navadno povprečje, ki ga zagotovo že poznamo. Vendar pa je srednjih vrednosti več.

Ker uvrščamo srednje vrednosti med najpomembnejše parametre, je potrebno glede na podatke presoditi, katera od srednjih vrednosti je tista, ki v danih razmerah najbolje predstavi obravnavano populacijo.

Največkrat uporabljamo:

- aritmetično sredino (M)
- in mediano (Me),

redkeje pa

- modus (Mo),
- harmonično sredino (H),
- in geometrijsko sredino (G).

Razen izraza sredina, uporabljamo tudi izraz **povprečje**.

9.1.1 Aritmetična sredina (M)

Aritmetično sredino uporabljamo najpogosteje in je tudi splošno znana srednja vrednost, ki jo tudi v vsakdanjem življenju pogosto računamo. **Izračunamo jo tako, da vsoto vrednosti spremenljivk Y_i , delimo s številom opazovanih enot N.** Obrazec za izračun je naslednji:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N}$$



Kolikšno povprečno plačo imajo Peter, Marko in Jana, če zaslužijo 1.200 €, 1.100 € in 2.800 €?



Vse tri plače seštejemo in delimo s 3. Dobimo 1.700 €.

Opazimo, da srednja vrednost na podatkih iz našega primera ne pove veliko. Razlog je v razpršenosti podatkov. Okoli srednje vrednosti naši podatki niso zgoščeni. Kasneje bomo spoznali še druge mere, ki nam bodo pomagale prikazati boljšo sliko o populaciji.

Izračun aritmetične sredine s funkcijo AVERAGE

V Excelu najenostavneje izračunamo povprečno vrednost s funkcijo AVERAGE.

AVERAGE(Argument1;Argument2; ...)

Argument1 argument je lahko število, naslov celice ali območje celic. Število argumentov se lahko giblje od 1 do 30. To ne pomeni, da ne moremo izračunati povprečne vrednosti več kot 30 podatkov. Izračunamo lahko povprečno vrednost velike količine podatkov, ki pa so razporejeni v največ 30 ločenih območij.



Poglejmo že znani primer 12 učencev in njihovih rezultatov na testu znanja. Izračunajmo aritmetično sredino doseženih točk. Postopek in rezultat si oglejmo na sliki (Slika 75).



V našem primeru imamo eno samo območje (en argument) in sicer B2:M2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Šifra učenca	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	U11	U12
2	Doseženo število točk	96	45	18	45	96	52	21	56	75	71	17	73
3													
4	Aritmetična sredina	55											

Slika 75: Aritmetična sredina



Za pravilno uporabo funkcije moramo vedeti, kako obravnava prazne celice. Če so v območju prazne celice, jih Excel v izračunu povprečja ne upošteva. Če pa so v celicah območja vrednosti 0, jih upošteva.

9.1.2 Tehtana aritmetična sredina



Voznik je od Grosuplja do Novega mesta vozil pol ure s hitrostjo 130 km/h, od Novega mesta do Črnomlja pa eno uro s hitrostjo 40 km/h. S kolikšno povprečno hitrostjo je vozil na celotni poti?



Ker je za dela poti porabil različno časa, povprečja ne moremo izračunati neposredno iz podatkov 130 km/h in 40 km/h. Uporabiti moramo uteži. V našem primeru sta uteži trajanji vožnje na opazovanih odsekih.

$$v = \frac{0,5 \cdot 130 + 1 \cdot 40}{0,5 + 1} = 70$$

Tehtano aritmetično sredino uporabimo, kadar je smiselno, da imajo vrednosti spremenljivke y_j ($j=1, 2 \dots N$) različen vpliv na izračun aritmetične sredine. Vsaka vrednost ima utež p_j ($j=1, 2 \dots N$). Če upoštevamo uteži, izračunamo aritmetično sredino po naslednji formuli:

$$M^* = \frac{\sum_{j=1}^N p_j y_j}{\sum_{j=1}^N p_j}$$

kjer je

- M* tehtana ali ponderirana aritmetična sredina,
- y_j vrednost spremenljivke (j=1, 2, ... N),
- p_j utež j-te spremenljivke,
- N število spremenljivk.

Tehtana aritmetična sredina iz frekvenčne porazdelitve

Tehtano ali ponderirano aritmetično sredino lahko izračunano tudi iz frekvenčne porazdelitve. V tem primeru so uteži ali ponderji frekvence f_j v posameznem razredu.

$$M^* = \frac{\sum_{j=1}^N f_j y_j}{\sum_{j=1}^N f_j}$$



Denimo, da bi v primeru prodaje določenega proizvoda v 87 trgovinah v Sloveniji, ki smo ga obravnavali v poglavju Frekvenčne porazdelitve, imeli na voljo le tabelo frekvenčne porazdelitve. Na podlagi podatkov iz tabele izračunajmo tehtano aritmetično sredino.



Rešitev in ustrezne formule so na sliki (Slika 76).

	A	B	C	D	E	F	G	H
	Število prodanih kosov	Število trgovin - frekvenca	Sredina razreda	y_jf_j				
1								
2	20							
3	25	2	22,5	45,0		=(A2+A3)/2		
4	30	9	27,5	247,5				
5	35	16	32,5	520,0		=B3*C3		
6	40	14	37,5	525,0				
7	45	20	42,5	850,0				
8	50	15	47,5	712,5				
9	55	8	52,5	420,0				
10	60	3	57,5	172,5				
11	Skupaj	87		3492,5		=sum(D3:D10)		
12	Tehtana aritmetična sredina			40,144		$\sum_{j=1}^k y_j f_j$		
13								
14						=sum(B3:B10)		
15						$\sum_{j=1}^k f_j$		
16								
17						=D11/B11		
18								

Slika 76: Tehtana aritmetična sredina iz frekvenčne porazdelitve

Tehtana aritmetična sredina je 40,144 (celica D12). Če bi izračunali dejansko aritmetično sredino iz prvotnih podatkov, bi dobili 40,69, kar pomeni, da je naša tehtana aritmetična sredina dokaj dober približek za dejansko aritmetično sredino.

9.1.3 Mediana

Mediana je srednja vrednost, od katere ima 50 % enot populacije manjše vrednosti in 50 % enot večje vrednosti.

Kako izračunati mediano in kaj pomeni, smo se naučili v poglavju *Kvantili s posebnimi imeni*.

Če mediano računamo brez Excela, imamo kar nekaj dela. Populacijo je treba razvrstiti v ranžirno vrsto in poiškati vrednost na sredini vrste. Če je v vrsti liho število členov, je mediana vrednost, ki je točno na sredini. Če imamo sodo število členov, izračunamo aritmetično sredino srednjih dveh členov.



Imamo sodo (parno) število podatkov, ki so že urejeni v ranžirno vrsto: 1, 3, 7, 10.



Ker so podatki štirje (to je sodo število), je mediana aritmetična sredina srednjih dveh členov po rangu: $(3 + 7)/2 = 5$



Imamo liho število podatkov, ki so že urejeni v ranžirno vrsto: 1, 3, 5, 10, 17.



Ker je podatkov liho mnogo, je mediana podatek, ki je točno na sredini ranžirne vrste. V našem primeru je to 5.

