REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

UPORABNA MATEMATIKA V LOGISTIKI

DANIJELA BLATNIK
MIRA JUG SKLEDAR

Višješolski strokovni program: Logistično inženirstvo
Učbenik: Uporabna matematika v logistiki
Gradivo za 1. letnik

Avtorici:
Danijela Blatnik, prof. mat.
1., 2., 3. in 5. poglavje
PROMETNA ŠOLA MARIBOR
Višja prometna šola

Mira Jug Skledar, prof. fiz. in mat.
4., 6. in 7. poglavje
PROMETNA ŠOLA MARIBOR
Višja prometna šola

Strokovna recenzentka:
spec. Lovro Dretnik, prof. mat.

Lektorica:
Tanja Srebrnič, prof. slov.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51-7(075.8)(0.034.2)

BLATNIK, Danijela
Uporabna matematika v logistiki [Elektronski vir] : gradivo za 1. letnik / Danijela Blatnik, Mira Jug Skledar. - El. knjiga. - Ljubljana : Zavod IRC, 2009. - (Višješolski strokovni program Logistično inženirstvo / Zavod IRC)

Način dostopa (URL): http://www.zavod-irc.si/docs/Skriti_dokumenti/Uporabna_matematika_v_logistiki-Blatnik_Jug.pdf. - Projekt Impletum

ISBN 978-961-6824-08-8
1. Jug Skledar, Mira
249674752

Izdajatelj: Konzorcij višjih strokovnih šol za izvedbo projekta IMPLETUM
Založnik: Zavod IRC, Ljubljana.
Ljubljana, 2009

Strokovni svet RS za poklicno in strokovno izobraževanje je na svoji 120. seji dne 10. 12. 2009 na podlagi 26. člena Zakona o organizaciji in financiranju vzgoje in izobraževanja (Ur. l. RS, št. 16/07-ZOFVI-UPB5, 36/08 in 58/09) sprejel sklep št. 01301-6/2009 / 11-3 o potrditvi tega učbenika za uporabo v višješolskem izobraževanju.

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Impletum 'Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju 2008–11'.
Projekt oz. operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007–2013, razvojne prioritete 'Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja' in prednostne usmeritve 'Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja'.

KAZALO

Predgovor:

V razumni družbi bi najboljši želeli postati učitelji,
kajti prenašanje spoznanj človeštva na nove generacije
je počet je najvišje časti in odgovornosti,
ki si jo je mogoče zamisliti.
(Lee Yacocca)

Pred vami je učno gradivo za predmet Uporabna matematika v logistiki v višješolskem študijskem programu logistično inženirstvo.

Učno gradivo naj služi kot pripomoček pri študiju predmeta Uporabna matematika v logistiki. Zajema tista poglavja, ki se predavajo pri tem predmetu. Pri vsakem poglavju so zajeta osnovna in za nadaljni šudij nujno potrebna znanja.

Upava, da vam bo študij matematike predvsem v veselje.

Avtorici

1 ANALIZA FUNKCIJ

CILJI:

Ob koncu tega poglavja boste:
- prepoznali funkcijski predpis,
- znali funkcijo prikazovati analitično, grafično in s tabelo,
- poznali nekatere lastnosti funkcij (naraščanje, padanje, omejenost, zveznost) in znali te lastnosti za podano funkcijo tudi določiti,
- vedeli, kolikšna je vrednost limite zvezne in nezvezne funkcije v točki T in poznali vrednost limite funkcije, ko x teži čez vse meje,
- poznali in znali uporabiti pravila za računanje limit,
- znali določiti limite nekaterih preprostejših funkcij,
- poznali lastnosti zveznih funkcij.

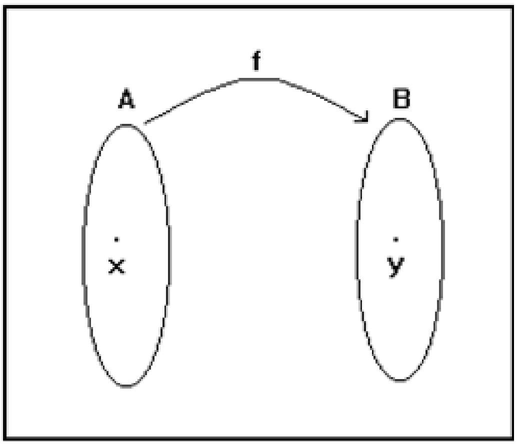
V tem poglavju boste najprej osvežili znanja, ki ste jih pridobili že v osnovni šoli. Poznavanje funkcij in njihovih lastnosti je temeljnega pomena za nadaljnje usvajanje znanja. Prepoznavanje funkcij in določevanje njihovih lastnosti vam bo v pomoč pri vsebinah nadaljnih poglavij.

1.1 FUNKCIJA IN NJENE LASTNOSTI

Če želimo govoriti o funkcijah moramo najprej opredeliti odvisno in neodvisno spremenljivko.
Količino, ki je odvisna od druge količine, imenujemo *odvisna spremenljivka*; količino, od katere je odvisna in se lahko poljubno spreminja, pa *neodvisna spremenljivka*. Pravimo, da je odvisna spremenljivka (y) funkcija neodvisne spremenljivke (x). Kar zapišemo:

$$\mathbf{y = \mathit{f}(x)}$$

Funkcijo pa lahko pogledamo tudi s stališča množic.
Naj bosta dani množici **A** in **B**. Preslikava iz množice **A** v množico **B** je predpis (pravilo), ki vsakemu elementu $\mathbf{x \in A}$ priredi natanko en element iz množice B.



Slika 1: Prikaz funkcije
Vir: Lasten

Pravimo, da je funkcija $\boldsymbol{f}$ definirana na množici A. To zapišemo:
$y = f(x)$
Funkcijski predpis f priredi elementu $x \in A$ element $y \in B$.
Element $x \in A$ imenujemo neodvisna spremenljivka ali original.

Množico vseh originalov imenujemo **definicijsko območje (D_f).** Definicijsko območje funkcije je množica A.
Zaloga vrednosti (Z_f) funkcije *f* je množica vseh slik originalov, torej slika množice A (*f*(A)).
Funkcija je določena z množico originalov, množico slik in funkcijskim predpisom.
Mi se bomo v veliki meri ukvarjali z **realnimi funkcijami**, to so preslikave iz množice realnih števil v množico realnih števil.
Realna funkcija *f* preslika interval $[a,b] \subset \Re$ v interval $[c,d] \subset \Re$. Simbolično to zapišemo:
$f: [a,b] \rightarrow [c,d]$, kjer so a, b, c, d elementi množice realnih števil.
Zapišemo še drugače.
Naj bo x $\in [a,b]$. $\boldsymbol{f: x \rightarrow y}$
Pravimo, da je odvisna spremenljivka y realna funkcija neodvisne spremenljivke x.

FUNKCIJO LAHKO PODAMO NA VEČ NAČINOV:

- *analitično*

Tako da navedemo funkcijski predpis, ki ga lahko podamo:

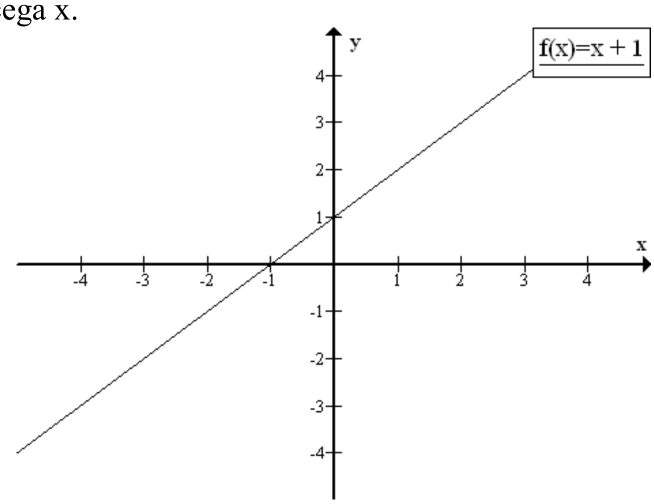
a) v eksplicitni obliki y = *f*(x) Primer: $y = x^2$

b) v implicitni obliki Primer: $y - x^2 = 0$

- *z grafom v koordinatnem sistemu v ravnini*

$G_f = \{(x,y); x \in D_f, y = f(x)\}$

Graf je množica urejenih parov (x, y), kjer x preteče celotno definicijsko območje funkcije, y pa je slika pripadajočega x.



Slika 2: Graf funkcije
Vir: Lasten

Opomba: Graf je narisan z uporabo programa Graph, ki je dosegljiv na spletnem naslovu http://www.padowan.dk/graph/.

- *s tabelo*

Tabela 1: Prikaz funkcije s tabelo

x	y
-1	1
0	0
1	1

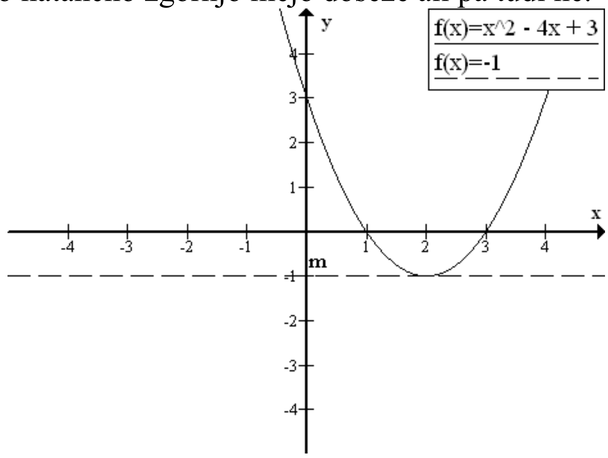
Vir: Lasten

NEKATERE LASTNOSTI FUNKCIJE

1. Omejenost funkcije

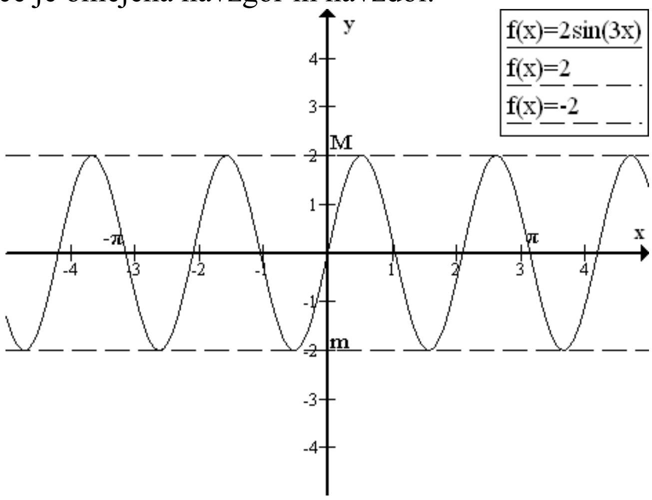
Naj bo funkcija *f* definirana na intervalu (a, b). Če obstaja tako realno število m, da za vsak x $\in$ (a, b) velja *f*(x) $\geq$ m, je funkcija na intervalu (a, b) **navzdol omejena**.
Število m imenujemo **spodnja meja** funkcije. Če je funkcija navzdol omejena, obstaja celo več spodnjih mej. Največji med njimi pravimo natančna spodnja meja ali infimum funkcije. Funkcija lahko natančno spodnjo mejo doseže ali pa tudi ne.

Funkcija pa je na intervalu (a, b) **navzgor omejena**, če obstaja tako realno število M, da za vsak x $\in$ (a, b) velja f(x) $\leq$ M.
Število M imenujemo **zgornja meja** funkcije. Če je funkcija navzgor omejena, obstaja celo več zgornjih mej. Najmanjši med njimi pravimo natančna zgornja meja ali supremum funkcije. Funkcija lahko natančno zgornjo mejo doseže ali pa tudi ne.



Slika 3: Navzdol omejena funkcija
Vir: Lasten

Funkcija je omejena, če je omejena navzgor in navzdol.

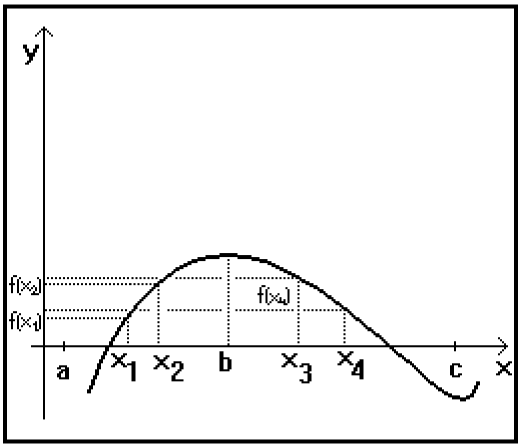


Slika 4: Omejena funkcija
Vir: Lasten

2. Naraščanje, padanje

Funkcija je na intervalu (a, b) **naraščajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in$ (a, b) velja:
če je $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Če velja $f(x_1) < f(x_2)$, je funkcija strogo naraščajoča.

Funkcija je na intervalu (c, d) **padajoča**, če za poljubna $x_3, x_4 \in$(c, d) velja:
če je $x_3 < x_4$, je $f(x_3) \geq f(x_4)$. Če velja $f(x_3) > f(x_4)$, je funkcija strogo padajoča.

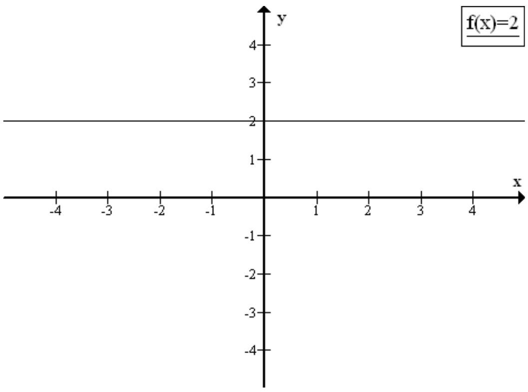


Slika 5: Naraščanje in padanje funkcije
Vir: Lasten

Na sliki 5 je graf funkcije, ki je na intervalu (a, b) naraščajoča in na intervalu (b, c) padajoča.

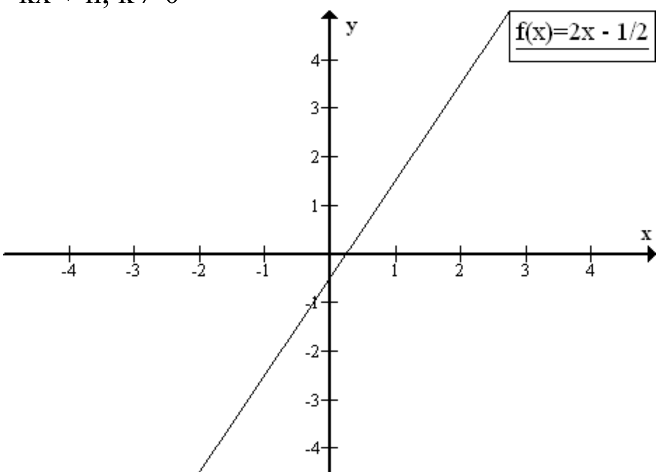
3. Zvezna funkcija
Graf zvezne funkcije je nepretrgana krivulja. Poznamo že veliko zveznih funkcij:

- konstantna: f(x) = c



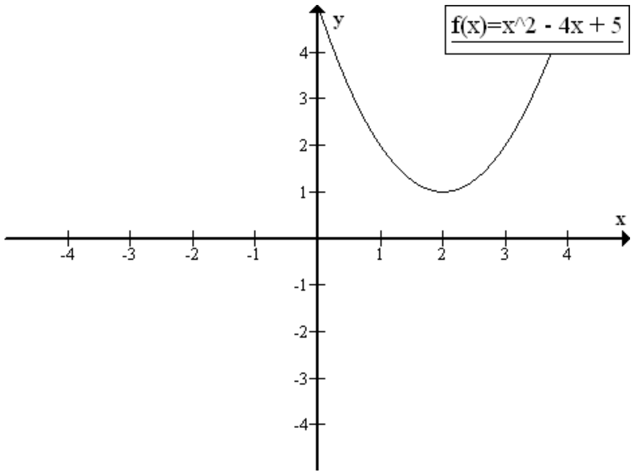
Slika 6: Graf konstantne funkcije
Vir: Lasten

- linearna: f(x) = kx + n; k $\neq$ 0



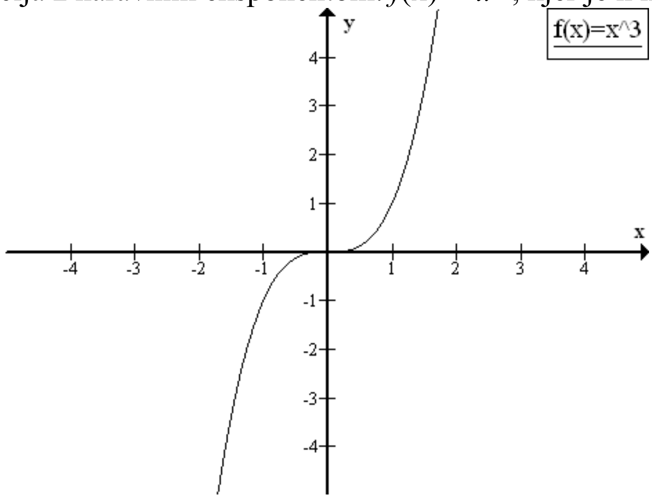
Slika 7: Graf linearne funkcije
Vir: Lasten