Izračun mediane s funkcijo MEDIAN

Najenostavneje mediano izračunamo s pomočjo Excelove funkcije MEDIAN.

MEDIAN(Argument1;Argument2; ...)

Argument1 argument je lahko število, naslov celice ali območje celic. Število argumentov se lahko giblje od 1 do 30.

Podobno kot pri funkciji AVERAGE, tudi funkcija MEDIAN praznih celic ne upošteva, upošteva pa celice z vrednostjo 0.



Poiščimo mediano učnih rezultatov naših učencev.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Šifra učenca	U11	U3	U7	U4	U2	U6	U8	U10	U12	U9	U1	U5
2	Doseženo število točk	17	18	21	45	45	52	56	71	73	75	96	96
3													
4	Mediana	54											

Slika 77: Mediana



Podatkov za Excel ni potrebno urediti v ranžirno vrsto. V primeru (Slika 77) smo jih, da bi lažje preverili rezultat. Na sredini ranžirne vrste sta dva učenca, od katerih ima 5 učencev boljši in 5 slabši rezultat. Mediana je povprečje njunih rezultatov.

V primeru, da je v ranžirni vrsti liho število členov, je na sredini natanko eden. Vrednost tega je mediana.

9.1.4 Modus

Modus je vrednost, ki se najpogosteje pojavlja med opazovanimi vrednostmi. To je torej vrednost z največjo frekvenco. V Excelu jo izračunamo s funkcijo MODE, ki ima enako sintakso in argumente, kot jo imata funkciji AVERAGE in MEDIAN.



Modus naslednjih podatkov: 2, 17, 3, 2, 15, 1, 2, 15 je 2, saj se vrednost 2 pojavi največkrat.

Modusov je na danih podatkih lahko več (npr. dva, če dva podatka nastopata največkrat in enako mnogokrat), ali pa ne obstaja niti eden (če so vsi podatki različni).



Modus je primerna srednja vrednost tudi za opisne spremenljivke. Aritmetično sredino in mediano pa lahko izračunamo le za številske spremenljivke.

9.1.5 Harmonična sredina



Harmonično sredino bomo razložili na preprostem primeru. Delavec A naredi v 8 urah 48 enot nekega proizvoda, delavec B 80 enot, delavec C pa 96 enot. Kolikšen je povprečni čas za izdelavo ene enote proizvoda?



Vsi delavci skupaj v 8 urah proizvedejo 224 enot.

Hitro lahko izračunamo, da potrebuje delavec A za izdelavo ene enote 10 minut ($8 \cdot 60 / 48$), delavec B 6 minut ($8 \cdot 60 / 80$) in delavec C 5 minut. Če bi iz teh podatkov izračunali navadno povprečje, bi dobili povprečni čas izdelave enega proizvoda 7 minut ($((10+6+5)/3)$). Vendar to ni pravi povprečni čas. Naredimo kontrolo. Če bi bil 7 minut pravi povprečni čas, bi en delavec v povprečju na dan naredil 68,57 proizvoda ($8 \times 60 / 7$), vsi trije pa trikrat več oz. 205,71, kar pa ni enako 224.

Zato moramo v takšnih primerih uporabiti harmonično sredino, ki se izračuna kot recipročna vrednost aritmetične sredine izračunane iz recipročnih vrednosti spremenljivk.

$$H = \frac{N}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{y_j}}$$

V našem primeru je $H = \frac{3}{\frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}} = 6,4286$

Povprečni čas za izdelavo ene enote proizvoda je 6,4286 minute.

Če sedaj naredimo kontrolo, dobimo povprečno proizvodnjo enega delavca 74,666 proizvodov ($8 \cdot 60 / 6,4286$), vseh treh pa trikrat več oz. 224.

Harmonično sredino uporabimo za računanje srednjih vrednosti koeficientov. Npr., kadar imamo podatke, kot so število izdelkov na uro, hitrost (km/h), gostota (kg/m^3).

Izračun harmonične sredine s funkcijo HARMEAN

V Excelu harmonično sredino izračunamo s funkcijo HARMEAN.

HARMEAN(Argument1; Argument2; ...)

Argument1 ... argument je lahko število, naslov celice ali območje celic. Število argumentov se lahko giblje od 1 do 30.



Harmonične sredine ne moremo izračunati, če je eden ali več podatkov enak 0. V tem primeru funkcija HARMEAN vrne napako #ŠTEV! (#NUM!).

9.1.6 Geometrijska sredina

Geometrijsko sredino uporabljamo pri računanju srednjih vrednosti iz verižnih indeksov in stopenj.



Če nas npr. zanima, kolikšna je bila povprečna rast življenjskih stroškov v zadnjih petih letih in imamo podane ustrezne letne stopnje (v %), njihovo povprečno vrednost izračunamo s pomočjo geometrijskega zaporedja.

Geometrijska sredina se računa po obrazcu:

$$G = \sqrt[N]{y_1 y_2 \cdots y_N}$$

Vrednosti spremenljivke med seboj pomnožimo in nato izračunamo N-ti koren iz dobljenega produkta. Enakovreden zapis te formule je s pomočjo eksponenta. Tako obliko formule potrebujemo, če uporabljamo kalkulator.

$$G = (y_1 y_2 \cdots y_N)^{\frac{1}{N}}$$



V treh zaporednih mesecih so bila denarna sredstva obrestovana z naslednjimi obrestnimi merami: 3,1 %; 2,8 % in 4,9 %. Kolikšna je bila povprečna obrestna mera?



Uporabimo geometrijsko sredino. Izračunamo produkt obrestnih mer in njegov tretji koren. Dobimo: 3,49%.

V praksi je korenjenje velikih števil precej zapleteno opravilo. Zato si raje pomagamo z Excelom.

Izračun geometrijske sredine s funkcijo GEOMEAN

V Excelu jo izračunamo s funkcijo GEOMEAN.

GEOMEAN(Argument1; Argument2;...)

Argument1 ... argument je lahko število, naslov celice ali območje celic. Število argumentov se lahko giblje od 1 do 30.



Geometrijske sredine ne moremo izračunati, če je eden ali več podatkov enak ali manjši od 0. V tem primeru funkcija GEOMEAN vrne napako #ŠTEV! (#NUM!).



Izračunajmo geometrijsko sredino verižnega indeksa števila tečajnikov v neki jezikovni šoli.



V tabeli na sliki (Slika 78) so podatki (stolpca A in B) in verižni indeks (stolpec C). S funkcijo GEOMEAN izračunamo geometrijsko sredino verižnih indeksov.

V kontrolnem stolpcu smo želeli prikazati, da do leta 2010 ob letni rasti 1,1 % letno (celica C13) število tečajnikov res naraste na 4590. S 100 smo delili, ker je indeks stokratnik razmerja med podatkom.