- kvadratna: f(x) = ax^2 + bx + c; a $\neq$ 0



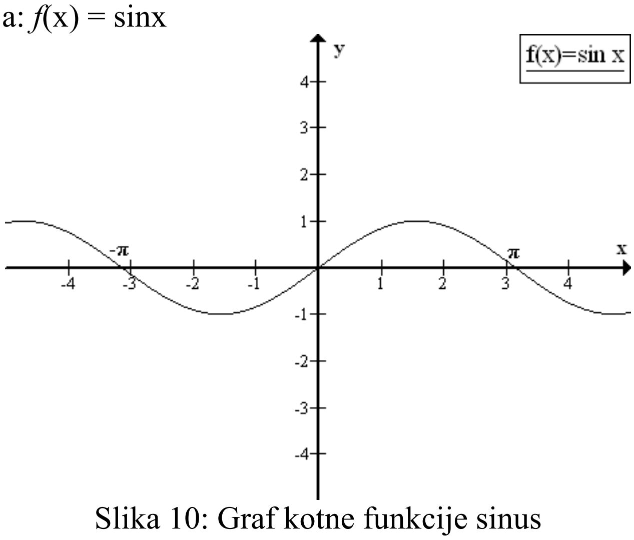
Slika 8: Graf kvadratne funkcije
Vir: Lasten

- potenčna funkcija z naravnim eksponentom: *f*(x) = x^n , kjer je n naravno število



Slika 9: Graf potenčne funkcije
Vir: Lasten

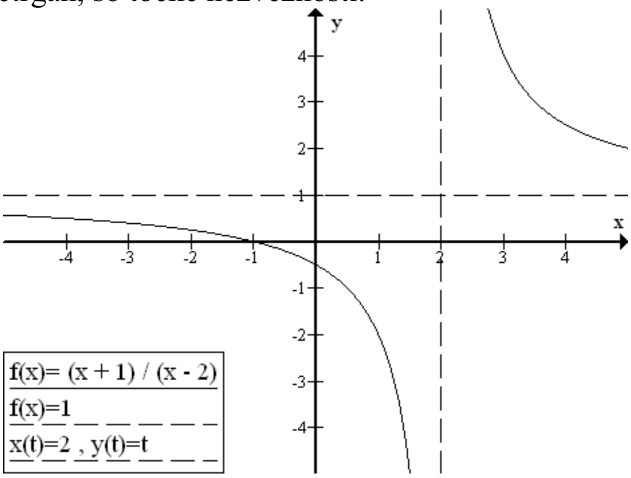
- polinomi: *f*(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$; $a_n \neq 0$
- eksponentna funkcija: *f*(x) = a^x ; a>1
- logaritemska funkcija: *f*(x) = $\log_a x$; a>1, x>0
- sinusna funkcija: *f*(x) = sinx



Slika 10: Graf kotne funkcije sinus
Vir: Lasten

- kosinusna funkcija: *f*(x) = cosx.

Če je graf pretrgana krivulja, funkcija ni zvezna. Tiste točke definicijskega območja funkcije, nad katerimi je graf pretrgan, so točke nezveznosti.

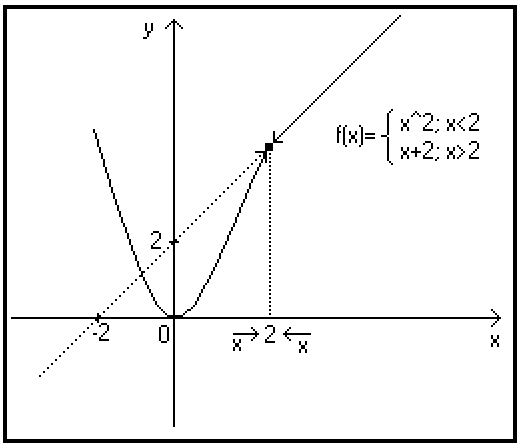


Slika 11: Graf nezvezne funkcije
Vir: Lasten

1.2 LIMITA FUNKCIJE

Pojem limita vpeljemo pri obravnavi neke funkcije, ko ta funkcija za določene vrednosti x = a ni definirana. Poznamo pa vrednosti funkcije v okolici te točke.
Določimo funkcijam, katerih grafe imamo narisane: vrednosti *f*(x), ko se x približuje dani vrednosti.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 2 \\ x + 2 : x > 2 \end{cases}$



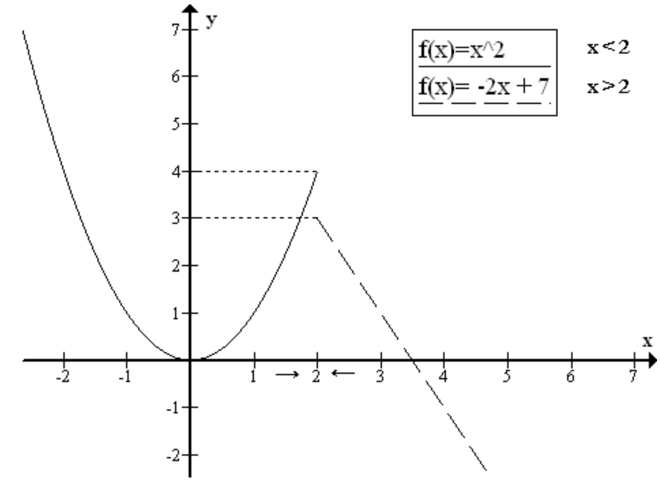
Slika 12: Limita funkcije 1
Vir: Lasten

Kolikšno vrednost ima ta funkcija, ko se x približuje vrednosti 2?
Funkcija *f* v točki x = 2 ni definirana. Ko pa se z leve ali desne x približuje vrednosti 2, vidimo, da se funkcijska vrednost približuje vrednosti 4. Pravimo, da je *limita funkcije f* enaka 4, ko gre x proti 2.

To zapišemo: $\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$

2. Naj bo funkcija *f* definirana na naslednji način:

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} x^2; & x < 2 \\ -2x + 7; & x > 2 \end{cases}$$

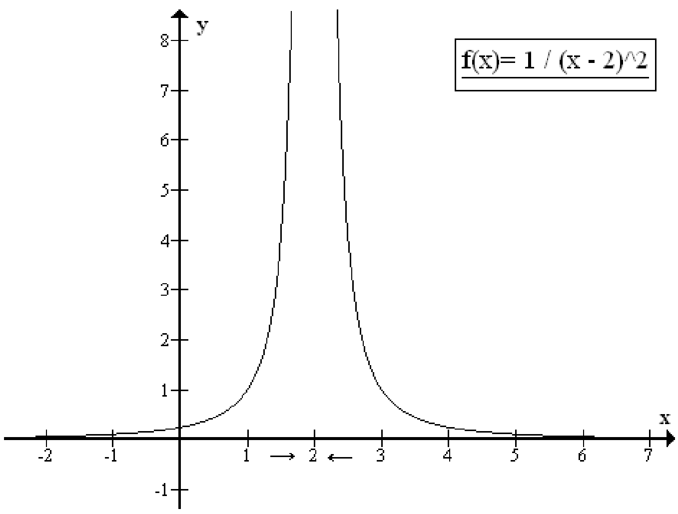


Slika 13: Limita funkcije 2
Vir: Lasten

Kolikšno vrednost ima ta funkcija, ko se x približuje vrednosti 2?
Tudi funkcija *f* v točki x = 2 ni definirana. Ko se x z leve približuje vrednosti 2, se funkcijske vrednosti približujejo vrednosti 4, ko pa se x z desne približuje vrednosti 2, se funkcijske vrednosti približujejo vrednosti 3. Zato funkcija *f* nima limite v točki x = 2.

3. Imejmo še funkcijo s predpisom:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$



Slika 14: Limita funkcije 3
Vir: Lasten

Kolikšna je vrednost funkcije *f*, ko se x približuje vrednosti 2?
To je racionalna funkcija, ki ima pri x = 2 pol druge stopnje in v x = 2 ni definirana, pa tudi zvezna ni.
Torej, vrednosti v x = 2 ne moremo določiti, lahko pa določimo, kam vrednosti funkcije težijo, ko gre x proti 2. V tem primeru funkcijske vrednosti rastejo čez vse meje, pravimo, da gredo vrednosti proti neskončnosti. Zato je limita funkcije *f*, ko gre x proti 2, enaka neskončno, kar zapišemo:

$$\lim_{x \to 2} f(\mathrm{x}) = \infty .$$

Kolikšna je limita naše funkcije, ko raste x prek vseh mej?

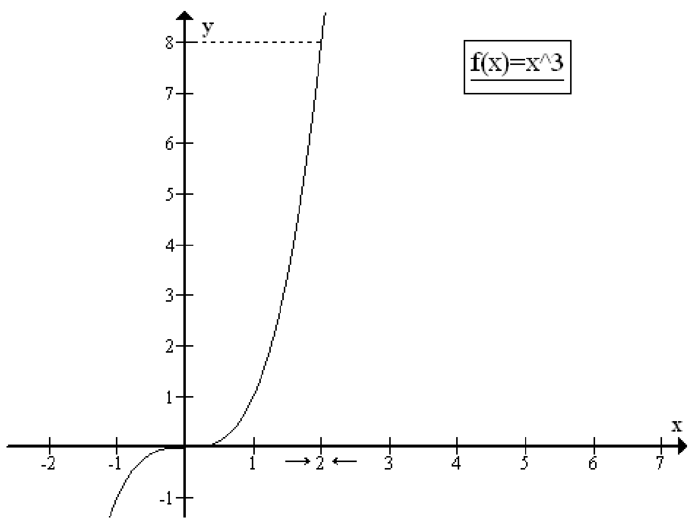
Vidimo, da se funkcijske vrednosti v tem primeru približujejo vrednosti 0. Torej je limita funkcije, ko gre x proti neskončno, enaka 0, kar zapišemo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0.$$

Če funkcija v točki x = a ni definirana ali ni zvezna, je njena limita enaka vrednosti, h kateri težijo z leve in desne vrednosti funkcije, ko se x približuje vrednosti a.

Funkcija, ki je v neki točki definirana in zvezna, ima v tej točki limito in je limita enaka kar funkcijski vrednosti v tej točki.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$



Slika 15: Zveznost in limita funkcije
Vir: Lasten

Določimo limito funkcije f(x) = x^3 v točki x = 2.
Ko se x približuje z leve in desne vrednosti 2, teži funkcijska vrednost proti vrednosti 8, saj ima za x = 2 vrednost 8. Torej je limita za x = 2 enaka 8.

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8$$

Kaj pa limita iste funkcije, ko gre x čez vse meje?

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty .$$

Limita konstante je enaka tej konstanti.

Naj bo $f(x) = a$ na celotnem intervalu, potem velja, da proti katerikoli točki teži x, funkcijska vrednost vedno teži proti a. Torej je limita konstante a, ne glede na to, kam teži x, vedno enaka a.

PRAVILA ZA RAČUNANJE Z LIMITAMI

1. Limita vsote dveh funkcij, ko teži x proti a, je enaka vsoti limit posameznih funkcij.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

2. Limita produkta konstante in funkcije je enaka limiti funkcije, pomnožene s konstanto.

$$\lim_{x\to a}(k\cdot f(x)) = k\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

3. Limita produkta funkcij je enaka produktu limit.

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

4. Limita kvocienta dveh funkcij je enaka kvocientu limit obeh funkcij, s tem da limita funkcije v imenovalcu ne sme biti nič.

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \qquad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Nekaj nasvetov za enostavnejše določevanje limit:

a) Racionalne funkcije

Primer 1:

Določi limito funkcije $f(x) = \frac{x^2-4}{6x-12}$, ko gre x proti 2.

Ker število 2 ni v definicijskem območju, lahko funkcijo delimo z (x – 2). Torej:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{6x-12} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{6(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Primer 2:

Določimo limito funkcije $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$, ko x raste čez vse meje.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \frac{1+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}}{1-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Primer 3:

Določimo limito funkcije $f(x) = \frac{4x^2-4}{(x+3)^2}$, ko x raste preko vsake meje.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4}{(x+3)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4}{x^2+6x+9} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2-4}{x^2}}{\frac{x^2+6x+9}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} = \frac{4}{1} = 4$$

b) Iracionalne funkcije.

➲Primer 4:

Določi limito funkcije $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{2x+5}}{x^2+x-6}$, ko gre x proti 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{2x+5}}{x^2+x-6}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{2x+5}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{2x+5}}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x+5}\right)^2}{\left(x^2+x-6\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{2x+5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\left(x^2+x-6\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{2x+5}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{2x+5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+3)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{2x+5}\right)}=\frac{2}{(2+3)(\sqrt{8+1}+\sqrt{2\cdot 2+5})}=\frac{2}{5(3+3)}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

c) Trigonometrične funkcije

Brez dokaza bomo navedli, da je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Podobno velja tudi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1$.

➲Primer 5:

Določimo limito funkcije $\dfrac{\sin 4x}{x}$, ko gre x proti 0.

Števec in imenovalec množimo s 4 in uvedimo novo neznanko: $4x = t$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}4\frac{\sin 4x}{4x}=\lim_{t\to 0}4\frac{\sin t}{t}=4$$

1.3 ZVEZNOST FUNKCIJ

Definicija:

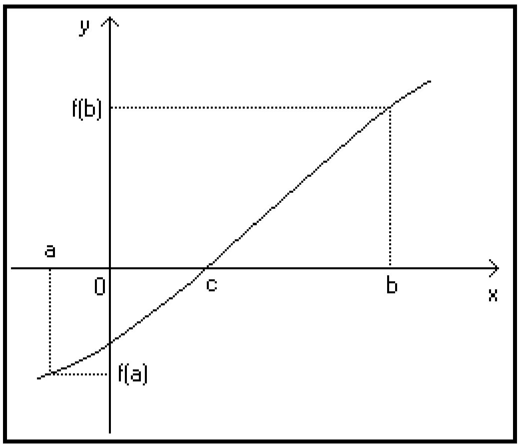
Funkcija f, ki je definirana na intervalu $[a,b]$, je v točki x_0 zvezna, če ima v tej točki limito in je ta enaka funkcijski vrednosti v tej točki.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Funkcija je zvezna na celotnem intervalu $[a,b]$, če je zvezna v vsaki točki tega intervala.

LASTNOSTI ZVEZNIH FUNKCIJ

1. Couchyjev izrek: Če je funkcija f definirana in zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$ in imata na krajiščih intervala vrednosti f(a) in f(b) nasprotna predznaka, obstaja med a in b (najmanj ena) taka vrednost c, za katero je f(c) enaka nič. $f(c) = 0$ $(a < c < b)$



Slika 16: Zvezna funkcija
Vir: Lasten

2. Če je funkcija f definirana in zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$ in na tem intervalu omejena, obstajata dve taki števili m in M, da je

$$m \le f(x) \le M; \quad če\ je \quad a \le x \le b.$$

3. Če je funkcija f definirana in zvezna na nepretrganem območju in ima v dveh točkah a in b ($a < b$) tega območja neenaki vrednosti A in B, zavzame funkcija vse vmesne vrednosti med A in B.

Povzetek:
V tem poglavju ste spoznali funkcijo in njene lastnosti. Izračunati znate limite nekaterih preprostejših funkcij. Veste, kdaj je funkcija zvezna in poznate lastnosti zveznih funkcij. S temi znanji ne boste imeli težav pri vsebina poglavij, ki sledijo.

Še nekaj nalog za utrjevanje:

1. Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x-3}$ in zapišite njene lastnosti.
2. Izračunajte: $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{6x+12}$.
3. Izračunajte: $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3\ 8}{2x^3-4x^2+1}$.
4. Izračunajte: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.
5. Svoje znanja lahko še dodatno utrdite s pregledom snovi in nalog na spletnih naslovih: http://www.e-um.si in http://stud.prometna.net/index.php?option=com_uhp2&Itemid=30&task=viewpage&user_id=64&pageid=10.

2 ODVOD

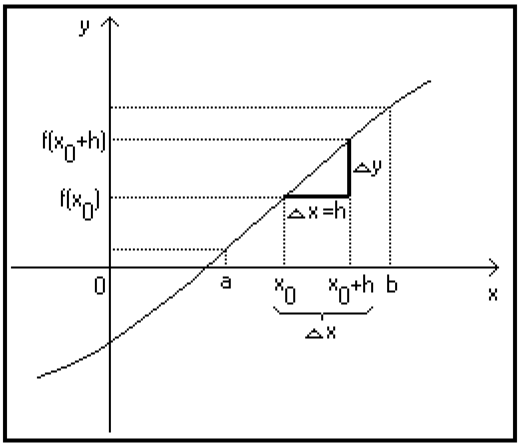
CILJI

Ob koncu tega poglavja boste:
- poznali analitično in geometrijsko definicijo odvoda,
- poznali pravila za odvajanje osnovnih funkcij,
- znali uporabiti lastnosti računske operacije odvajanja na preprostejših primerih,
- znali uporabiti računsko operacijo odvajanja na uporabnih primerih (znali boste: določiti enačbo tangente in normale na krivuljo, kot med krivuljama, poiskati stacionarne točke in s pomočjo teh narisati graf polinoma in racionalne funkcije).