Če bi uporabili navadno povprečje indeksov (=AVERAGE(C3:C11)=101,34), bi v kontrolnem stolpcu dobili za leto 2010 napačen rezultat (4686 tečajnikov).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Leto	Število udeležencev	Verižni indeks		Kontrolni stolpec		
2	2001	4.158			4.158		
3	2002	4.529	108,92		4.204	=E2*\$C\$13/100	
4	2003	4.833	106,71		4.250		
5	2004	4.738	98,03		4.297		
6	2005	4.030	85,06		4.345		
7	2006	4.153	103,05		4.393		
8	2007	4.121	99,23		4.441		
9	2008	4.205	102,04		4.490		
10	2009	4.459	106,04		4.540		
11	2010	4.590	102,94		4.590		
12							
13	Geometrijska sredina		101,10		=GEOMEAN(C3:C11)		
14							

Slika 78: Geometrijska sredina

9.2 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

79. Imamo podatke o številu avtomobilov v 10 družinah: 1, 2, 2, 1, 0, 3, 2, 2, 1, 2. Izračunajte aritmetično sredino in mediano. Zakaj harmonične in geometrijske sredine ne moremo izračunati?

Rešitev: 2; 1,6; 2

80. Vlaku je vozil iz kraja A v kraj B 15 minut s hitrostjo 80 km/h, iz kraja B v kraj C 10 minut s hitrostjo 60 km/h, iz kraja C v kraj D pa 30 minut s hitrostjo 70 km/h. S kolikšno povprečno hitrostjo je vozil na celotni poti?

Rešitev: 70,91 km/h.

81. Iz podatkov o prometu podjetja v zaporednih petih letih smo dobili naslednje indekse: 101, 120, 90, 96, 102. Izračunajte ustrezno srednjo vrednost.

Rešitev: 101,33

10 MERE VARIABILNOSTI IN VERJETNOSTNE PORAZDELITVE

Na nekaj primerih smo ugotovili, da srednje vrednosti podatkov ne opišejo dovolj dobro. Kadar so med njimi velike razlike (pravimo, da močno variirajo), potrebujemo še druge mere za ugotavljanje lastnosti populacije.

V tem poglavju bomo spoznali mere variabilnosti, verjetnostne porazdelitve ter mere asimetrije in sploščenosti, s čimer bomo izvedeli več o skupnih lastnostih populacije.

10.1 MERE VARIABILNOSTI



Če opazujemo višino plač v podjetjih, nam podatek o povprečni plači ne pove dovolj. Potrebujemo še druge količine, kot so na primer najmanjša in največja plača oz. razlika med največjo in najmanjšo plačo, razpršenost plač okrog povprečne plače in morda še kaj. Pri kakovosti proizvodov je podatek o povprečni življenjski dobi proizvoda zanimiv, a bolj kot povprečje je koristen in pomemben podatek, ki pove, koliko se proizvodi razlikujejo med seboj po življenjski dobi. Takšen podatek pa iz srednjih vrednosti ni razviden.

Zaradi vzrokov, ki smo jih našli, analize dopolnimo z merami variabilnosti. **Mere variabilnosti so parametri, s katerimi analiziramo spremenljivost pri številskih spremenljivkah.** Razdelili jih bomo na razmike in odklone.

Najpomembnejši meri variabilnosti sta varianca in standardni odklon.

10.1.1 Razmiki

Variacijski razmik

Variacijski razmik (VR) je najenostavnejša mera variabilnosti. Izračunamo ga kot razliko med največjo in najmanjšo vrednostjo.

$$VR = y_{\max} - y_{\min}$$



V nekem podjetju je najnižja plača 700 €, najvišja pa 3.700 €. Variacijski razmik je njuna razlika, se pravi 3.000 €.

Vendar pa variacijski razmik prav nič ne pove o variiranju podatkov.

Kvantilni razmiki

To so razmiki med zgornjim in spodnjim kvantilom.

Kvartilni razmik izračunamo po formuli $Q_3 - Q_1$.

Decilni razmik izračunamo po formuli $D_9 - D_1$.

Računanje kvantilnih razmikov je smiselno samo pri sorazmerno velikem številu podatkov.

10.1.2 Varianca

Varianca je poleg aritmetične sredine eden temeljnih parametrov v statistični analizi. Pri njenem izračunu upoštevamo vse opazovane vrednosti proučevane številske spremenljivke.

Vrednost spremenljivke y variira od enote do enote, zato lahko različnost med enotami merimo z razlikami med vrednostjo enote y_j in kako srednjo vrednostjo.

Varianco ugotavljamo tako, da računamo **kvadrate razlik** od srednje vrednosti $(y_j - M)^2$, jih seštejemo ter delimo s številom opazovanih enot. Varianco označimo kot sigma na kvadrat in izračunamo po obrazcu:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - M)^2}{N}$$

Varianca (populacije) je povprečje kvadratov odklonov vrednosti številske spremenljivke od aritmetične sredine.



V vzorcu je 5 delavcev. Njihova oddaljenost od delovnega mesta je v km: 1; 2; 2,5; 3 in 3,2. Izračunajmo varianco.



Najprej izračunamo aritmetično sredino M . To je 2,34.

Tabela 10: Izračun absolutnih odklonov in njihovih kvadratov

ODKLONI	KVADRATI ODKLONOV
$1 - 2,34 = -1,34$	$-1,34^2 = 1,80$
$2 - 2,34 = -0,34$	0,12
$2,5 - 2,34 = 0,16$	0,03
$3 - 2,34 = 0,66$	0,44
$3,2 - 2,34 = 0,86$	0,74

Vse vrednosti smo izračunali na dve decimalni mesti natančno.

Vrednosti vstavimo v obrazec za varianco. To pomeni, da seštejemo kvadrate odklonov in jih delimo s 5. Dobimo rezultat 0,63.

Računanje variance s funkcijo VARP

Varianco populacije najhitreje izračunamo s pomočjo Excelove funkcije VARP, ki ima vgrajeno prej zapisano formulo za varianco.

VARP(Argument1;Argument2;...)

Argument1 ... argument je lahko število, naslov celice ali območje celic. Število argumentov se lahko giblje od 1 do 30.

Podobno kot AVERAGE, tudi funkcija VARP⁹ praznih celic ne upošteva kot podatek, upošteva pa celice z vrednostjo 0.



V vzorcu je 5 delavcev. Njihova oddaljenost od delovnega mesta je v km: 1; 2; 2,5; 3 in 3,2. Izračunajmo varianco še s funkcijo VARP.

⁹ V MS Excelu 2010 se funkcija imenuje VAR.P



Če na istih podatkih uporabimo funkcijo VARP, dobimo nekoliko bolj natančen rezultat. Delni rezultati iz tabele (Tabela 10) so namreč zaokroženi na dve decimalni mesti, kar povzroči zaokrožitveno napako pri izračunu variance.

Rešitev je na sliki (Slika 79).

	A	B	C	D
1		Oddaljenosti v km		
2		1		
3		2		
4		2,5		
5		3		
6		3,2		
7				
8	Aritmetična sredina	2,34	=VARP(B2:B6)	
9	Varianca	0,62		

Slika 79: Izračun variance s funkcijo VARP



Excelova funkcija VAR izračuna varianco vzorca in ima vgrajeno drugačno formulo, funkcija VARP pa izračuna varianco populacije.

10.1.3 Standardni odklon

Varianco je težko razložiti z vidika opazovanega pojava. Zato raje izračunamo kvadratni koren variance:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Parameter σ imenujemo **standardni odklon**. Izražen je v istih merskih enotah kot proučevana spremenljivka, **predstavlja pa mero razpršenosti spremenljivk okoli aritmetične sredine**. Večji kot je standardni odklon, bolj so podatki razpršeni, manjši kot je standardni odklon, bolj so podatki zgoščeni okrog aritmetične sredine.