V prvem poglavju ste spoznali pojme kot so naraščanje, padanje, zgornja meja, spodnja meja. V tem poglavju pa boste spoznali, kako nam pri določanju le-tega pomaga odvod funkcije. S pomočjo odvoda se boste naučili poiskati lokalne maksimume in lokalne minimume. Zato boste lahko narisali graf funkcije še bolj natančno. Prav tako se boste naučili, kako izračunati kot med dvema poljubnima krivuljama, ne samo kot med dvema premica, kar poznate že iz srednje šole.

2.1 DEFINICIJA ODVODA

Naj bo dana funkcija *f* definirana na intervalu $[a,b]$ in zvezna v točki x_0. Izberimo nek h, takšen, da je $x_0 + h$ iz danega intervala $[a,b]$.



Slika 17: Definicija odvoda
Vir: Lasten

Potem lahko zapišemo diferenčni količnik:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$f(x_0 + h) - f(x_0)$ nam pove, kako se spremeni vrednost funkcije, če se x spremeni za h in ga označimo z Δy.

Spremembo x – a za h označimo z Δx.

Sedaj lahko zapišemo:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Diferenčni količnik nam pove, za koliko se vrednost funkcije povprečno spreminja na intervalu (x, x + h).
Če h poljubno manjšamo, se lahko diferenčni količnik poljubno približuje številu A. Lahko rečemo, da je število A limita diferenčnega količnika.

Če ima diferenčni količnik funkcije *f* v izbrani točki x limito A, pravimo, da je v točki x **ODVEDLJIVA**.
Definicija:
Odvod *f′*(x) funkcije *f* v točki x_0 je limita diferenčnega količnika, ko gre h proti 0.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Primeri:
1. Izračunajmo odvod konstantne funkcije *f*(x) = c.
f(x) = c
f(x + h) = c

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0.$$

Torej je $f'(c)=0$

2. Izračunajmo odvod funkcije *f*(x) = x po definiciji odvoda.
f(x) = x
f(x + h) = x + h

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$$

Torej je $f'(x)=1$

3. Izračunajmo odvod funkcije *f*(x) = x^2 po definiciji odvoda.
f(x) = x^2
f(x + h) = $(x+h)^2 = x^2+2xh+h^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Torej je $f'(x^2)=2x$

4. Izračunajmo odvod funkcije *f*(x) = $\frac{x}{x+1}$ po definiciji odvoda.

f(x) = $\frac{x}{x+1}$ *f*(x + h) = $\frac{x+h}{x+h+1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x+h+1}-\frac{x}{x+1}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+xh+x+h-x^2-xh-x}{h(x+h+1)(x+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(x+h+1)(x+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h+1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

Odvod funkcije je spet funkcija.

Določimo še vrednost odvoda za $x_0 = 2$ za zgornji primer.

$$f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}$$

DIFERENCIAL

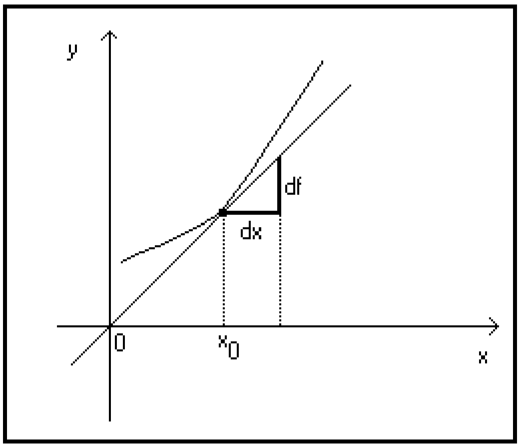
Imejmo funkcijo *f*, za katero v točki x_0 obstaja limita.
V limiti je sprememba neodvisne spremenljivke Δx zelo, zelo majhna, lahko rečemo neskončno majhna in jo označimo z dx. Tudi sprememba funkcijske vrednosti Δf je zaradi zveznosti funkcije *f* ustrezno majhna in jo označimo z d*f*. Tako dobimo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

d*f* imenujemo diferencial funkcije in je enak: $df = f'(x)dx$

Diferencial funkcije *f* v točki x_0 pravzaprav pove, za koliko se spremeni ordinata pri spremembi abscise, toda ne na grafu funkcije, ampak na tangenti v točki x_0.

Pri majhni spremembi neodvisne spremenljivke x diferencial funkcije pomeni glavni del spremembe funkcije in ga lahko vzamemo za približek za spremembo funkcije.



Slika 18: Diferencial
Vir: Lasten

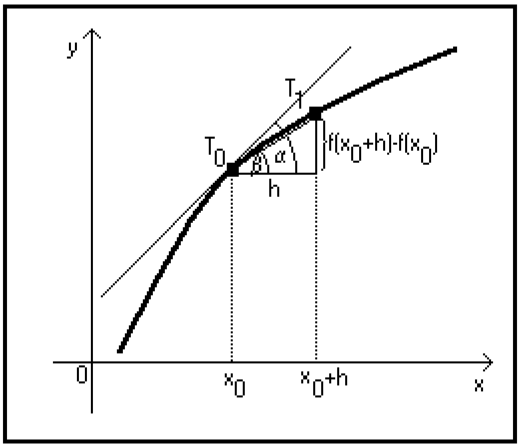
GEOMETRIJSKI POMEN ODVODA

Narišimo graf poljubne zvezne funkcije *f*(x), ki je neka nepretrgana krivulja v ravnini (x, y).

Izberimo na njej točko $T_0(x_0, y_0)$. Povečajmo x_0 za h in dobimo točko $T_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Skozi T_1 in T_0 narišemo premico, ki je sekanta naše krivulje. Kot, ki ga sekanta oklepa z osjo x, označimo z β.

Smerni koeficient sekante je: $k_s = tg\beta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Če h zmanjšujemo proti nič, se točka T_1 približuje k točki T_0, sekanta pa se bliža končni legi, ki je tangenta na krivuljo v točki T_0. Smerni koeficient sekante preide v smerni koeficient tangente in kot β v kot α.



Slika 19: Tangenta na graf funkcije
Vir: Lasten

Torej: $k_t = tg\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Odvod funkcije v točki x_0 je smerni koeficient tangente na graf funkcije *f* v tej točki.

Ali drugače:
Odvod funkcije *f* v točki x_0 je tangens kota, ki ga oklepa tangenta na krivuljo skozi točko x_0 s pozitivno smerjo abscisne osi.

Iz tega sledi:

1. Graf funkcije *f* ima tangento v neki točki T_0 natanko tedaj, ko je funkcija *f* v tej točki odvedljiva.
2. Tangenta na krivuljo v točki T_0 je premica skozi točko T_0 , ki ima smerni koeficient $k = f'$(x).

Enačbo tangente zapišemo v obliki: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Odvode uporabljamo na več področjih (matematika, fizika, mehanika …) na najrazličnejše načine. Na tem mestu bomo omenili le nekatere možnosti uporabe.

Za lažje in enostavnejše računanje z odvodi bomo zapisali nekatera pravila za odvajanje.

1. **Odvod vsote oziroma razlike funkcij je enak vsoti oziroma razliki odvodov posameznih funkcij**.

Dokaz: Naj bosta *f* in *g* odvedljivi funkciji na nekem intervalu. Po definiciji odvoda je:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=f'(x)+g'(x)$$

Torej:

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

Podobno dokažemo še pravilo za odvod razlike dveh funkcij.

2. **Odvod produkta dveh funkcij *f* in *g* je enak vsoti produkta odvoda prve funkcije z drugo in produkta prve funkcije z odvodom druge funkcije.**

Dokaz:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)\cdot g(x+h)\right)-\left(f(x)\cdot g(x)\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=$$

V števcu prištejemo in odštejemo izraz $f(x)\cdot g(x+h)$, preuredimo in dobimo:
$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Torej lahko zapišemo pravilo:
$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

3. **Odvod produkta funkcije in konstante je enak produktu te konstante in odvoda funkcije.**

$$\left(k\cdot f(x)\right)'=k\cdot f'(x)$$

Dokaz:sledi neposredno iz drugega pravila.

4. **Odvod kvocienta dveh funkcij je zopet kvocient**. In sicer:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Dokaz:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x)-f(x)g(x)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)\cdot g(x+h)}=$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

5. **Odvod sestavljene funkcije** $(f \circ g)(x)$ **je enak produktu odvoda po funkciji *g* in odvoda funkcije *f* po *g*.**

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

➔Primera:

1. Izračunajmo odvod polinoma
$p(x)=2x^4-3x^3+5x^2+4x-12.$

Odvajamo vsak člen polinoma posebej in dobimo:

$p'(x)=8x^3-9x^2+10x+4$.

2. Izračunajmo odvod racionalne funkcije $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-1}$.

Odvajajmo po pravilu za odvod kvocienta:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2-3)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2+3}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}.$$

ODVODI NEKATERIH OSNOVNIH FUNKCIJ

$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad n \in N$
$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \tan x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f(x) = \cot x \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = e^{kx} \qquad f'(x) = ke^{kx}$

$f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \ln a$

Primeri:

1. Odvajajmo funkcijo $f(x) = x^3 e^{2x}$.

Uporabimo pravilo za odvajanje produkta:

$$f'(x) = (x^3)' e^{2x} + x^3 (e^{2x})' = 3x^2 e^{2x} + x^3 \cdot 2e^{2x} = x^2 e^{2x}(3 + 2x)$$

2. Odvajajmo funkcijo $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^5}$.

Uporabimo pravilo za odvajanje kvocienta:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' x^5 - \sin x (x^5)'}{(x^5)^2} = \frac{\cos x \cdot x^5 - \sin x \cdot 5x^4}{x^{10}} =$$
$$= \frac{x^4 (x \cos x - 5 \sin x)}{x^{10}} = \frac{x \cos x - 5 \sin x}{x^6}$$

3. Odvajajmo funkcijo $f(x) = \sin 2x$.

Najprej zapišemo funkcijo v obliki produkta: $f(x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x$

Uporabimo pravilo za odvajanje produkta:

$f'(x) = 2((\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)')=$
$=2(\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x=$
$=2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$

2.2 UPORABA ODVODA

1. Smerni koeficient tangente in normale na krivuljo

Odvod funkcije v določeni točki je limita diferenčnega kvocienta $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ko gre Δx proti nič. Diferenčni količnik je enak smernemu koeficientu premice – sekante, ki gre skozi dve točki na krivulji. Če gre Δx proti nič, se ta premica sekanta približuje tangenti na krivuljo v dani točki. Vrednost odvoda pa je enaka smernemu koeficientu tangente v tej točki:

$$f'(x_0) = k_t$$

➔Primeri:

1. Zapišimo enačbo tangente na krivuljo $y = x^2$ v točki T(2, 4).

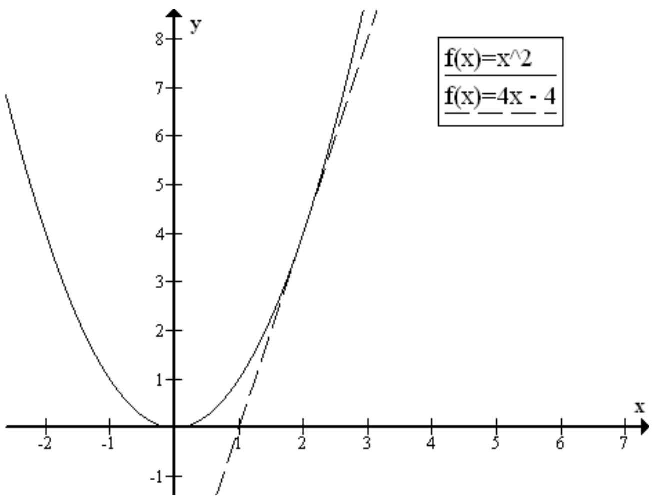
Odvod funkcije $f(x) = x^2$ v poljubni točki x je enak $f'(x) = 2x$.
Smerni koeficient tangente v točki T(2, 4) je enak odvodu funkcije v točki x = 2:

$$k_t = f'(2) = 4$$

Enačba tangente v točki T(2, 4) je:

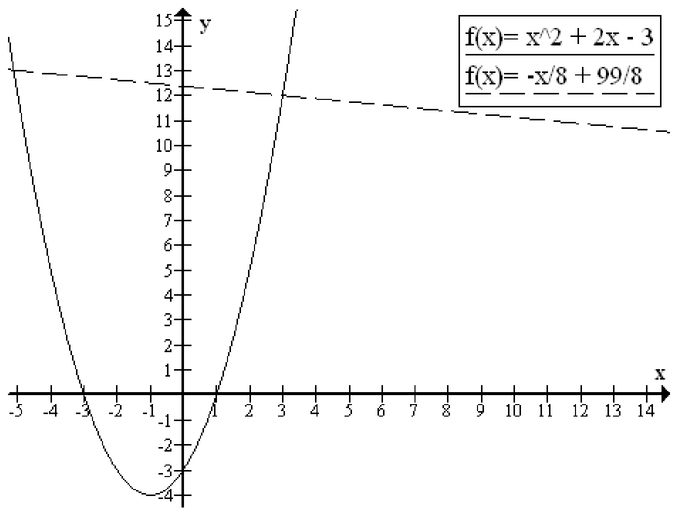
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

y – 4 = 4(x – 2)
y = 4x – 8 + 4
y = 4x – 4



Slika 20: Tangenta na graf kvadratne funkcije
Vir: Lasten

2. Poiščimo enačbo normale v točki T(3, y) na krivuljo, ki je graf funkcije $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Normala na krivuljo je premica, ki je pravokotna na krivuljo v dotikališču tangente. Smerni koeficient normale je obraten in nasproten smernemu koeficientu tangente: $k_n = -\frac{1}{k_t}$.



Slika 21: Normala na graf kvadratne funkcije
Vir: Lasten

Izračunajmo drugo koordinato točke T(3, y):

y = 9 + 6 – 3 = 12

Odvajajmo funkcijo:

$f'(x) = 2x + 2$

Odvod v točki x = 3 je enak smernemu koeficientu tangente:

$k_t = f'(3) = 6 + 2 = 8$

Smerni koeficient normale je nasproten in obraten smernemu koeficientu tangente. Smerni koeficient normale je $-\frac{1}{8}$.
Normala gre skozi točko T(3, 12), zato je njena enačba:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - 12 = -\frac{1}{8}(x - 3)$$
$$y = -\frac{1}{8}x + 12\frac{3}{8}$$

3. Izračunajmo, v kateri točki krivulje $y = x^2 - x - 2$ je tangenta vzporedna premici y= 2x –6.

(Dve vzporedni premici imata enak smerni koeficient.)

Ker je tangenta vzporedna premici, imata enak smerni koeficient: $k_t = 2$.
Smerni koeficient tangente v neki točki je enak odvodu v tej točki.
Izračunajmo odvod:

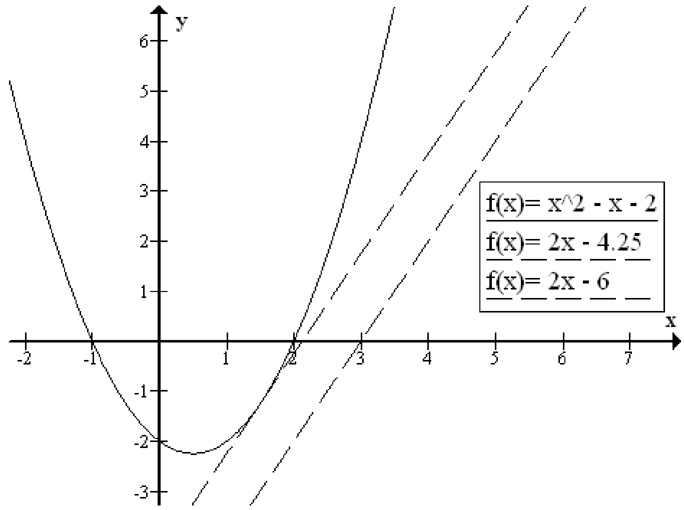
y' = 2x – 1

Pri katerem x je odvod enak 2?

2x – 1 = 2
2x = 3

$$x = \frac{3}{2}$$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$$



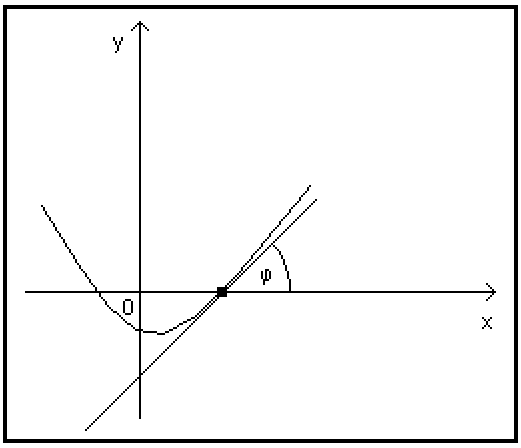
Slika 22: Vzporedni premici
Vir: Lasten

Dani premici je vzporedna tangenta na krivuljo v točki T$\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

2. ***Kot, pod katerim krivulja seka abscisno os***

Kot med abscisno osjo in krivuljo je enak kotu med abscisno osjo in tangento na krivuljo v presečišču krivulje z osjo, in to je naklonski kot tangente.

Tangens naklonskega kota je enak smernemu koeficientu tangente:
$tg\varphi = k_t$
Smerni koeficient tangente pa je enak odvodu funkcije v presečišču:
$k_t = f'(x_0)$
Torej je tangens naklonskega kota enak odvodu funkcije v presečišču:
$tg\varphi = f'(x_0)$



Slika 23: Naklonski kot 1
Vir: Lasten

Primer:

Izračunajmo, pod kolikšnim kotom graf funkcije $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 5$ seka abscisno os. Najprej poiščimo presečišča grafa funkcije z abscisno osjo, to je ničla funkcije:

$$2x^3 - 5x^2 + 2x - 5 = 0$$
$$x^2(2x-5) + (2x-5) = 0$$
$$(2x-5)(x^2+1) = 0$$

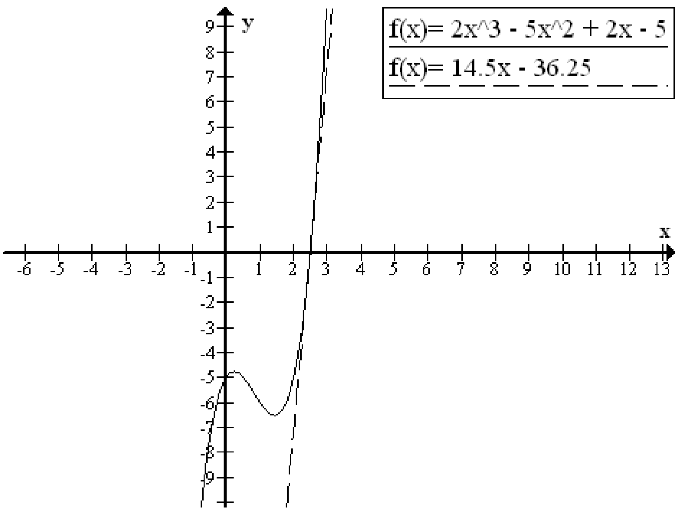
Presečišče je eno samo v točki $T\left(\frac{5}{2},0\right)$.

Odvod funkcije je enak $f'(x) = 6x^2 - 10x + 2$.

Izračunajmo odvod pri x = $\frac{5}{2}$: $f'\left(\frac{5}{2}\right) = 6\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10\cdot\left(\frac{5}{2}\right) + 2 = \frac{75}{2} - 25 + 2 = \frac{29}{2} = 14{,}5$

Tangens naklonskega kota je enak odvodu v presečišču:

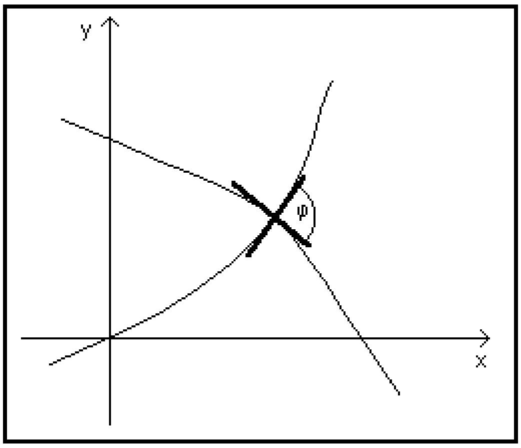
$$tg\varphi = 14{,}5$$
$$\varphi \doteq 86{,}05^0$$



Slika 24: Naklonski kot 2
Vir: Lasten

3. *Kot med krivuljama*

Kot med krivuljama je kot med tangentama na ti dve krivulji v presečišču krivulj.



Slika 25: Kot med krivuljama
Vir: Lasten

Kot med premicama s smernima koeficientoma k_1 in k_2 izračunamo s formulo:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Primer:

Izračunajmo kot med krivuljama $y = \frac{1}{x^2}$ in $y = \frac{x^2+1}{2}$.

Najprej določimo presečišča krivulj.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{2}$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{x^2+1}{2} = 0$$

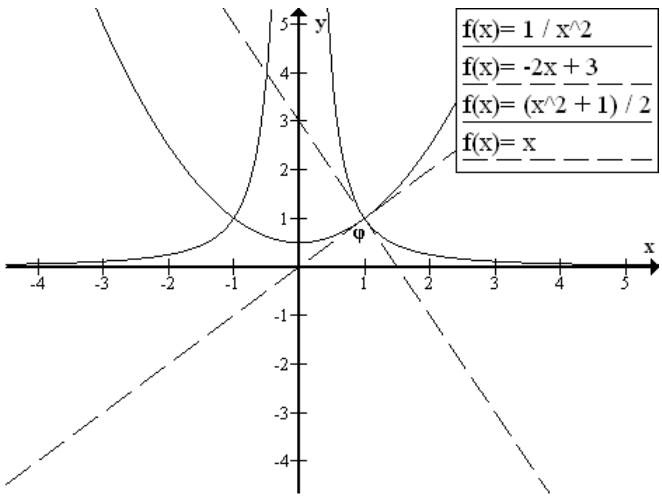
$$2 - x^4 - x^2 = 0 \qquad x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$(x^2-1)(x^2+2) = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x^2+2) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$



Slika 26: Kot med krivuljama
Vir: Lasten

Krivulji se sekata v dveh točkah T_1 (1, 1) in T_2 (-1, 1). Krivulji sta grafa sodih funkcij, zato sta simetrični glede na ordinatno os. Tudi kota med krivuljama v obeh presečiščih sta enaka, zato bo dovolj, da izračunamo enega izmed kotov. Recimo v točki T_1 (1, 1).

Funkciji odvajajmo in izračunamo odvod pri x = 1.

$$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$
$$y' = -2x^{-3}$$
$$y'(1) = -2$$
$$k_1 = -2$$

$$y = \frac{x^2+1}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$
$$y' = \frac{2x}{2} = x$$
$$y'(1) = 1$$
$$k_2 = 1$$

Vstavimo vrednosti za k_1 in k_2 v formulo:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1-(-2)}{1+1(-2)}\right| = \left|\frac{3}{-1}\right| = 3$$

$$\varphi \doteq 71{,}57^0$$

4. Stacionarne točke, naraščanje, padanje funkcije

Za risanje grafov polinomov in racionalnih funkcij poiščemo oziroma določimo:
- ničle in stopnjo ničel,
- pole pri racionalnih funkcijah,
- začetno vrednost,
- obnašanje daleč proč od koordinatnega izhodišča.

S pomočjo odvoda pa določimo še:
- intervale naraščanja in padanja funkcije,
- stacionarne točke, lokalne ekstreme in prevoje.

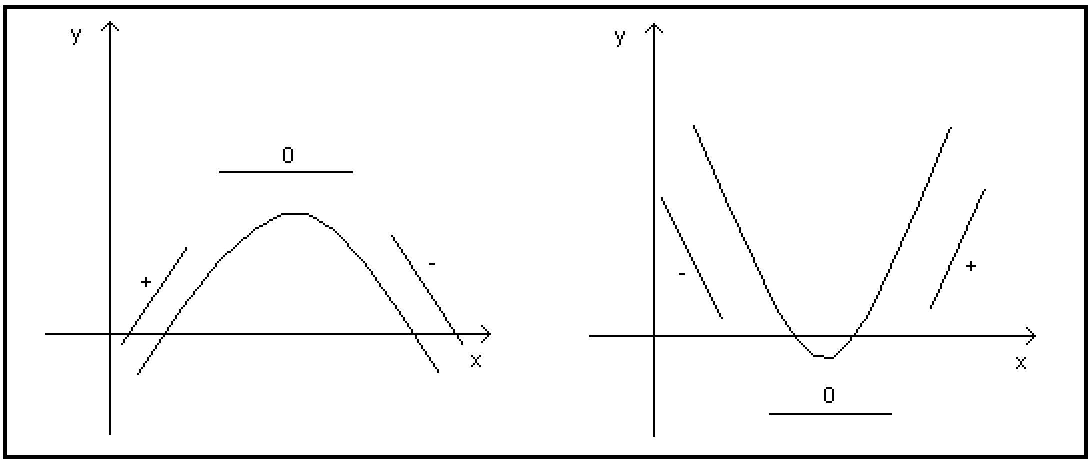
Definirajmo:
Funkcija f ima v točki x_0 lokalno največjo vrednost ali **lokalni maksimum**, če so vse funkcijske vrednosti na nekem odprtem intervalu s središčem v x_0 manjše od funkcijske vrednosti $f(x_0)$.

Funkcija f ima v točki x_0 lokalno najmanjšo vrednost ali **lokalni minimum**, če so vse funkcijske vrednosti na nekem odprtem intervalu s središčem v x_0 večje od funkcijske vrednosti $f(x_0)$.
Lokalne maksimume in lokalne minimume imenujemo z eno besedo **lokalni ekstremi**.

Z odvodom lahko določimo, na katerih intervalih funkcija narašča in na katerih pada.
V točkah, v katerih je odvod funkcije pozitiven, funkcija narašča (odvod funkcije je namreč v posameznih točkah enak smernemu koeficientu tangente na krivuljo, ki je graf funkcije), v točkah, v katerih je odvod funkcije negativen, pa funkcija pada.

Če je za vsak *x* z intervala (a, b), $f'(x) > 0$, potem je *f* na tem intervalu naraščajoča.

Če je za vsak *x* z intervala (a, b), $f'(x) < 0$, potem je *f* na tem intervalu padajoča.



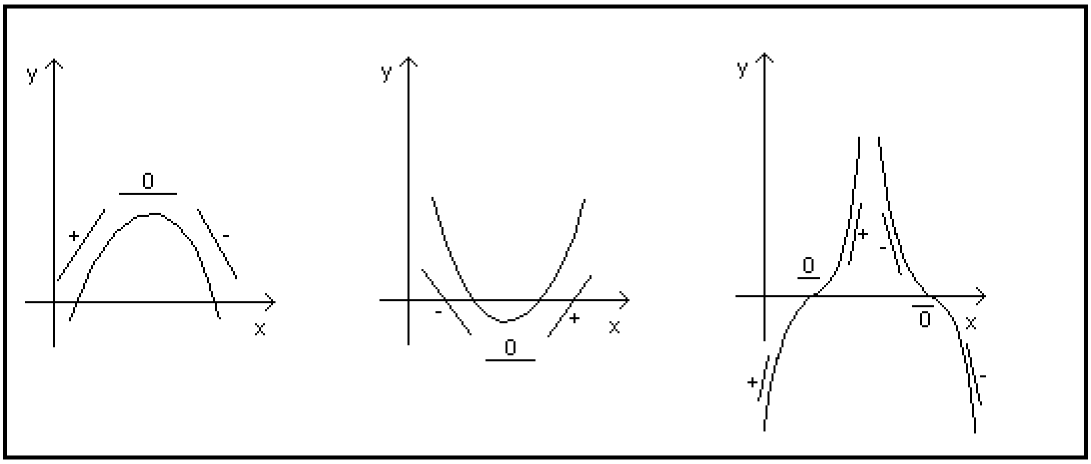
Slika 27: Naraščanje in padanje
Vir: Lasten

V točki x_0, kjer preide funkcija iz padanja v naraščanje ali iz naraščanja v padanje, ima lokalni ekstrem.

V točki lokalnega ekstrema je odvod enak 0.

$$f'(x_0) = 0$$

Ničlam odvoda pravimo **stacionarne točke**. V stacionarnih točkah je tangenta na krivuljo vzporedna abscisni osi. Ni pa nujno, da ima funkcija v vsaki stacionarni točki ekstrem.



Slika 28: Lok. maksimum, lok. minimum in prevoj
Vir: Lasten

Funkcija *f* ima v točki x_0 **lokalni minimum**, če je:

- $f'(x_0) = 0$ in
- odvod levo od točke x_0 je negativen, desno od x_0 pa pozitiven oziroma je drugi odvod pozitiven.

Funkcija *f* ima v točki x_0 **lokalni maksimum**, če je:

- $f'(x_0) = 0$ in
- odvod levo od točke x_0 je pozitiven, desno od x_0 pa negativen oziroma je drugi odvod negativen.

Če v okolici stacionarne točke x_0 odvod **ne spremeni predznaka**, funkcija v točki x_0 nima ekstrema. Pravimo, da ima funkcija v točki x_0 **prevoj ali obračaj ali pregib**.

Funkcija ima v točki x_0 prevoj, če ima njen prvi odvod v tej točki ekstrem. Velja, da je vrednost drugega odvoda v točki x_0 enak nič ($f''(x_0) = 0$) in pri prehodu skozi to točko spremeni predznak.

Opomba!
Če je funkcija odvedljiva na intervalu (a, b), je njen odvod spet funkcija, ki je odvedljiva na istem intervalu. V tem primeru lahko izračunamo odvod funkcije $f'(x)$, ki predstavlja **drugi odvod** funkcije $f(x)$ in ga označimo z znakom $f''(x)$

➔Primer 1:
Narišimo graf polinoma $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Izračunajmo ničle.

$3x^4 - 4x^3 = 0$

$x^3(3x-4) = 0$

$x_{1,2,3} = 0$

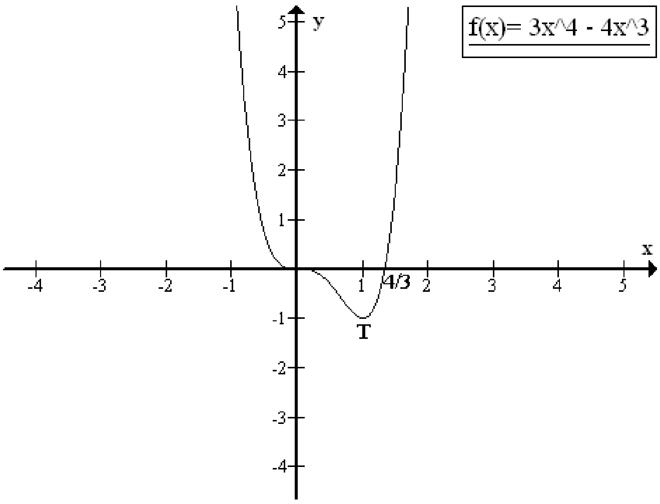
$x_4 = \frac{4}{3}$

Graf seka ordinatno os v točki P(0, 0), saj je $f(0) = 0$.

Obnašanje daleč od koordinatnega izhodišča:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3x^4 - 4x^3\right) = \infty$$

Poiščimo stacionarne točke.
Odvajajmo funkcijo:
$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$
Za stacionarne točke velja:
$f'(x) = 0$
Torej:
$12x^2(x-1) = 0$
Odvod je enak nič pri x = 0 in x = 1.
Za natančnejšo analizo stacionarnih točk potrebujemo drugi odvod.
$f''(x) = 36x^2 - 24x$
Določimo vrednost drugega odvoda v točki x = 0 in x = 1.
$f''(1) = 12$
Drugi odvod v točki x = 1 je pozitiven, zato ima funkcija v T(1, -1) lokalni minimum.
Drugi odvod v točki x = 0 je enak nič, zato ima funkcija v x = 0 prevoj.



Slika 29: Graf polinoma
Vir: Lasten

➔ Primer 2:

Nariši graf funkcije: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2}$.

Določimo ničle:

$x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x - 2)(x - 2) = 0$
$x_{1,2} = 2$
Vidimo, da je x = 2 dvakratna ničla, kar pomeni, da se bo v x = 2 krivulja dotikala abscisne osi.
Krivulja bo ordinatno os sekala v točki P(0, -2).
Določimo še pole naše funkcije.
$x^2 - 2 = 0$
$x = \pm\sqrt{2}$
Torej enačbi navpičnih asimptot $x = \pm\sqrt{2}$.
Z limito funkcije bomo ugotovili, kako se funkcija obnaša daleč stran od koordinatnega izhodišča.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=1$$

Daleč stran od koordinatnega izhodišča se funkcija približuje premici y = 1.
Poiščimo še ekstreme.
Določimo odvod funkcije!

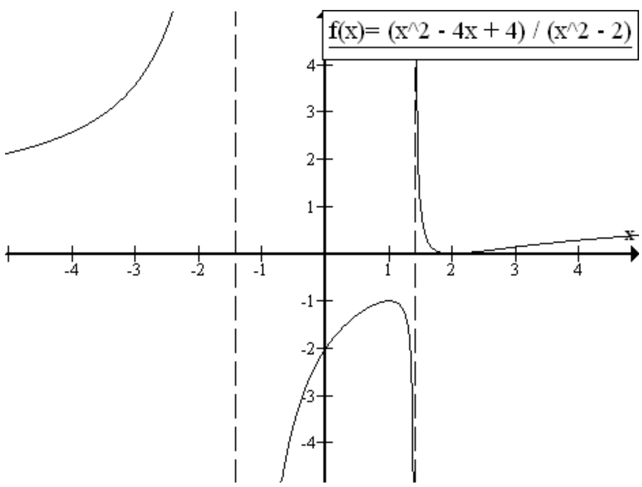
$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x^2-2)-(x^2-4x+4)\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$$

Odvod enačimo z nič in dobimo: $x_1 = 2$ in $x_2 = 1$.
Seveda moramo poiskati še drugi odvod.

$$f''(x)=\left(\frac{4x^2-12x+8}{x^4-4x^2+4}\right)^{!}=\frac{(8x-12)(x^4-4x^2+4)-(4x^3-8x)(4x^2-12x+8)}{(x^2-2)^4}=$$

$$=\frac{-8x^5+36x^4-56x^3-43x^2-48}{(x^2-2)^4}$$

Vrednost drugega odvoda funkcije v točki x = 2 je pozitivna $\left(f''(2)\succ 0\right)$, torej je v točki $T_1(2,0)$ lokalni minimum. V točki $T_2(1, -1)$ je lokalni maksimum, saj je vrednost drugega odvoda funkcije v točki x = 1 negativna $\left(f''(1)\prec 0\right)$.