V vzorcu je 5 delavcev. Njihova oddaljenost od delovnega mesta je v km: 1; 2; 2,5; 3 in 3,2. Varianco poznamo in vemo, da je 0,62. Izračunajmo standardni odklon.



Standardni odklon je kvadratni koren variance. Po korenjenju dobimo naslednji rezultat: 0,79.

Računanje standardnega odklona s funkcijo STDEVP

Najenostavneje standardni odklon izračunamo s pomočjo Excelove funkcije STDEVP.

STDEVP(Argument1;Argument2;...)

Argument1 ... argument je lahko število, naslov celice ali območje celic. Število argumentov se lahko giblje od 1 do 30.

Podobno kot AVERAGE, tudi funkcija STDEVP¹⁰ praznih celic ne upošteva kot podatek, upošteva pa celice z vrednostjo 0.



Izračunajmo aritmetično sredino in standardni odklon za podatke iz druge vrstice tabele, ki je na sliki (Slika 80).



Rešitev in postopek imamo na sliki (Slika 80).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Leto	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
2	Število udeležencev	4852	4158	4629	4590	3912	4154	3868	3267	2875	2975	3012
3												
4	Povprečno število udeležencev v opazovanem obdobju						3.844,7					
5	Standardni odklon						681,44					
6												

Slika 80: Primer izračuna aritmetične sredine in standardnega odklona



Excelova funkcija STDEV izračuna standardni odklon vzorca (in ima vgrajeno drugačno formulo), funkcija STDEVP pa standardni odklon populacije.

10.1.4 Koefficient variabilnosti

Absolutne mere variabilnosti (razmiki, odkloni) lahko primerjamo med seboj le za istovrstne podatke.



Če bi npr. ugotovili, da je bil v nekem časovnem trenutku standardni odklon pri cenah pomaranč v Sloveniji 1 €, pri cenah neke znamke avtomobila pa tudi 1 €, nam primerjava teh dveh podatkov ne pove veliko. Pomaranče so, v primerjavi z avtomobili, izjemno poceni, zato je izračunani standardni odklon 1 € najbrž velik, pri avtomobilih pa zanemarljivo majhen.

Zaradi takšnih razlogov potrebujemo še relativne mere variabilnosti.

Koefficient variabilnosti (KV) je najpogosteje uporabljena **relativna** mera variabilnosti. Odraža razmerje med izračunanim standardnim odklonom in aritmetično sredino. Izračunamo ga takole:

$$KV = \frac{\sigma}{M}$$

Koefficient variabilnosti torej pove, kolikšen del aritmetične sredine predstavlja standardni odklon. Pogosto ga izrazimo v % zapisu.

Če je KV večji kot 0,2 oz. večji kot 20 %, govorimo o velikih razlikah med enotami.



Sto študentov je pisalo izpit ter doseglo naslednje rezultate (Slika 81).

¹⁰ V MS Excelu 2010 se funkcija imenuje STDEV.P.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	7	7	8	9	7	8	5	6	8	7
2	5	8	5	7	9	10	9	7	7	4
3	5	6	3	9	6	2	7	5	8	3
4	7	8	2	6	6	9	1	7	8	2
5	4	4	5	5	4	3	9	2	3	9
6	5	9	7	10	6	9	1	2	10	6
7	1	2	8	6	5	3	8	10	9	7
8	4	8	3	1	3	6	8	1	4	10
9	5	4	1	2	6	7	9	8	7	4
10	8	2	6	3	3	5	6	1	9	6
11										
12	Ocena	Frekvenca		Aritmetična sredina		5,75				
13	1	7		Standardni odklon		2,60				
14	2	8		Modus		7				
15	3	9		Mediana		6				
16	4	8								
17	5	11								
18	6	13								
19	7	14								
20	8	13								
21	9	12								
22	10	5								
23		100								

Slika 81: Rezultati izpita



Koeficient variabilnosti izračunamo tako, da standardni odklon σ delimo z aritmetično sredino M in dobimo 0,45. Če ga izrazimo v %, dobimo 45 %. Rezultat kaže, da so razlike med enotami velike.

10.2 VERJETNOSTNE PORAZDELITVE

Omenili smo, da so spremenljivke lahko zvezne ali diskretne. Zvezne so tiste, katerih vrednost je lahko poljubno decimalno število.

Slučajna spremenljivka je vrednost, ki nastopi kot rezultat poskusa oz. dogodka, kjer je možnih več izidov. Pri tem je pojavitev katerekoli vrednosti iz danega območja povsem slučajna. Taki dogodki so npr. met igralne kocke, kjer lahko dobimo 6 izidov (1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik); žrebanje loto števil in druga poštna žrebanja.

V vsakdanjem življenju so številne zvezne slučajne spremenljivke *porazdeljene* »normalno«, kot npr. inteligenca, telesna višina in teža. Zelo pogosto pa so »normalno« porazdeljeni tudi socialno ekonomski pojavi.

Najprej pojasnimo pojma verjetnost in verjetnostna porazdelitev, nato še normalno porazdelitev, ki je poseben in v vsakdanjem življenju pogost primer verjetnostne porazdelitve.

10.2.1 Verjetnost in verjetnostne porazdelitve

Verjetnost je število med 0 in 1, ki nam pove, kolikšna je možnost, da se zgodi nek dogodek. Število 0 pomeni nemogoč dogodek. Število 1 pomeni gotov (100 % zanesljiv) dogodek.



Smrt je za posameznika gotov dogodek (verjetnost je 1). Milijonski zadetek na lotu ima za posameznika verjetnost večjo kot 0, a ne prav velike.



Če mečemo igralno kocko, je verjetnost, da pade 1 enaka $1/6$. Verjetnost $1/6$ je enaka za vseh šest možnosti na kocki. Če bi kocko zelo dolgo metali (npr. 100.000 krat) bi približno enako mnogokrat vrgli vseh šest možnosti, razen če kocka ni poštena (če npr. njeno težišče ni na sredini).

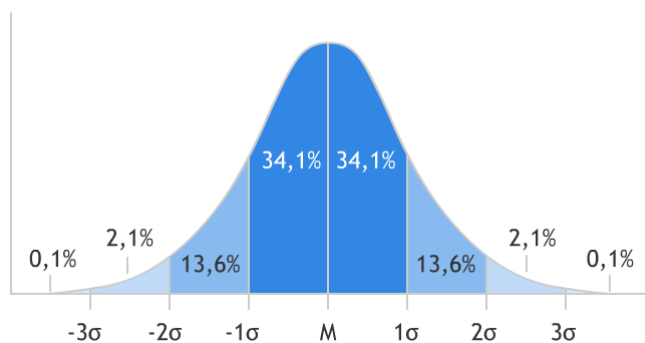
Verjetnostna porazdelitev opisuje območje, ki ga slučajna spremenljivka lahko zavzame, in verjetnost, da je vrednost spremenljivke v tem območju.



Met igralne kocke je primer **enakomerne porazdelitve**, saj ima vseh šest izidov enako možnost.

10.2.2 Normalna porazdelitev

Normalno porazdelitev si najlažje predstavljamo s pomočjo slike (Slika 82), kjer M označuje aritmetično sredino, σ pa standardni odklon.