Slika 30: Graf racionalne funkcije
Vir: Lasten

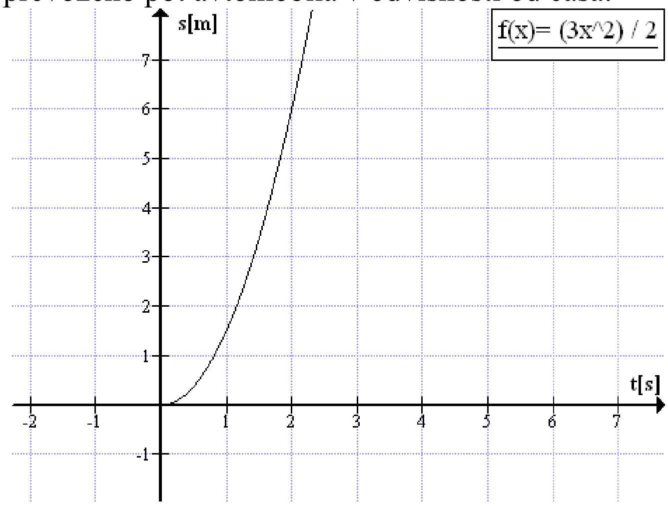
➔Primer 3:

Avtomobil pred semaforjem po prižgani zeleni luči spelje in enakomerno pospešuje s pospeškom a = 3m/s^2. Enačba s(t) = (at^2)/2 opisuje prevoženo pot avtomobila v času t z enakomernim pospeškom a.

a) Kako se spreminja hitrost avtomobila v odvisnosti od časa?

v(t) = at

b) Graf, ki prikazuje prevoženo pot avtomobila v odvisnosti od časa:



Slika 31: Prevožena pot avtomobila
Vir: Lasten

c) Po 3 sekundah je hitrost 9 m/s, prevožena pot pa 13,5 m; po 10 sekundah je hitrost 30 m/s, prevožena pot pa 150 m.

Povzetek:

V tem poglavju je analitično in geometrijsko definiran odvod funkcije. Spoznali ste pravila za odvajanje in lastnosti odvajanja osnovnih funkcij. Oboje znate uporabiti na prepostejših primerih. Zapisati znate enačbo tangente in normale na krivuljo, izračunati znate kot med krivuljama in s pomočjo stacionarnih točk narisati graf polinoma in racionalne funkcije.

Še nekaj nalog za utrjevanje:

1. Izračunajte odvod funkcije $f(x) = x^3 + 2x$ po definiciji odvoda.
2. Izračunajte odvod funkcije $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ po pravilu za odvajanje racionalne funkcije.
3. Zapišite enačbo normale na krivuljo $y = x^2$ v točki T(2, 4).
4. Narišite graf funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
5. Svoje znanja lahko še dodatno utrdite s pregledom snovi in nalog na spletnih naslovih: http://www.e-um.si in http://stud.prometna.net/index.php?option=com_uhp2&Itemid=30&task=viewpage&user_id=64&pageid=10.

3 INTEGRAL

CILJI:

Ob koncu tega poglavja boste:
- poznali definicijo nedoločenega in določenega integrala,
- znali tabelo integralov elementarnih funkcij,
- znali uporabiti pravili za integriranje vsote (razlike) in integriranje funkcije, pomnožene s konstanto,
- znali na preprostih primerih uporabiti pravili za integriranje z uvedbo nove spremenljivke in integriranje po delih,
- poznali in znali na preprostih primerih uporabiti nekatere lastnosti določenega integrala in zvezo med določenim in nedoločenim integralom,
- znali izračunati ploščine ravninskih likov z uporabo določenega integrala,
- znali izračunati prostornino preprostih rotacijskih teles.

V tem poglavju se boste seznanili s postopkom, ki je v nekem smislu obraten postopku odvajanja. Najbolj zanimivo spoznanje pa je, da so nekatere formule, ki ste jih spoznali v srednji šoli (za ploščino likov in prostornino teles) izpeljane prav s tem postopkom in sicer z uporabo določenega integrala. Naučili pa se boste tudi, kako izračunamo ploščino krivočrtnega lika.

3.1 DEFINICIJA NEDOLOČENEGA INTEGRALA

Doslej smo računali odvode in diferenciale funkcij, zdaj pa bomo iskali prvotno funkcijo F, katere odvod je F'.
Poiščimo prvotno funkcijo F, katere odvod F' je enak funkciji *f*(x) = $4x^3$.
Njen diferencial je dF = $4x^3$ dx.
(Saj vemo, da je odvod funkcije F'(x) = $\frac{dF}{dx}$ in diferencial funkcije F je enak dF = F'(x)dx.)
Sedaj uganemo prvotno funkcijo. Ni težko ugotoviti, da je prvotna funkcija: F(x) = x^4, saj vemo, da je njen odvod enak F'(x) = $4x^3$.
Ali je prvotna funkcija tudi G(x) = x^4 +2?
Tudi odvod funkcije G(x) je enak $4x^3$.
Kaj pa funkcija H(x)= x^4 – 45? Tudi njen odvod je $4x^3$. Tako bi lahko nadaljevali in bi ugotovili, da lahko osnovni prvotni funkciji prištejemo katerokoli realno število – konstanto C.
Zapišemo lahko, da je prvotna funkcija ali integral naše funkcije: F = x^4 + C.

Vidimo, da če je F(x) integral funkcije F', tedaj velja, da je za poljubno vrednost realne konstante C tudi funkcija F(x) + C integral funkcije F'(x). Torej, pri tem postopku dobimo množico prvotnih funkcij.

Postopek iskanja odvoda neke funkcije F imenujemo odvajanje. Sedaj smo iz odvoda funkcije *f* = F' iskali prvotno funkcijo. Obratno operacijo, ki nam omogoča iz danega odvoda F' (diferenciala dF) izračunati prvotno funkcijo F, imenujemo integriranje. Funkcijo F imenujemo prvotna funkcija. **Množico vseh prvotnih funkcij pa imenujemo nedoločeni integral funkcije *f***, če je *f* enaka odvodu F'.
Kar zapišemo:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + c$$

Odvod F' označimo s funkcijo *f*, in zapišemo definicijo nedoločenega integrala na naslednji način:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

$\int dx$ - imenujemo integralski znak
f(x) - imenujemo integrand
F(x) - imenujemo integral
C - integracijska konstanta
Odvod nedoločenega integrala je funkcija pod integralskim znakom. Diferencial nedoločenega integrala pa je celoten izraz pod integralskim znakom.
Za nekatere funkcije lahko nedoločene integrale (prvotne funkcije) uganemo.

➲Primer 1:
Poiščimo integral funkcije *f*(x) = cosx.
$\int \cos x dx = \sin x + C$
Saj vemo, da je (sinx)' = cosx.
Rešitev integriranja vedno preverimo z odvajanjem (*f*(x) + C)'.

3.2 TABELA INTEGRALOV ELEMENTARNIH FUNKCIJ

Podobno, kot smo zapisali tabelo odvodov elementarnih funkcij, bomo zapisali tudi tabelo integralov elementarnih funkcij.

$\int 1dx = x + C,$ $\quad$ $\text{ker}: (x + C)' = 1$

$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$ $\quad$ $\text{ker}: (\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$

Naj bo $x \in \Re, n \neq -1$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $\quad$ $\text{ker}: \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$

$\int \sin x dx = -\cos x + C,$ $\quad$ $\text{ker}: (-\cos x + C)' = \sin x$

$\int \cos x dx = \sin x + C,$ $\quad$ $\text{ker}: (\sin x + C)' = \cos x$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C,$ $\quad$ $\text{ker}: (\tan x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C,$ $\quad$ $\text{ker}: (-\cot x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ $\quad$ $\text{ker}: \left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x$

$\int e^x dx = e^x + C,$ $\quad$ $\text{ker}: (e^x + C)' = e^x$

Zapišimo še pravili za integriranje vsote funkcij in integriranje funkcije, pomnožene s konstanto.

1. Integral vsote funkcij je enak vsoti integralov posameznih funkcij.
Naj bosta *f* in *g* funkciji, za kateri integral obstaja.

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Dokaz:

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x)+g(x)$$

2. Konstantni faktor pred funkcijo, ki jo integriramo, lahko pišemo pred integralski znak.

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

Dokaz:
Sledi neposredno iz pravil za odvajanje.

$$\left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = af(x)$$

Primer 2:
Z uporabo tabele in pravil določi:

a) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

b) $\int \frac{\sqrt[5]{x}}{x}dx = \int x^{\frac{1}{5}-1}dx = \int x^{-\frac{4}{5}}dx = \frac{x^{-\frac{4}{5}+1}}{-\frac{4}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} + C = 5\sqrt[5]{x} + C$

c)

$$\int\left(6x^5 - 3x^4 - 8x^2 + 4x - 2\right)dx = \int 6x^5dx - \int 3x^4dx - \int 8x^2dx + \int 4xdx + \int 2dx =$$

$$= 6\int x^5dx - 3\int x^4dx - 8\int x^2dx + 4\int xdx + 2\int dx =$$

$$= 6\frac{x^6}{6} - 3\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 2x + C =$$

$$= x^6 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + C$$

Primer 3:
Preoblikuj in integriraj.

$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{\left(x^2 + x^{-2}\right)^2}}{x^3}dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3}dx =$$

$$= \int\left(\frac{1}{x} + x^{-5}\right)dx = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$$

Primer 4:

Izračunajmo integral: $\int \frac{4\sin 2x}{3\sin x\cos^3 x}dx$.

Najprej poenostavimo izraz pod integralskim znakom in šele nato integrirajmo.

$$\int \frac{4\sin 2x}{3\sin x\cos^3 x}dx =$$

$$\frac{4}{3}\int \frac{\sin 2x}{\sin x\cos^3 x}dx = \frac{4}{3}\int \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos^3 x}dx = \frac{8}{3}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{8}{3}\tan x + C$$

Primer 5:

Poiščimo funkcijo g, katere graf poteka skozi točko T(4, 5), njen odvod pa je funkcija $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Integrirajmo funkcijo g':

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

Dobili smo množico funkcij g(x) = $2\sqrt{x} + C$, ki imajo enak odvod, razlikujejo se le za aditivno konstanto C. Med njimi izberimo tisto, katere graf poteka skozi dano točko T(4, 5).

$$5 = 2\sqrt{4} + C$$

$$C = 1$$

$$g(x) = 2\sqrt{x} + 1$$

3.3 INTEGRIRANJE S POMOČJO UVEDBE NOVE SPREMENLJIVKE (INTEGRIRANJE S SUBSTITUCIJO)

Uvedba nove spremenljivke nam velikokrat poenostavi integriranje.
Če je funkcija f(x) integral funkcije y(x) definirana na (a, b), torej, če je $\int y(x)dx = f(x)$ in če je g(t) poljubna odvedljiva funkcija spremenljivke t takšna, da je x = g(t), potem je:

$$\int y(x)dx = \int y\big(g(t)\big)\cdot g'(t)dt = f(x)$$

Vemo, da je dx = g'(x)dt.

Funkcijo g(t) izberemo tako, da postane integrand po substituciji x = g(t) in dx = g'(t)dt tak, da znamo določiti integral.

Nekaj napotkov glede izbire substitucije.

a) $\int y(ax+b)dx$

Uvedemo novo spremenljivko: ax + b = t.
Izrazimo x.

$$x = \frac{1}{a}t - \frac{b}{a}$$

Določimo še dx.

$$dx = \left(\frac{1}{a}t - \frac{b}{a}\right)' dt$$

Od tod je:

$$dx = \frac{1}{a}dt$$

Torej:

$$\int y(ax+b)dx = \int y(t)\cdot\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int y(t)dt.$$

➔<u>Primera:</u>

1. $\int (3x+1)^4 dx$

Uvedimo novo spremenljivko: 3x + 1 = t.
Odvajajmo: (3x + 1)'dx = dt in od tod: 3dx = dt.
Izrazimo dx:

$$dx = \frac{1}{3}dt\ .$$

Sedaj lahko zapišemo:

$$\int (3x+1)^4 dx = \int t^4 \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^4 dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{15}t^5 + C = \frac{1}{15}(3x+1)^5 + C$$

2. $\int \sin(5x-2)dx$

Če želimo uvesti primerno novo spremenljivko, moramo razmisliti, na kateri primeren in ugoden integral bi se lahko funkcija prevedla.
Uvedimo 5x – 2 = t in 5dx = dt.

Izrazimo $dx = \frac{1}{5}dt$.

Torej: $\int \sin(5x-2)dx = \int (\sin t)\cdot\frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\int \sin t dt = \frac{1}{5}(-\cos t) + C = -\frac{1}{5}\cos(5x-2) + C$

b) Integrali tipa:

$$\int y^n(x)\cdot y'(x)dx\ .$$

V takšnih primerih zapišemo: y(x) = t in nato dobimo y'(x)dx = dt.
Integral lahko pišemo:

$\int y^n(x)\cdot y'(x)dx = \int t^n dt$. Ločimo dva primera:

1) Če je n = –1:

$$\int y^{-1}(x)\cdot y'(x)dx = \int \frac{y'(x)dx}{y(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|y(x)| + C$$

2) Če je $n \in \Re \quad in \quad n \neq -1$

$$\int y^n(x) \cdot y'(x)dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{y^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

➔Primer 1:
Integrirajmo:

$$\int \frac{x^2}{7x^3+2} dx = \quad preoblikujmo:$$

$$\int (7x^3+2)^{-1} \cdot x^2 dx$$

Uvedimo novo spremenljivko:

$$7x^3 + 2 = t$$

$$21x^2 dx = dt$$

$$x^2 dx = \frac{dt}{21}$$

Torej imamo:

$$\int (7x^3+2)^{-1} \cdot x^2 dx = \frac{1}{21}\int t^{-1} dt = \frac{1}{21}\ln|t| + C = \frac{1}{21}\ln|(7x^3+2)| + C$$

➔Primer 2:
Integrirajmo: $\int (8x^7+3)^3 x^6 dx$
Uvedemo novo spremenljivko:

$$8x^7 + 3 = t$$

$$56x^6 dx = dt$$

$$x^6 dx = \frac{dt}{56}$$

Dobimo:

$$\int (8x^7+3)^3 x^6 dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{56} = \frac{1}{56}\int t^3 dt = \frac{1}{56 \cdot 4} t^4 + C = \frac{1}{56 \cdot 4}(8x^7+3)^4 + C$$

3.4 INTEGRIRANJE PO DELIH (PER PARTES) ALI DELNO INTEGRIRANJE

Naj bosta u(x) in v(x) odvedljivi funkciji na intervalu (a, b), tedaj je tudi funkcija $u(x) \cdot v(x)$ odvedljiva. Vemo, da je
$(u(x) \cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + u(x)v'(x)$.
Torej je funkcija $u(x) \cdot v(x)$ in integral funkcije $u(x)' \cdot v(x) + u(x)v'(x)$. Zapišemo:

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x) \cdot v(x)$$

Vemo že, da velja:
$\int u'(x) \cdot v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x).$
Izrazimo $\int u'(x) \cdot v(x)dx$ in dobimo pravilo za integriranje po delih:

$$\int \mathrm{u}' \cdot \mathrm{v}\mathrm{dx} = \mathrm{u} \cdot \mathrm{v} - \int \mathrm{u}\mathrm{v}'\mathrm{dx}$$

Nalogo znamo rešiti, kadar znamo določiti integral na desni.

Primer 1:

$\int x^5 ln|x| dx$

Uporabimo zgornje pravilo: $\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int uv' dx$

Določimo si: $x^5 = u'$.

Torej je $u = \int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6$.

Vemo, $v = ln|x|$, torej je $v' = \frac{1}{x}$.

$$\int x^5 \ln|x| dx = u \cdot v - \int uv' dx = \frac{1}{6}x^6 \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{6}x^6 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{1}{6}x^6 \ln|x| - \frac{1}{6}\int x^5 dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 \ln|x| - \frac{1}{6}\frac{x^6}{6} + C = \frac{x^6}{36}(6\ln|x| - 1) + C$$

Primer 2:

$\int \sin x \cos x dx$

Naj bo u=sinx in od tod dobimo: du = cosxdx.
Vidimo: dv = cosxdx in od tod v = sinx.
Uporabimo pravilo za integriranje po delih.

$\int \sin x \cos x dx = u \cdot v - \int uv' dx = \sin^2 x - \int \sin x \cdot \cos x dx$.

Integral na desni strani je isti kot naš prvotni integral, zato lahko zapišemo:

$2\int \sin x \cos x dx = \sin^2 x$ in od tod:

$\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

Pri določevanju nedoločenih integralov si v praksi pomagamo z že določenimi integrali, ki jih najdemo v priročnikih. Na primer: Bronštejn-Semendjajev: Matematični priročnik.

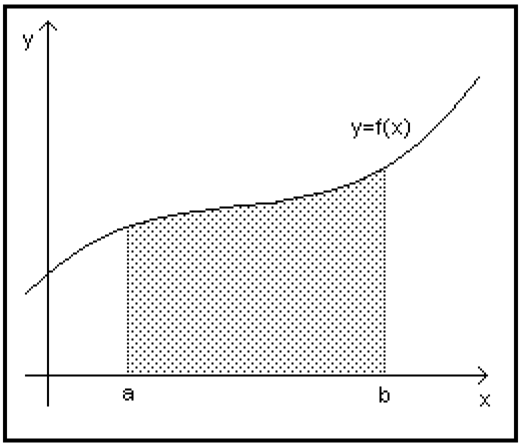
3.5 DOLOČENI INTEGRAL

Določevanje ploščin likov, omejenih s samimi ravnimi črtami, je dokaj enostavno. Če poznamo pravokotnika, lahko z elementarnimi prijemi (razdeljevanja in dopolnjevanja) določimo ploščino kateregakoli ravninskega lika, ki ga omejuje lomljena ravna črta. Pri določevanju ploščin likov, omejenih s krivimi črtami, je potreben limitni postopek. Približno so ploščine in analogno tudi prostornine določevali že zelo zgodaj v zgodovini (Babilonci, Egipčani,…) Zaradi potrebe po čim natančnejšem določevanju ploščin in prostornin se je veliko matematikov ukvarjalo s problemom, kako čim natančneje določiti ploščine in prostornine.

Možje, ki so se zelo približali temu oziroma veliko prispevali k natančni definiciji in uspešni uporabi določenega integrala, so:
B. Cavalier (1598–1647)
I. Newton (1643–1727)
G. W. Leibniz (1646–1716)
G. F. I'Hospital (1661–1704)
J. L. Lagrange (1736–1813)
A. L. Couchy (1789–1857)
B. Riemann (1826–1866) je bil prvi, ki je povsem natančno definiral pojem določenega integrala.

DEFINICIJA DOLOČENEGA INTEGRALA

Naj bo f na intervalu $[a,b]$ zvezna in pozitivna. V koordinatni sistem narišimo ustrezno krivuljo, ki leži nad osjo x. Krivulja določa na intervalu $[a,b]$ skupaj z abscisno osjo krivočrtni lik.



Slika 32: Ploščina krivočrtnega lika
Vir: Lasten

Za izračun ploščine tega lika bomo uporabili zamisel, ki jo je uporabil že Arhimed.
Razdelimo interval $[a,b]$ na n manjših, enako širokih podintervalov in nad njimi v lik včrtajmo pravokotnike. Približno ploščino posameznega pravokotnika dobimo tako, da množimo širino posameznega intervala (Δx_k) s funkcijsko vrednostjo točke na spodnji meji posameznega intervala($f(z_k)$).
Vsota ploščin pravokotnikov je:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(z_k) = \mathrm{S}$$

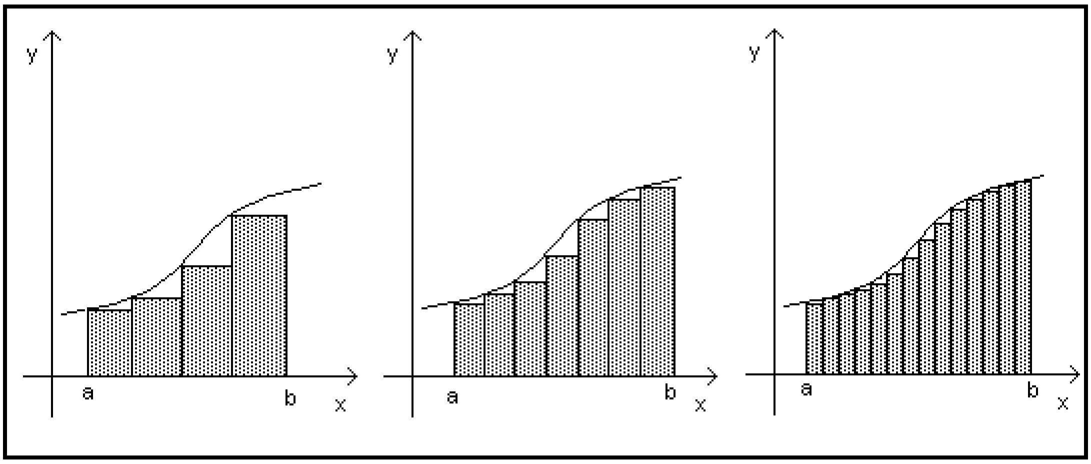
$\sum_{k=1}^{n}$ - pomeni, da v produkt vstavimo za indeks vse vrednosti od 1 do n in jih seštejemo.

Torej:

$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(z_k) = \Delta x_1 \cdot f(z_1) + \Delta x_2 \cdot f(z_2) + \Delta x_3 \cdot f(z_3) + ... + \Delta x_n \cdot f(z_n)$

Vsota ploščin pravokotnikov je nekoliko manjša od ploščine danega lika, saj se pravokotniki ne prilegajo popolnoma krivulji.

Čim manjši so podintervali in iz tega čim ožji so pravokotniki, tem boljši približek za iskano ploščino lika je vsota ploščin pravokotnikov.



Slika 33: Delitev intervala
Vir: Lasten

Pravimo, da vsote ploščin z vedno »boljšo« delitvijo intervala $[a,b]$ limitirajo k številu, ki je točna ploščina lika med grafom funkcije in abscisno osjo na intervalu $[a,b]$.
Ploščina našega lika je limita zgornje vsote, ko gredo vsi Δx_k proti nič. To limito imenujemo **določeni integral** funkcije *f* na intervalu $[a,b]$ in ga zapišemo:

$$S=\lim_{\substack{\Delta x_k \to o \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Kjer je
a – spodnja meja določenega intervala,
b – zgornja meja določenega integrala,
$[a,b]$ – interval integriranja.

Zapis $\int_a^b f(x)dx$ beremo kot določeni integral funkcije *f* v mejah med a in b.

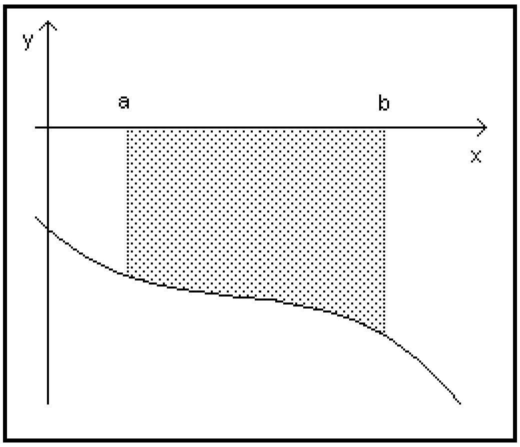
Zapišimo še enkrat definicijo določenega integrala:

Določeni integral funkcije *f* je limita vsote $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(z_k)$, ko gredo vse širine intervalov Δx_k proti nič.

Ugotovili smo torej, da če je *f*(x) > 0 na celotnem intervalu $[a,b]$, je ploščina lika med grafom funkcije in abscisno osjo enaka določenemu integralu $\int_a^b f(x)dx$.

Kaj pa, če funkcija *f* ni pozitivna na celotnem intervalu $[a,b]$?

a) Naj bo *f* na celotnem intervalu negativna, torej f(x) < 0.

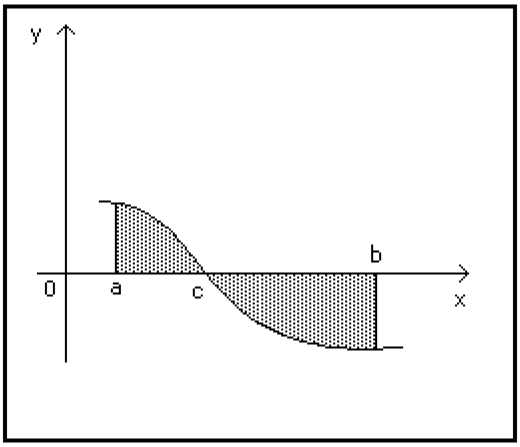


Slika 34: Funkcija je na danem intervalu negativna
Vir: Lasten

Limita vsote $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(z_k)$ je negativna ploščina lika med grafom funkcije in osjo x.

$$-\int_a^b f(x)dx = \mathrm{S}$$

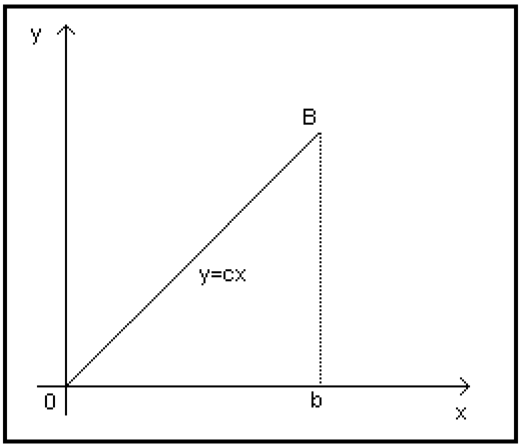
b) Naj bo funkcija *f* na intervalu deloma negativna, deloma pozitivna. Določeni integral je enak razliki ploščine lika, ki ga krivulja omejuje z osjo x na intervalu $[a,c]$, in ploščine, ki ga krivulja omejuje z osjo x na intervalu $[c,b]$.



Slika 35: Funkcija je deloma pozitivna, deloma negativna
Vir: Lasten

➔Primer:

Izračunajmo integral $\int_0^b cxdx$ za določena pozitivna c in b.



Slika 36: Ploščina trikotnika
Vir: Lasten

$$\int_0^b f(x)dx = \lim_{\substack{\Delta x_k \to o \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\cdot \Delta x_k \ .$$

Tu je f(x) = cx. Opravka imamo z zvezno funkcijo. Torej obstaja določeni integral te funkcije. Razdelimo interval (0, b) na n enakih intervalov. Dolžina enega intervala je $\Delta x_k = \frac{b}{n}$. Funkcijsko vrednost vzamemo na koncu vsakega delnega intervala.

Iz tega dobimo vsoto:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(z_k) = \frac{bc}{n}\Delta x_k + \frac{2bc}{n}\Delta x_k + \frac{3bc}{n}\Delta x_k + ... + \frac{nbc}{n}\Delta x_k = \frac{bc\Delta x_k}{n}(1+2+3+...+n)$$

Upoštevajmo, da je 1 + 2 + 3 + … + n = $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Torej dobimo:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(z_k) = \frac{1}{2}bc(n+1)\Delta x_k = \frac{1}{2}cb^2(1+\frac{1}{n}).$$

Iz tega vidimo, da je:

$$\int_0^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{cb^2}{2}(1+\frac{1}{n}) = \frac{cb^2}{2}(1+0) = \frac{cb^2}{2}.$$

Dobili smo že poznano formulo za izračun ploščine trikotnika.

LASTNOSTI DOLOČENEGA INTEGRALA

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = ...$

Za integracijsko spremenljivko smemo vzeti poljubno črko.

DOKAZ:
Ni težko spoznati pravilnosti trditve. Zamenjava črk za integracijsko spremenljivko pomeni to, da smo abscisno os drugače imenovali. Ploščina lika pa ostaja nespremenjena, ker je lik ostal isti.

2) Če sta meji določenega integrala med seboj enaki, je vrednost integrala enaka nič.

DOKAZ:
Sledi iz premisleka. Če sta meji med seboj enaki, imamo namesto z likom opravka z daljico. Ploščina pa je enaka nič.

3) Zamenjava mej pri določenem integralu pomeni le spremembo predznaka integrala.

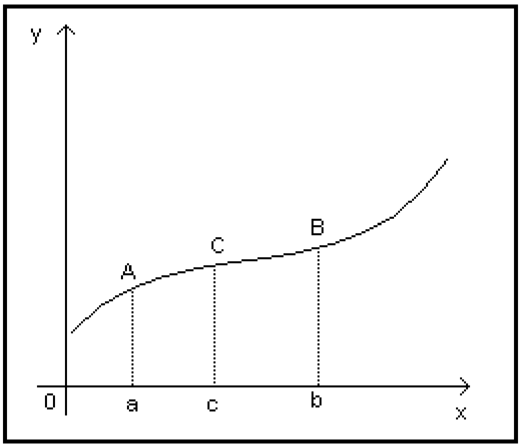
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

DOKAZ:
Naj bo a > b. Vmesne točke, s katerimi razdelimo interval $[a,b]$, so urejene v nasprotnem vrstnem redu: $a = x_0 > x_1 > x_2 > ... > x_n = b$. Zato je razlika $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ negativna. Zato je negativen tudi produkt $f(z_k)\Delta x_k$, če je *f*(x) pozitivna; če pa je funkcija *f* negativna, pa je produkt $f(z_k)\Delta x_k$ pozitiven. Vsota $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(z_k)$ limitira v obeh primerih proti isti ploščini lika, samo da je pri zamenjavi mej nasprotno predznačena.

4) Naj bo *f* zvezna na intervalu $[a,b]$. Če je $a < c < b$, je:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

DOKAZ:



Slika 37: Vsota ploščin
Vir: Lasten

Ta formula pomeni: vsota ploščine lika acCA in ploščine lika cbBC je enaka ploščini lika abBA. Če obstajajo vsi trije integrali, je zgornja trditev resnična. Vemo, da če je funkcija zvezna na intervalu $[a,b]$, je zvezna tudi na podintervalih $[a,c]$ in $[c,b]$ in torej obstajajo integrali $\int_a^c f(x)dx$; $\int_c^b f(x)dx$; $\int_a^b f(x)dx$.

ZVEZA MED DOLOČENIM IN NEDOLOČENIM INTEGRALOM

Osnovni izrek integralnega računa ali Newton-Leibnizova formula

Določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ je enak razliki vrednosti nedoločenega integrala F(x) na zgornji in spodnji meji:

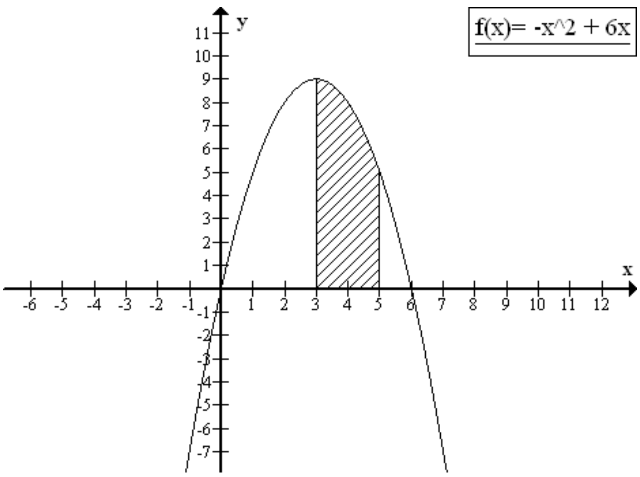
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ če je } F'(x) = f(x).$$

Najprej bomo poiskali funkcijo F(x), ki je nedoločeni integral, potem pa od vrednosti te funkcije na zgornji meji F(b) odšteli vrednost na spodnji meji F(a).

Primer 1:

Izračunajmo $\int_3^5 \left(-x^2 + 6x\right)dx$.

Narišimo graf funkcije $f(x) = -x^2 + 6x$ in označimo lik, katerega ploščino iščemo.



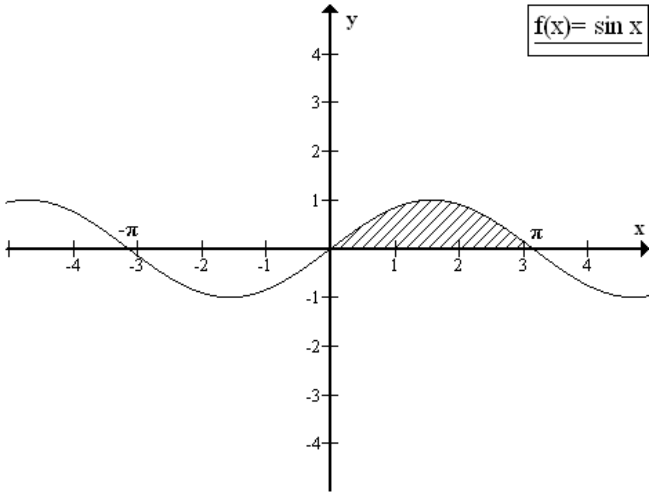
Slika 38: Ploščina lika
Vir: Lasten

Pri računanju določenega integrala najprej izračunamo nedoločeni integral, potem dobljeni izraz uredimo, na koncu odštejemo od vrednosti na zgornji meji vrednost na spodnji meji.

$$\int_3^5 \left(-x^2 + 6x\right)dx = -\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2}\Big|_3^5 = \left(-\frac{5^3}{3} + 6\frac{5^2}{2}\right) - \left(-\frac{3^3}{3} + 6\frac{3^2}{2}\right) = 15\frac{1}{3}$$

Primer 2:

Izračunajmo določeni integral $\int_0^{\pi} \sin x dx$

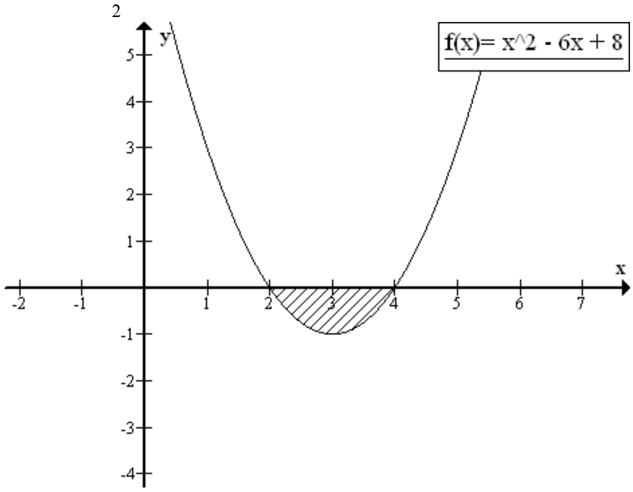


Slika 39: Ploščina lika
Vir: Lasten

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

Primer 3:

Izračunajmo določeni integral $\int_2^4 \left(x^2 - 6x + 8\right)dx$.