Slika 82: Primer normalne porazdelitve podatkov



Omenili smo, da je inteligenca ljudi primer normalne porazdelitve. To pomeni, da je v populaciji ljudi zelo malo nadpovprečno in podpovprečno inteligentnih (obojih pa približno enako), velika večina oseb pa je v razponu povprečno inteligentnih. Podrobnosti najlažje pojasnimo z naslednjim, konkretnim primerom.

Izberemo veliko, naključno skupino oseb. Pomembno je, da je izbor slučajen. (Če bi skupino za poskus npr. izbrali v raziskovalni ustanovi, podpovprečno inteligentnih zelo verjetno ne bi zajeli.) Vsakemu posamezniku izmerimo inteligenčni količnik, ki je merilo inteligentnosti. Nato izračunamo frekvence dobljenih vrednosti inteligenčnega količnika in jih označimo na grafu. Ugotovimo, da frekvence naraščajo od leve proti srednji vrednosti, od sredine proti desni pa padajo. Če skozi dobljene točke na grafu narišemo krivuljo, ima le-ta obliko, ki jo vidimo na sliki (Slika 82).

Krivulja (Slika 82) ima obliko simetričnega zvonca. Imenujemo jo normalna ali Gaussova¹¹ krivulja. Normalno porazdelitev imenujemo tudi Gaussova porazdelitev.

Normalna porazdelitev slučajne spremenljivke Y je določena z dvema parametroma:

- z aritmetično sredino M , okrog katere se gostijo vrednosti spremenljivke, in

¹¹ Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) je bil nemški matematik

- s standardnim odklonom σ , ki meri razlike posameznih vrednosti od aritmetične sredine.

Za normalno porazdelitev veljajo naslednje značilnosti:

- Je unimodalna, kar pomeni, da ima en sam vrh.
- Je simetrična, kar pomeni, da je vrh na sredini porazdelitve in je polovica enot na levi strani, polovica enot pa na desni.
- Aritmetična sredina je enaka mediani in modusu.
- Asimptotično se približuje abscisni osi (os x).
- Njena površina je 1, pri čemer je polovica le-te, zaradi simetričnosti, levo, polovica pa desno od aritmetične sredine.
- Na intervalu:
 - $M \pm \sigma$ je približno 68,3 % vseh vrednosti,
 - $M \pm 2\sigma$ je približno 95,5 % vseh vrednosti,
 - $M \pm 3\sigma$ je približno 99,7 % vseh vrednosti.

Ali je neka porazdelitev podatkov normalna ali ne, lahko vidimo na podlagi grafikona. Obstajajo pa tudi statistični testi, s katerimi ugotovljamo, ali so podatki normalno porazdeljeni.

10.3 MERE ASIMETRIJE IN SPLOŠČENOSTI

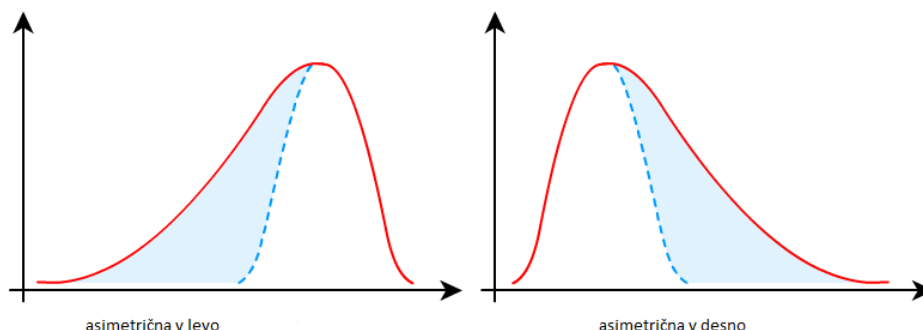
V zvezi z verjetnostnimi porazdelitvami nas zanima še asimetričnost ter sploščenost porazdelitve glede na normalno porazdelitev.

10.3.1 Koeficient asimetrije

Normalna porazdelitev je simetrična. Vendar pa vse porazdelitve podatkov v praksi niso niti normalne niti simetrične. Poglejmo primera na sliki (Slika 83).

Za posamezne porazdelitve so značilni odnosi med sredinami:

- simetrična porazdelitev: $M = Me = Mo$;
- asimetrična v desno: $Mo < Me < M$;
- asimetrična v levo: $M < Me < Mo$.



Slika 83: Asimetrični porazdelitvi

Koeficient asimetrije (KA) kaže smer in jakost asimetrije. Računamo ga na osnovi razlik med sredinami: na osnovi razlike med aritmetično sredino in modusom ali na osnovi razlike med aritmetično sredino in mediano.

Koeficient asimetrije na osnovi mediane izračunamo po naslednjem obrazcu:

$$KA_{Me} = \frac{3(M - Me)}{\sigma}$$

Koeficient asimetrije na osnovi modusa izračunamo po naslednjem obrazcu:

$$KA_{Mo} = \frac{M - Mo}{\sigma}$$

Smer asimetrije določa predznak koeficienta asimetrije KA.

- Če je $KA > 0$, je porazdelitev asimetrična v desno.
- Če je $KA < 0$, je porazdelitev asimetrična v levo.
- Če je $KA = 0$, je porazdelitev simetrična.

Jakost asimetrije ima vrednosti na intervalu $(-3, 3)$.

- Če je KA blizu 3, je asimetrija močna.
- Če je KA blizu 0, je asimetrija šibka.
- Če je KA okrog 0,5, je asimetrija srednje močna.



Oglejmo si spet rezultate izpita (Slika 81). Iz tabele (območje A1 do J10) izračunamo standardni odklon: $\sigma = 2,60$; aritmetično sredino: $M = 5,75$; mediano: $Me = 6$ in modus: $Mo = 7$.



Opazimo, da med srednjimi vrednostmi velja relacija: $M < Me < Mo$. To pomeni, da je naša porazdelitev podatkov asimetrična v levo.

Vrednosti vstavimo v zgornja obrazca.

$$KA_{Me} = \frac{3(5,75 - 6)}{2,60} = -0,29$$

$$KA_{Mo} = \frac{5,75 - 7}{2,60} = -0,48$$

Izračunana koeficienta sta negativna, kar pomeni, da je porazdelitev asimetrična v levo.

Asimetrija je srednje močna.

10.3.2 Koeficient sploščenosti

Koeficient sploščenosti izračunamo na osnovi kvantilnih razmikov po naslednjem obrazcu:

$$KS = \frac{1,9 \cdot (Q_3 - Q_1)}{(D_9 - D_1)}$$

Pomen izračunanih vrednosti:

- Če je $KS = 1$, je porazdelitev normalna.
- Če je $KS > 1$, je porazdelitev sploščena.
- Če je $KS < 1$, je porazdelitev koničasta.



Oglejmo si spet rezultate izpita (Slika 81). Izračunajmo koeficient sploščenosti.



Rezultat je na sliki (Slika 84). Vrednost $KS = 1,09$ pove, da je porazdelitev rahlo sploščena.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	7	7	8	9	7	8	5	6	8	7
2	5	8	5	7	9	10	9	7	7	4
3	5	6	3	9	6	2	7	5	8	3
4	7	8	2	6	6	9	1	7	8	2
5	4	4	5	5	4	3	9	2	3	9
6	5	9	7	10	6	9	1	2	10	6
7	1	2	8	6	5	3	8	10	9	7
8	4	8	3	1	3	6	8	1	4	10
9	5	4	1	2	6	7	9	8	7	4
10	8	2	6	3	3	5	6	1	9	6
11										
12	Ocena	Frekvenc	Kum. fr.		Aritmetična sredina	5,75			Q_3	8
13	1	7	7		Standardni odklon	2,60			Q_1	4
14	2	8	15		Modus	7			D_9	9
15	3	9	24		Mediana	6			D_1	2
16	4	8	32							
17	5	11	43		KV	0,45	$=F13/F12$		KS	1,09
18	6	13	56		KA_{Me}	-0,29	$=3*(F12-F15)/F13$			
19	7	14	70		KA_{Mo}	-0,48	$=(F12-F14)/F13$		$=1,9*(I12-I13)/(I14-I15)$	
20	8	13	83							
21	9	12	95							
22	10	5	100							
23		100								

Slika 84: Izračun mer asimetrije in sploščenosti

10.4 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

82. Izračunajte varianco in standardni odklon naslednjih podatkov: 1, 2, 2, 1, 0, 3, 2, 2, 1, 2.

Rešitev: 0,64; 0,8

83. V nekem podjetju s šestimi zaposlenimi so v prejšnjem mesecu izplačali naslednje plače: 1200 €, 1400 €, 1500 €, 1700 €, 1900 € in 2900 €. Izračunajte variacijski razmik, aritmetično sredino in standardni odklon.

Rešitev: 1.700 €, 1.766,67 €, 552,77 €.

84. Izračunajte kvartilni in decilni razmik za podatke v tabeli (Slika 74).

85. Z izračunom dokažite, da so kvartili in decili na sliki (Slika 84) izračunani pravilno.

86. Kaj je značilno za normalno porazdelitev podatkov?

87. Naštejte primere iz vsakdanjega življenja, kjer menite, da so vrednosti normalno porazdeljene.

88. Ali frekvenčna porazdelitev podatkov v tabeli (Slika 58) kaže na normalno porazdelitev podatkov?

11 ANALIZA ČASOVNIH VRST

Časovne vrste dobimo, če nek pojav opazujemo v enakomernih časovnih presledkih. Ti časovni presledki so glede na pomembnost lahko ure, dnevi, tedni, meseci, četrletja, leta ali celo desetletja in več.



Če želimo proučevati porabo vode v nekem predelu mesta v okviru enega dne, bomo izbrali kratek interval, morda 15 minut. Pri merjenju prodaje izdelka bo dovolj dan ali teden, pri opazovanju uspešnosti podjetja pa četrletje.

Z analizo časovnih vrst odkrivamo lastnosti spreminjanja pojavov v preteklosti in na podlagi odkritih lastnosti ali vzorcev napovedujemo, kaj bi se utegnilo zgoditi v prihodnosti. Napovedovanje prihodnosti je sicer zelo negotovo, s pravimi statističnimi metodami pa se vseeno lahko približamo sprejemljivim ocenam. Kratkoročne napovedi so seveda natančnejše kot dolgoročne, prav tako pa so natančnejše napovedi tistih pojavov, ki imajo manjša nihanja. Vremenoslovci recimo veliko lažje napovedujejo, kaj se bo v prihodnih desetletjih dogajalo s povprečno letno temperaturo v nekem kraju (ker se z leti ne spreminja veliko), medtem ko borzniki zelo težko napovedujejo ceno neke delnice za mesec naprej, saj se le-ta praviloma zelo hitro spreminja.

Statistične metode za proučevanje časovnih vrst so zelo različne. Spoznali bomo nekatere preprostejše.

11.1 GLAJENJE

Glajenje podatkov je tehnika, ki jo uporabljamo za »odstranjevanje«
slučajnih nihanj časovne vrste. Tako dobimo bolj jasen pogled na obnašanje pojava. V nekaterih časovnih vrstah so sezonski vplivi tako močni, da je brez glajenja težko razumeti opazovani pojav.



Vrednost neke delnice se na borzi neprestano spreminja. Če narišemo graf delnice za daljše časovno obdobje, opazimo nihanja in globalne trende, kaj se je z delnico dogajalo. Ta nihanja želimo zgladiti, da bi bil trend bolj jasen in graf preglednejši.

Najbolj pogost in enostaven način glajenja je navadno pomično (ali drseče) povprečje. Za vsako spremenljivko Y_j v časovni vrsti se izračuna kot povprečna vrednost n najbližjih (časovno zadnjih) vrednosti,

$$M_j = \frac{\sum_{i=j-n}^j Y_i}{n},$$

pri čemer n izberemo sami, glede na opazovani pojav.



Pomen in postopek izračuna pomičnega povprečja si oglejmo na primeru enotnega tečaja delnic podjetja Krka d.d. Najprej si oglejmo tečaje od 3.1.2007 do 18. 9.2008. Za n izberimo 20.



Na sliki (Slika 85) je izsek iz tabele in grafikona, ki ponazarja tečaje in zglajene tečaje.

Vidimo, da se je tečaj v letu spreminjal v treh večjih valovih, ki jih bolj izrazito kot sami tečaji, prikaže pomično povprečje. Iz grafikona se da tudi razbrati, da se ob vrhu ali dolini

pomičnega povprečja, spremeni tudi smer gibanja tečajev. Na tak način lahko predvidimo, kaj se bo dogajalo s tečajem v naslednjih tednih ali mesecih. Tako bi lahko sklepali, da bodo tečaji še nekaj časa padali.

Za dolgoročnejše napovedi izberemo za n večjo vrednost. Borzni analitiki tako na primer uporabljajo 200 dnevno pomično povprečje za napovedovanje globalnih sprememb smeri tečajev vrednostnih papirjev ali indeksov.



Slika 85: Tečaj delnice Krka (www.ljse.si, 16. 3.2008)

11.2 TREND

Trend je smer razvoja nekega pojava. Je posledica učinkovanja dejavnikov, ki delujejo na dolgi rok in povzročajo tendence padanja ali naraščanja. Predstavimo ga z neko funkcijo (npr. linearno, kvadratno, eksponentno).

Več kot imamo podatkov v časovni vrsti, bolj zanesljiva je napoved prihodnosti s pomočjo trenda.

11.2.1 Linearni trend

Najpogosteje trend obravnavamo kot linearno funkcijo časa, ki se najbolj 'prilega' dejanskim vrednostim spremenljivk.

$$y = \alpha + \beta x$$

Enakovreden zapis je

$$T(x) = \alpha + \beta x$$

Izračun po metodi najmanjših kvadratov

Izračun linearnega trenda naredimo po metodi najmanjših kvadratov. Podatki x predstavljajo čas. Namesto dejanskih vrednosti, ki so lahko npr. zaporedna leta, uporabimo spremenljivko $t = 1, 2 \dots N$.

$$T(t) = \alpha + \beta t$$

Konstanti α in β izračunamo iz sistema linearnih enačb:

$$\sum_{t=1}^N Y_t = \alpha N + \beta \sum_{t=1}^N x_t$$

$$\sum_{t=1}^N Y_t \cdot x_t = \alpha \sum_{t=1}^N x_t + \beta \sum_{t=1}^N x_t^2$$



Za zaporedna leta imamo naslednje podatke o številu zaposlenih v nekem podjetju: 3, 5, 7, 9 in 11. Izračunajmo linearni trend števila zaposlenih po metodi najmanjših kvadratov in s tem predvidimo število zaposlenih v naslednjem letu.