Slika 40: Ploščina lika
Vir: Lasten

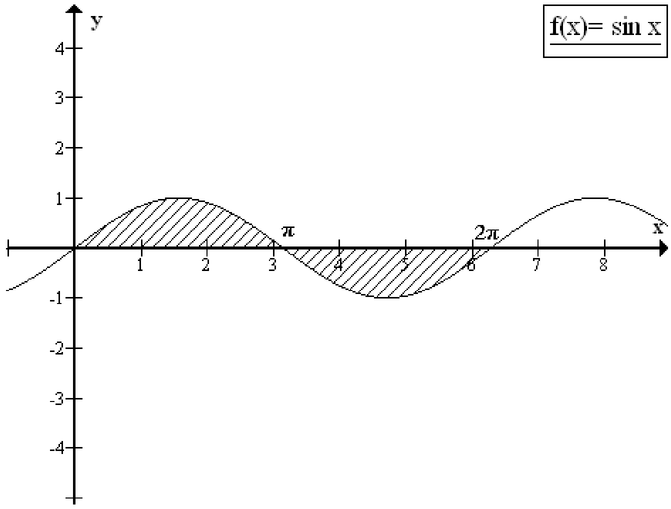
Funkcija je na intervalu $[2,4]$ negativna. Torej je integral $\int_2^4 \left(x^2 - 6x + 8\right)dx = -S$.

$$\int_2^4 \left(x^2 - 6x + 8\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$\left(\frac{4^3}{3} - 3\cdot 4^2 + 8\cdot 4\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 3\cdot 2^2 + 8\cdot 2\right) = 5\frac{1}{3} - 6\frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.$$ Torej je $S = \frac{4}{3}$

Primer 4:

Izračunajmo ploščino osenčenega dela na sliki, pri katerem je krivulja graf funkcije *f*(x) = sinx.



Slika 41: Ploščina lika
Vir: Lasten

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = (-\cos x)_0^{\pi} - (-\cos)_{\pi}^{2\pi} =$$

$$-(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) = -(-1 - 1) + (1 - (-1)) = 4$$

UPORABA DOLOČENEGA INTEGRALA

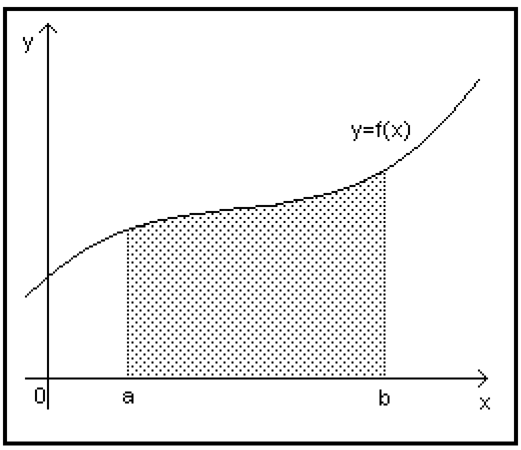
Ploščina ravninskega lika

Ukvarjanje s ploščinami likov (podobno velja tudi za prostornine teles) je dolgotrajen in zamuden posel. Mi se bomo računanja ploščin (prostornin) samo dotaknili.

a) Ploščina lika, ki ga omejuje os x, graf pozitivne funkcije *f* in vzporednici ordinatni osi v krajiščih intervala $[a,b]$.

Izračunamo jo po že znanem obrazcu:

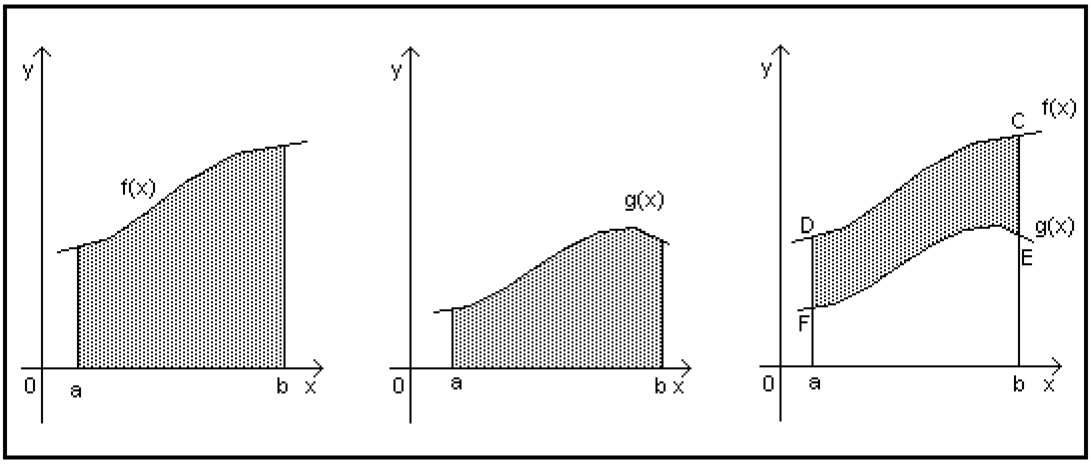
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



Slika 42: Ploščina lika, omejenega z osjo x in grafom funkcije
Vir: Lasten

b) Ploščina lika, ki ga omejujeta dve, na intervalu $[a,b]$ zvezni in pozitivni, funkciji *f* in *g*.

Naj bo vrednost funkcije *f* večja ali kvečjemu enaka vrednosti funkcije *g*. To pomeni, da graf funkcije *f* leži povsod nad grafom funkcije *g* na danem intervalu.



Slika 43: Ploščina lika, omejenega z dvema krivuljama
Vir: Lasten

Ploščina osenčenega lika je enaka razliki ploščin likov abCD in abEF. Kar je:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \,.$$

Če je katera od funkcij negativna, lik, ki nastane, vzporedno premaknemo navzgor.
Pri računanju si vedno pomagamo s skico.

➔Primer 1:

Izračunajmo ploščino lika, ki ga določata krivulji $y = x^2 + x + 1$ in y = x + 2.
Izračunajmo, v katerih točkah se sekata parabola in premica.

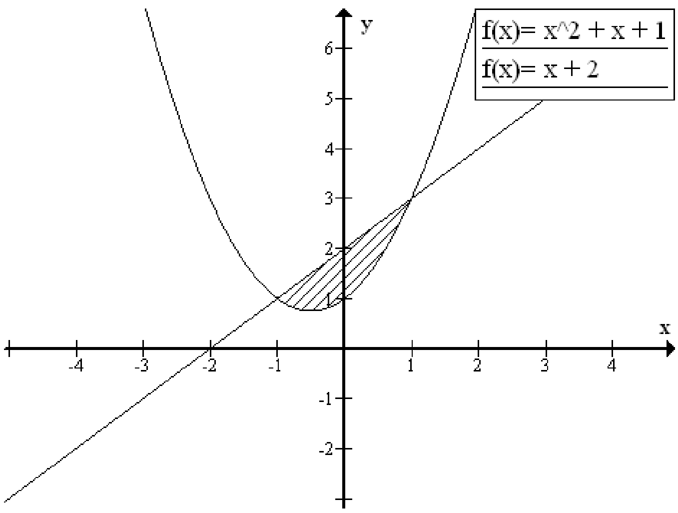
$x^2 + x + 1 = x + 2$

$x^2 - 1 = 0$

$(x-1)(x+1) = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$



Slika 44: Ploščina lika, omejenega s parabolo in premico
Vir: Lasten

Računali bomo torej določeni integral na intervalu $[-1,1]$:

$$S=\int_{-1}^{1}\left((x+2-(x^2+x+1)\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$$

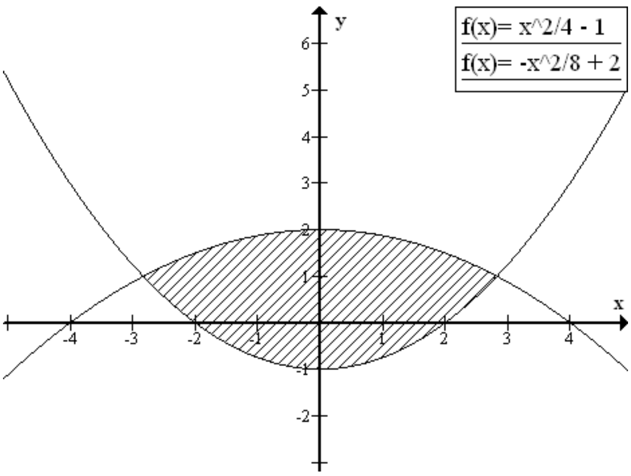
<u>Primer 2:</u>

Določimo ploščino med parabolama:

$$y=\frac{1}{4}x^2-1 \quad in$$

$$y=-\frac{1}{8}x^2+2$$

Pri računanju si pomagamo s sliko.



Slika 45: Ploščina lika med dvema parabolama
Vir: Lasten

Določimo presečišči med krivuljama.

$$\frac{x^2}{4}-1=-\frac{x^2}{8}+2$$

$$2x^2-8=-x^2+16$$

$$x^2=8$$

$$x_{1,2}=2\sqrt{2}$$

Ker sta obe funkciji sodi, ordinatna os deli lik na dva simetrična dela in lahko določimo ploščino enega dela in dobljeni rezultat podvojimo.

$$2\cdot\int_{0}^{2\sqrt{2}}\left(\frac{-x^2}{8}+2-\frac{x^2}{4}+1\right)dx=2\cdot\int_{0}^{2\sqrt{2}}\left(-\frac{3x^2}{8}+3\right)dx=2\left(-\frac{3x^3}{3\cdot 8}+3x\right)\Bigg|_{0}^{2\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$$

Z integriranjem si pomagamo pri reševanju različnih problemov. Oglejmo si preprost primer uporabe določenega integrala.

<u>Primer 3:</u>

Jekleno žico dolžine l = 1,5 m s polmerom r = 0.1 mm obremenimo tako, da se raztegne za x_1 =2 mm. Koliko dela moramo opraviti, da jo raztegnemo še za 8 mm?

Opravljeno delo izračunamo z določenim integralom A = $\int_{x_1}^{x_2} F dx$, pri čemer je

$F = E \cdot \frac{S \cdot x}{l}$ za to delo potrebna sila.

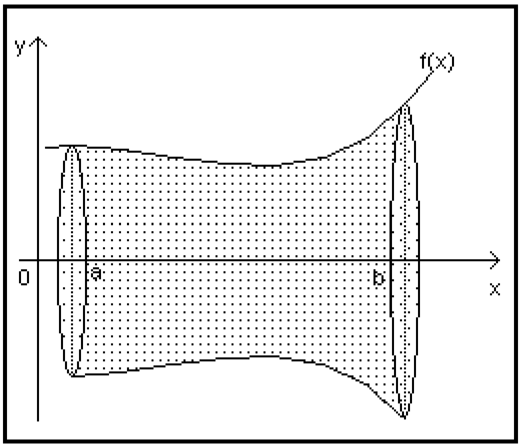
E = $2 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ je prožnostni modul jekla in S = πr^2 prečni presek jekla.

$$A = \int_2^{10} F dx = \int_2^{10} E \cdot \frac{S \cdot x}{l} dx = \int_2^{10} \frac{E\pi r^2 x}{l} dx = \frac{E\pi r^2}{l} \int_2^{10} x dx = \frac{E\pi r^2}{l} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_2^{10} = 80{,}4 J$$

Prostornina rotacijskih teles – vrtenin

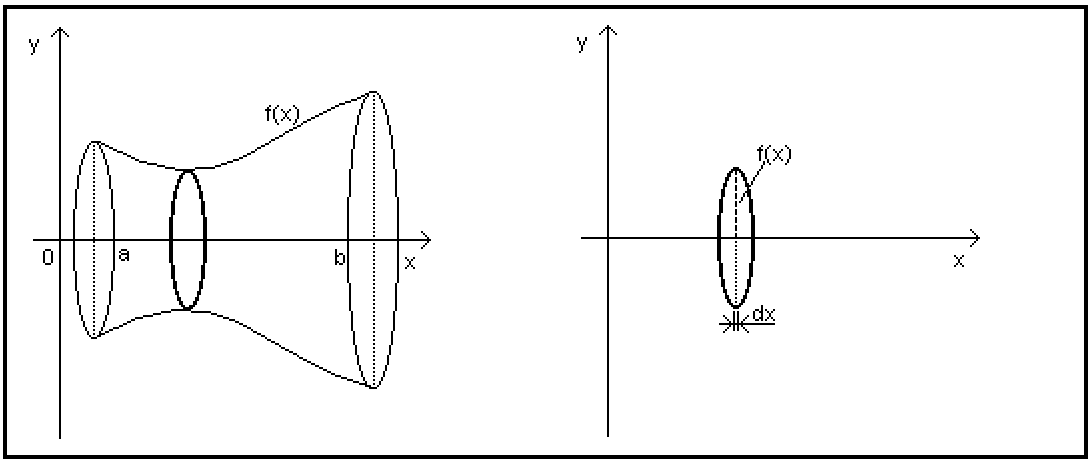
Kadarkoli se kakšen konkreten problem rešuje z določenim integralom, je osnovni pristop, da izberemo interval neodvisne spremenljivke in ga razdelimo na n delov. S tem se osnovni objekt razdeli na n manjših objektov in za vsak tak delni objekt vzamemo primeren približek. Tvorimo njihovo vsoto in iščemo limito te vsote. Kadar vsota približkov limitira k neki vrednosti, je ta vrednost nek določen integral.

Vzemimo funkcijo *f*, ki naj bo zvezna in pozitivna na intervalu $[a, b]$.
Zavrtimo lik, ki ga na tem intervalu omejujeta abscisna os in graf funkcije y = *f*(x) okoli abscisne osi za 360^0. Dobili smo vrtenino ali rotacijsko telo.



Slika 46: Vrtenina
Vir: Lasten

Postopajmo tako, kot smo opisali zgoraj. Vrtenino razrežemo na tanke rezine, zelo podobne valjem, katerih polmer osnovne ploskve je enak funkcijski vrednosti *f*(x), višina posameznega valja pa je enaka širini rezine dx. Prostornina rezine je potem majhen del celotne prostornine ali $dV = \pi (f(x))^2 dx$.
Saj je prostornina valja: $V = \pi r^2 \cdot v$.



Slika 47: Delitev intervala
Vir: Lasten

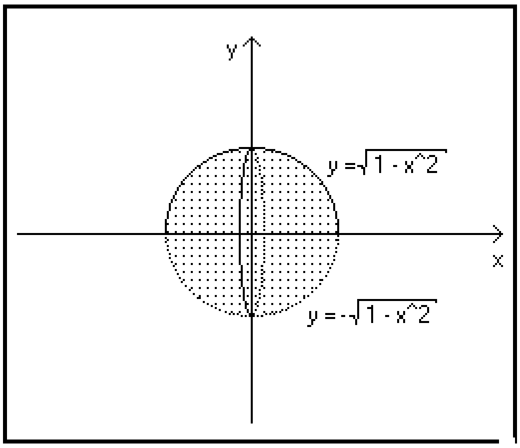
Če seštejemo prostornine vseh teh delov, torej, če integriramo $\int_a^b dV$, dobimo iskano formulo.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

➔<u>Primer 1:</u>

Izračunajmo prostornino krogle s polmerom 1.

Kroglo dobimo, če polkrog zavrtimo za 360^0 okoli abscisne osi. Vzemimo polkrog, ki je na intervalu $[-1,1]$ omejen z x osjo in krivuljo y=$\sqrt{1-x^2}$.



Slika 48: Prostornina krogle
Vir: Lasten

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(f(x)\right)^2dx==\pi\int_{-1}^{1}y^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\pi\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}$$

Primer 2:

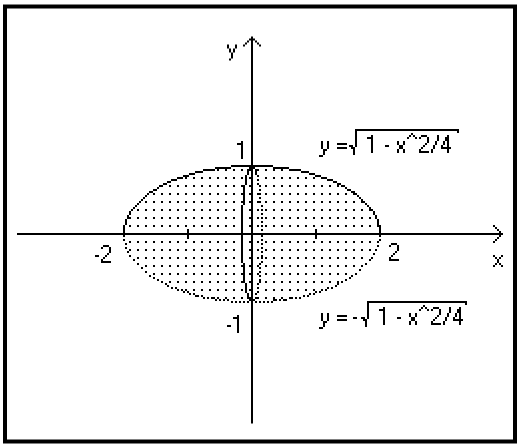
Zavrtimo elipso $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ okrog abscisne osi in izračunajmo prostornino nastalega telesa: ROTACIJSKEGA ELIPSOIDA.
Zapišimo enačbo za tisti del elipse, ki leži nad abscisno osjo:

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \qquad y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Pa poiščimo prostornino našega rotacijskega elipsoida.

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(f(x)\right)^2dx=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=$$

$$=\pi b^2\left(\frac{2a}{3}+\frac{2a}{3}\right)=\frac{4\pi b^2a}{3}$$



Slika 49: Prostornina elipsoida
Vir: Lasten

Povzetek:
V tem poglavju ste spoznali definicijo nedoločenega in določenega integrala. Znate uporabljati tabelo integralov elementarnih funkcij ter pravila za integriranje vsote (razlike) funkcij in integriranje funkcije pomnožene s konstanto. Na preprostih primerih znate uporabiti pravili za integriranje z uvedbo nove spremenljivke in integriranje po delih. Z določenim integralom znate izračunati ploščino ravninskih likov in prostornino preprostejših rotacijskih teles.