Za čas (x_t) vzamemo vrednosti 1, 2 ... 5. $N = 5$.

Vrednosti Y predstavljajo število zaposlenih v obravnavanem časovnem obdobju.

$$\sum_{j=1}^5 Y_j = 35$$

$$\alpha N + \beta \sum_{j=1}^5 t_j = 5\alpha + 15\beta$$

Prva enačba je torej: $5\alpha + 15\beta = 35$

$$\sum_{j=1}^5 Y_j \cdot t_j = 125$$

$$\alpha \sum_{j=1}^5 t_j + \beta \sum_{j=1}^5 t_j^2 = 15\alpha + 55\beta$$

Druga enačba je torej: $15\alpha + 55\beta = 125$

Imamo sistem dveh linearnih enačb, iz katerih z znanjem srednješolske matematike izračunamo vrednosti za α in β .

Dobimo: $\alpha = 1$ in $\beta = 2$.

S pomočjo izračuna koeficientov po metodi linearnih kvadratov smo prišli do linearne funkcije

$$T(x) = 1 + 2x$$

Za izračun linearnega trenda vstavimo vrednosti v to funkcijo

$$T(6) = 1 + 2 \times 6$$

$$T(6) = 13$$

V šestem letu bo imelo podjetje predvidoma 13 zaposlenih.

Računanje linearnega trenda s funkcijo TREND

Težko razumljivo računanje bo za nas opravil Excel. Uporabo Excela še zlasti upravičuje dejstvo, da imamo v realnih primerih zelo veliko število podatkov, na podlagi katerih skušamo predvideti vrednost spremenljivke v prihodnosti.

S pomočjo funkcije TREND izračunamo linearni trend za naslednje obdobje, če poznamo podatke iz preteklih obdobj.

TREND(known_y's; known_x's; new_x's; const)

known_y's znani podatki

known_x's znano časovno obdobje

new_x's časovno obdobje za katero želimo izračunati predvideno vrednost

const logična vrednost, ki navaja, ali naj bo konstanta α enaka 0. Če je argument *const* enak TRUE, ali če ga izpustimo, funkcija izračuna α na normalen način. Če je argument *const* enak FALSE, nastavi funkcija $\alpha = 0$ in prilagodi vrednosti tako, da velja $T(x) = \beta x$.



Poznamo podatke o številu udeležencev na računalniških tečajih v nekem podjetju v obdobju od leta 2001 do 2010. Koliko tečajnikov se bo tečajev udeležilo v letu 2011?



Napoved za leto 2011 naredimo s pomočjo funkcije TREND. Postopek reševanja je viden na sliki (Slika 86).

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Leto	Število udeležencev
2001	4.158
2002	4.529
2003	4.833
2004	4.738
2005	3.157
2006	4.153
2007	3.241
2008	2.703
2009	2.359
2010	3.733
2011	2.655

The 'Function Arguments' dialog box for the TREND function is open, showing the following arguments:

- Known_y's: B2:B11 = {4158;4529;4833;4738;3157;4153;3...}
- Known_x's: A2:A11 = {2001;2002;2003;2004;2005;2006;200...}
- New_x's: A12 = {2011}
- Const: (blank) = logical = {2655,0666666671}

The dialog box also includes the following text: "Returns numbers in a linear trend matching known data points, using the least squares method." and "Const is a logical value: the constant b is calculated normally if Const = TRUE or omitted; b is set equal to 0 if Const = FALSE." The formula result is shown as 2.655.

Slika 86: Linearni trend

Grafični prikaz trendne črte

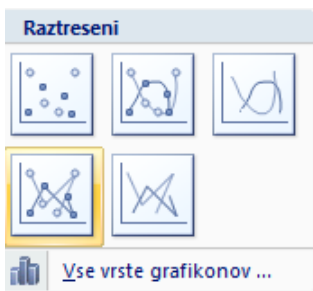


S trendno črto prikažimo linearni trend števila tečajnikov. Podatki z grafičnim prikazom so v območju A1:B11 tabele (Slika 86).



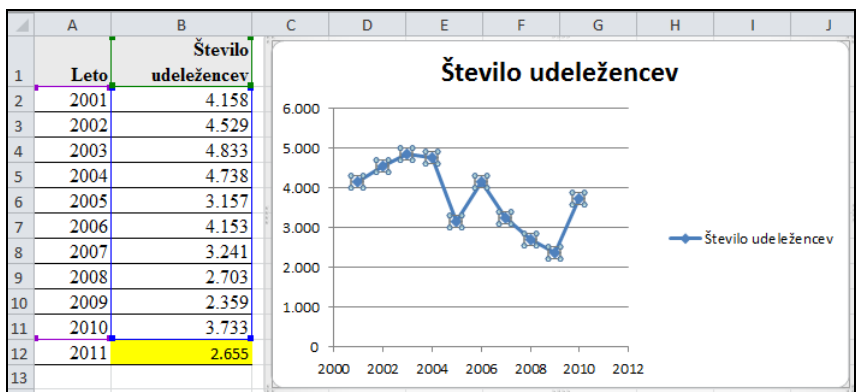
Uporabimo grafični prikaz trendne črte na grafu.

- Za tip grafa izberemo **RAZTRESENI** graf (v angleščini **SCATTER**). Med ponujenimi izberemo graf, kjer so točke povezane z ravnimi črtami (Slika 87).



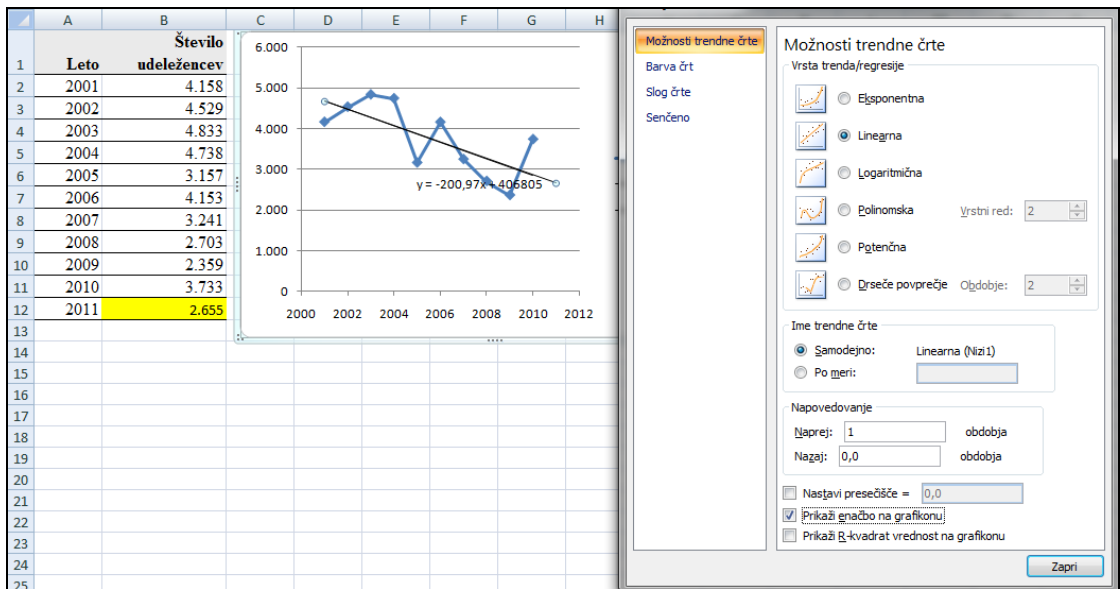
Slika 87: Oblike raztresenih grafov

- Kliknemo na graf, da bo označen kot na sliki (Slika 88).



Slika 88: Označen raztreseni graf

- Kliknemo desno tipko miške in izberemo **DODAJ TRENDNO ČRTO (ADD TRENDLINE)**. Dobimo kartonček na sliki (Slika 89).

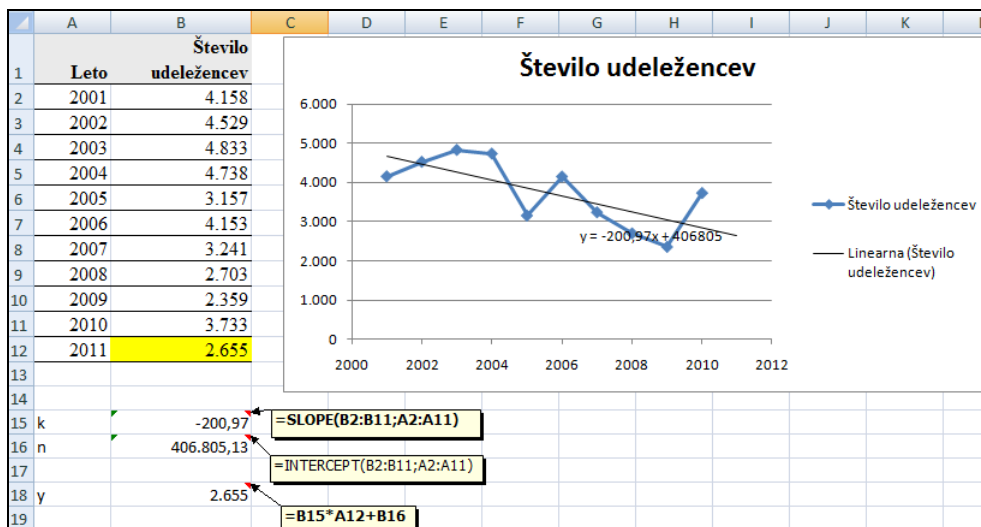


Slika 89: Dodajanje trendne črte na grafikon

- Izberemo linearno črto: **LINEARNA (LINEAR)**. V grafu se pojavi premica, ki predstavlja linearni trend.
- Če v opciji **NAPREJ (FORWARD)** vtipkamo 2, bo linearna premica trenda razširjena še za dve časovni enoti naprej, torej za dve leti, 2011 in 2012. Če vtipkamo 1, pa za 1 leto.
- Če odkljukamo opcijo **PRIKAŽI ENAČBO NA GRAFU (DISPLAY EQUATION ON CHART)**, program v grafu napiše še linearno funkcijo trenda.

- Ko pogovorno okno potrdimo z **V REDU (OK)**, dobimo graf na sliki (Slika 90).

Iz grafa lahko razberemo, da število tečajnikov z leti pada. Če se na tržišču ne bodo pripetile kakšne posebnosti, se bo nadaljeval tak trend in podjetje lahko v letu 2011 pričakuje okrog 2655 tečajnikov.



Slika 90: Trendna črta na grafu in izračun vrednosti

Natančni vrednosti linearnega trenda za leto 2011 lahko izračunamo iz izraza:

$$y = \beta x + \alpha,$$

kjer za x vzamemo vrednost 2011, α in β razberemo iz enačbe na grafu ali izračunamo s pomočjo funkcij SLOPE in INTERCEPT.

Rešitev je na sliki (Slika 90).

11.2.2 Nelinearni trendi

Računanje nelinearnih trendnih črt je nekoliko težji, a za grafično predstavitev nepotreben napor. Kot opazimo na sliki (Slika 89), lahko na graf dodamo poljubno trendno črto: eksponentno, logaritmično, polinomsko (npr. parabolično ali kubično) in potenčno. Dodamo lahko celo drseče povprečje.

Če imamo podatke, za katere smo ugotovili, da niso v linearni odvisnosti, ampak v eksponentni, imamo za napoved na voljo Excelovo funkcijo GROWTH. Podrobnosti pa naj radovedni bralec odkrije sam.

11.3 VAJE ZA UTRJEVANJE ZNANJA

89. Izračunajte linearni trend števila udeležencev v letu 2011. Podatki za izračun so v tabeli (Slika 78). Naredite tudi graf, na njem označite linearno trendno črto in enačbo linearnega trenda.

Rešitev: 4333

90. Za podatke v tabeli (Slika 78) izberite različne trendne črte in odkrijte, katera se najboljše prilega podatkom.

LITERATURA

Bančne obresti – varno in pregledno. Ljubljana: Združenje bank Slovenije, 2008. (citirano 30. 1. 2011) Dostopno na naslovu: <http://www.zbs-giz.si/zdruzenje-bank.asp?StructureId=887>

Čibej, J. A. *Matematika za računovodje in finančnike.* 3. dopolnjena izdaja. Ljubljana: Zveza računovodij, finančnikov in revizorjev Slovenije, 2001.

Lapuh Bele, J., Bele, D. *Poslovna matematika s statistiko.* 1. izdaja. Ljubljana: B2 d.o.o., 2002.

Lapuh Bele, J., Bele, D. *Poslovna matematika s statistiko.* 2. dopolnjena izdaja. Ljubljana: B2 d.o.o., 2004.

Lapuh Bele, J., Bele, D. *Poslovna matematika s statistiko.* 3. dopolnjena izdaja. Ljubljana: B2 d.o.o., 2008.

Lapuh Bele, J., Krašovec, M. *Excel za finančnike.* Gradivo za tečaj. Ljubljana: B2 d.o.o., 2007.

Lapuh Bele, J. *Excel za finančnike.* Ljubljana: Založba Pasadena, 2003.

Košmelj, K. *Uporabna statistika.* 2. dopolnjena izdaja. Ljubljana: Biotehniška fakulteta, 2007. (citirano 30. 1. 2011). Dostopno na naslovu: http://www.bf.uni-lj.si/fileadmin/groups/2721/Uporabna_statistika_okt_2007/Uporabna_statistika_01.pdf

Priporočila o načinih obračuna obresti za posle s prebivalstvom. Ljubljana: Banka Slovenije, 2008. (citirano 30. 1.2011) Dostopno na naslovu: <http://www.bsi.si/iskalnik.asp?Page=1>

Statistični letopis 2010. Ljubljana: Statistični urad Republike Slovenije, 2010.

Projekt **Impletum**

Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju 2008–11

Konzorcijski partnerji:



Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007–2013, razvojne prioritete Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja ter prednostne usmeritve Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.