Še nekaj nalog za utrjevanje:

1. Izračunajte $\int \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^3}{x^{-\frac{2}{3}}} dx$.
2. Izračunajte $\int \frac{6x}{\sqrt{x^2-1}} dx$.
3. Izračunajte $\int_1^2 (x^2 - 4) dx$.
4. Izračunajte prostornino krogle s premerom 4.
5. Svoje znanja lahko še dodatno utrdite s pregledom snovi in nalog na spletnih naslovih: http://www.e-um.si in http://stud.prometna.net/index.php?option=com_uhp2&Itemid=30&task=viewpage&user_id=64&pageid=10.

4 LINEARNA ALGEBRA

CILJI:

Ob koncu tega poglavja boste:
- vedeli, kaj je matrika in kaj determinanta in poznali razliko med tema izrazoma,
- znali matrike množiti in seštevati,
- poznali lastnosti determinant,
- znali izračunati determinante 2., 3. in n-tega reda,
- znali rešiti preprosto matrično enačbo,
- vedeli, kaj je sistem linearnih enačb, kaj pomeni poiskati rešitev sistema linearnih enačb, kdaj je sistem rešljiv in koliko rešitev ima sistem, v primeru, ko je rešljiv,
- vedeli, kdaj je sistem enačb linearno odvisen in kdaj linearno neodvisen in kaj je rang sistema enačb,
- znali s pomočjo Gaussove metode in Cramerjevega pravila poiskati rešitev sistema enačb.

Matematično področje linearna (tudi vektorska) algebra izhaja po eni strani iz problematike reševanja sistemov linearnih enačb, po drugi strani pa iz računanja z usmerjenimi daljicami (vektorji). Danes je linearna algebra naziv za matematično strukturo, ki preučuje linearne (vektorske) prostore. V njeno področje sodi reševanje sistemov linearnih enačb, računanje z usmerjenimi daljicami, obravnavanje matrik …

4.1 MATRIKA

Sistem m · n števil, razporejenih v pravokotno tabelo iz m vrstic in n stolpcev, imenujemo matrika. Označimo jo:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

<u>Kvadratna matrika</u>

Za neko splošno točno določeno naravno število n $\geq$ 2 je n-vrstna matrika zapis:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

kjer so $a_{11} \dots a_{nn}$ števila, zapisana v n vrsticah tako, da se formira n stolpcev. Števila $a_{11} \dots a_{nn}$ imenujemo elementi (členi) matrike. Zapis a_{ij} pomeni, da gre za element v i-ti vrstici in v j-tem stolpcu.

Splošno lahko matriko za stalen n zapišemo na kratko: A=$\|a_{ij}\|$.

Matrika razsežnosti (m, n) je pravokotna shema m·n števil a_{ij} (i = 1, 2, … , m; j = 1, 2, … , n), razporejenih v m vrstic in n stolpcev.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrika A je razsežnosti 2x4.

Matriko, ki ima vse elemente enake 0, imenujemo **ničelna matrika**. Označimo jo z O.
Diagonalo, na kateri ležijo elementi $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$, imenujemo **glavna diagonala**. Kvadratni matriki, ki ima na eni strani glavne diagonale same ničle, rečemo **trikotna matrika**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Kvadratna matrika, ki ima od nič različne elemente le na glavni diagonali, se imenuje **diagonalna matrika**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonalna matrika, ki ima vse diagonalne elemente enake, se imenuje **skalarna**.
Če so vsi elementi na glavni diagonali enaki 1, se ta matrika imenuje **enota matrike** ali matrična enota, označimo jo z E
Kvadratna matrika je **simetrična**, če za vsak i in j velja $a_{ij} = a_{ji}$.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Transponiranje matrik

Če v matriki A=$\lfloor a_{ij} \rfloor_{(m,n)}$ **zamenjamo vrstice s stolpci**, tako da preide prva vrstica v prvi stolpec, druga vrstica v drugi stolpec in tako dalje, pravimo, da smo matriko transponirali in dobimo transponirano matriko matrike A.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{ji} \ \ (\text{n, m})$$

Če transponirano matriko še enkrat transponiramo, dobimo prvotno matriko.
Če je A simetrična matrika, je A^T = A, in obratno.
Matriki A = $\lfloor a_{ij} \rfloor_{(m,n)}$ in B = $\lfloor b_{ij} \rfloor_{(m,n)}$ sta enaki, če je za poljubna indeksa i in j element a_{ij} matrike A enak elementu b_{ij} matrike B.

A = B $\Leftrightarrow$ $\lfloor a_{ij} \rfloor = \lfloor b_{ij} \rfloor$ za vsak i in j.

Elementoma a_{ij} in b_{ij} pravimo istoležna.

Primerjamo lahko le matrike enakih razsežnosti.

➔<u>Primer</u>:
Kdaj sta matriki A in B enaki?

A = $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & x \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} y & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Matriki sta enaki, če je x = 3 in y = 2.
Če je za vsak i in j $a_{i,j} \succ b_{i,j}$ velja, da je matrika $A \succ B$.

RAČUNANJE Z MATRIKAMI

Imejmo dve matriki A in B razsežnosti (m, n).
a) Vsota matrik A in B je matrika razsežnosti (m, n), katere elementi so vsote istoležnih elementov obeh matrik.

$A = \lfloor a_{i,j} \rfloor_{(m,n)}$, $\quad B = \lfloor b_{i,j} \rfloor_{(m,n)}$

$$C = A + B = \lfloor c_{i,j} \rfloor_{(m,n)} + \lfloor a_{i,j} + b_{i,j} \rfloor_{(m,n)}$$

➔<u>Primer</u>: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

Pri seštevanju veljata zakona: - komutativnost A + B = B + A in
- asociativnost (A + B) + C = A + (B + C), kjer so matrike A, B in C matrike enakih razsežnosti.

Naj velja, da je A + B = 0. Matriko B v takem primeru imenujemo nasprotna matrika matrike A in jo označimo z –A.

$-A = \lfloor -a_{ij} \rfloor_{(m,n)}$

➲Primer: A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 9 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad -A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -9 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

b) Razlika matrik $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{(m,n)}$ in $B = \lfloor b_{i,j} \rfloor_{(m,m)}$, torej C = A – B, je enaka vsoti matrik A in –B.

C = A – B = A + (–B) = $\lfloor c_{ij} \rfloor_{(m,m)} = \lfloor a_{ij} + (-b_{ij}) \rfloor_{(m,m)}$

➲Primer:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

c) Produkt matrike A s številom a je matrika, katere elementi so elementi matrike A pomnoženi z a.

$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{(m,n)}$; $aA = a\lfloor a_{ij} \rfloor_{(m,n)} = \lfloor a \cdot a_{ij} \rfloor_{(m,n)}$

➲Primer:

Določimo matrike 2A, -1A in –2A.

A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

2A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \\ 0 & -8 & 10 \end{bmatrix}$ $\quad$ –1A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad$ –2A = $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & -10 \end{bmatrix}$

Lastnosti množenja matrik s številom:(a in b sta realni števili; A in B sta matriki razsežnosti (m,n))

- asociativnost a(bA) = (ab)A
- distributivnost glede na skalarni faktor (a + b)A = aA + bA
- distributivnost glede na matrični faktor a(A + B) = aA + aB
- $(aA)^T = aA^T$

d) Linearna kombinacija vektorjev

Definicija:

Naj bodo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ poljubna realna števila, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ pa vektorji enakih razsežnosti, potem imenujemo vektor $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \ldots + a_nA_n = \sum_i^n a_i A_i$ linearna kombinacija vektorjev $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

(Matriko tipa (1, m) imenujemo vektor.)

Primer:

Podani so vektorji A, B, C.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 \\ 28 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Vidimo, da lahko vektor C zapišemo, kot linearno kombinacijo vektorjev A in B.
C = 2A + 3B
Definicija:
Vektorji $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ so linearno neodvisni, če je linearna kombinacija $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \dots + a_nA_n = 0$, le če so vsa števila $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ enaka 0.
Vektorji A_i so linearno odvisni, če je njihova linearna kombinacija ničelni vektor in pri tem niso vsa števila a_i enaka 0. (Pri tem je $i = 1, 2, 3, \dots, n$)

Če je eden od vektorjev $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ linearna kombinacija ostalih, so vektorji $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ linearno odvisni.

e) Množenje matrik
Množenje dveh matrik je izvedljivo samo v primeru, ko se število stolpcev matrike A ujema s številom vrstic matrike B. Produkt ima toliko vrstic kot matrika A in toliko stolpcev kot matrika B.
Definicija:
Produkt matrik $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{(m,n)}$ in $B = \lfloor b_{i,j} \rfloor_{(n,p)}$ je matrika $C = AB = \lfloor c_{i,j} \rfloor_{(m,p)}$, kjer je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

Element c_{ij} matrike C dobimo tako, da skalarno množimo i-to vrstico matrike A in j-ti stolpec matrike B.

Primer 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot(-2) & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-2) & 0\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) + 4\cdot(-2) & 3\cdot 2 + (-2)\cdot 3 + 4\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -8 & 18 \\ -3 & 16 \end{bmatrix}$$

Primer 2:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Primer 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 6 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

Lastnosti množenja matrik:

- asociativnost (AB)C = A(BC)
- distributivnost (A+B)C = AC + AB
- $(AB)^T = B^T A^T$

f) Inverzna ali obratna matrika
Ima analogen (podoben) pomen, kot obratno število pri realnih številih.
Definicija:
A naj bo kvadratna matrika, E enota matrike istega reda.
Če obstaja kvadratna matrika X, ki zadošča pogojema:
AX = E in
XA = E
jo imenujemo inverzna ali obratna matrika matrike A in jo označimo z A^{-1}.

Matrika, pri kateri obstaja inverzna matrika, se imenuje obrnljiva.

Primer:

Ali je matrika B obratna matrika matrike A!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot(-1) & 2\cdot(-5) + 5\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot(-5) + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + (-5)\cdot 1 & 3\cdot 5 + (-5)\cdot 3 \\ -1\cdot 2 + 2\cdot 1 & -1\cdot 5 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Torej je $B = A^{-1}$.

Kako določimo obratno matriko neke obrnljive matrike? Pomagamo si z definicijo obratne matrike.
Vemo: $AA^{-1} = E$
$A^{-1}A = E$

Primer 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$ in naj bo $$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$ neznana obratna matrika.

Vemo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz prve enačbe dobimo sistem štirih enačb s štirimi neznankami:

$x_{11} - 3x_{21} = 1$
$-2x_{11} + 7x_{21} = 0$
Torej je $x_{11} = 7$ in $x_{21} = 2$

$x_{12} - 3x_{22} = 0$
$-2x_{12} + 7x_{22} = 1$
Torej je $x_{12} = 3$ in $x_{22} = 1$
Dobljene vrednosti morajo ustrezati tudi drugi enačbi.

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Torej je $X = A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Kako določimo obratno matriko v splošnem pri matrikah reda n ?
Naj bo A = $\lfloor a_{ij} \rfloor$ kvadratna matrika reda n in det A njena determinanta. V primeru, če je det A $\neq$0, so elementi obratne matrike enolično določeni z enačbo:

$b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det A}$, kjer so i, j = 1, 2, 3, … , n in je A_{ji} kofaktor, ki pripada elementu a_{ji}.

➔Primer 2:

Poiščimo obratno matriko matrike A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Preverimo ali obratna matrika sploh obstaja. Determinanta ne sme biti enaka 0.
Determinanta matrike A det A = –99 $\neq$ 0, torej obratna matrika obstaja.
Določimo kofaktorje vseh elementov matrike A.

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -11$ $\qquad$ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 7$

$A2 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 22$ $\qquad$ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -50$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -11$ $\qquad$ $A_{11} = 1$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -14$

$A_{23} = -2$ $\qquad$ $A_{33} = 4$

Tvorimo novo matriko, tako da kofaktorje, ki pripadajo elementom prve vrstice, zapišemo v prvi stolpec, kofaktorje elementov druge vrstice v drugi stolpec, kofaktorje elementov tretje vrstice v tretji stolpec.

$$\left[A_{ji}\right] = \begin{bmatrix} -11 & 7 & -14 \\ 22 & -50 & 1 \\ -11 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Dobljeno matriko pomnožimo še z $\frac{1}{\det A}$.

$$A^{-1} = -\frac{1}{99}\begin{bmatrix} -11 & 7 & -14 \\ 22 & -50 & 1 \\ -11 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Našo rešitev še preverimo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{99}\right)\begin{bmatrix} -11 & 7 & -14 \\ 22 & -50 & 1 \\ -11 & -2 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{99}\begin{bmatrix} -11 & 7 & -14 \\ 22 & -50 & 1 \\ -11 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 DETERMINANTA

Za nekatere sisteme n linearnih enačb z n neznankami znamo določiti rešitev (metoda nasprotnih koeficientov …)

➲Primer 1:

$$x + y + z = 5$$
$$x - y + z = 9$$
$$\underline{x + y - z = -1}$$
$$2x + 0 + 2z = 14$$
$$\underline{0 + 0 + 2z = 6}$$
$$2x \qquad = 8$$
$$x = 4$$
$$z = 3$$
$$y = -2$$

Vendar je takšen način reševanja enačb precej nepregleden. Zaradi želje po čim večji preglednosti se je rodila ideja o matematičnem objektu, ki mu je Cauchy leta 1812 dal ime determinanta.

Determinanta reda n (n-vrstna determinanta) je funkcija n^2 elementov a_{ik}, razvrščenih v n-vrstic in n-stolpcev:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Če poznamo kvadratno matriko A reda n

A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, ji priredimo število, ki ga imenujemo determinanta in označimo detA ali D.

Naj bo A kvadratna matrika reda n. Če prečrtamo i-to vrstico in j-ti stolpec matrike A, preostali elementi tvorijo kvadratno matriko reda (n – 1). Determinanto, ki pripada tej matriki, imenujemo poddeterminanta elementa a_{ij}. Pomnožimo jo z $(-1)^{i+k}$ in ta produkt imenujmo kofaktor A_{ij} elementa a_{ij}.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nk} \end{vmatrix}$$

Lastnosti determinant:

1) Determinanta ne spremeni svoje vrednosti, če zamenjamo vrstice s stolpci, in obratno.
2) Zamenjava dveh vrstic med seboj spremeni determinanti predznak.
3) Determinanto množimo z nekim faktorjem tako, da z njim pomnožimo elemente poljubne vrstice. Obratno operacijo imenujemo izpostavljanje.
4) Determinanta ima vrednost nič, če:
- ima vse elemente neke vrstice enake nič,
- sta v njej dve poljubni vrstici enaki ali sorazmerni ali je katera vrstica linearna kombinacija nekih drugih vrstic.
5) Vrednost determinante se ne spremeni, če večkratnike elementov poljubne vrstice prištejemo k pripadajočim elementom katere druge vrstice.
6) Determinanti istega reda lahko seštejemo, če se ujemata v n-1 vrsticah. n-ta vrstica vsote pa je enaka vsoti elementov sumandov.

Računanje determinant:

Determinanta 2. reda:

Vrednost izračunamo po obrazcu:

D = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

➔Primer 2:

Izračunajmo vrednost determinante:

D = $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$.

D = $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - (-1) \cdot 4 = 16 + 4 = 20$.

Determinanta 3. reda:

Vrednost determinante 3. reda poiščemo s pomočjo **Sarrusovega pravila**.
K determinanti pripišemo prva dva stolpca in nato njeno vrednost D izračunamo po naslednjem obrazcu:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

D = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$
V zgornji shemi prečrtamo elemente na glavnih diagonalah in elemente na stranskih diagonalah. Nato od vsote produktov elementov na glavnih diagonalah odštejemo vsoto produktov elementov na stranskih diagonalah.

➲Primer 3:
Po Sarrusovem pravilu izračunajmo vrednost determinante:

D = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

K determinanti pripišemo prva dva stolpca in dobimo:

$$\left|\begin{matrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

D =6 + 6 – 8 – (–1 + 8 + 36) = –39.

Skalarni produkt elementov neke vrstice ali stolpca s pripadajočimi koeficienti imenujemo razvoj determinante po elementih neke vrstice ali stolpca.

Determinanta reda n:

Determinanta, ki pripada kvadratni matriki reda n, je enaka skalarnemu produktu neke vrstice ali stolpca v matriki z vrsto pripadajočih faktorjev.
Razvoj po i-ti vrstici:

det A = $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$

Razvoj po j-tem stolpcu:

det A = $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$

Kot primer pokažimo razvoj determinante po prvi vrstici.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \ldots$$

In nadaljujemo z razvojem tako, da izračunamo vrednosti sumandov, kar pa že znamo.

➔Primer 1:

Določimo vrednost naslednje determinante z razvojem.

$$D = \begin{vmatrix} 37 & 13 & 66 \\ 20 & 7 & 37 \\ 95 & 31 & 160 \end{vmatrix}$$

Uporabimo lastnost 5: determinanta matrike A je enaka determinanti matrike A´, ki jo iz matrike A dobimo tako, da h kateri vrstici matrike A prištejemo kakšno drugo njeno vrstico pomnoženo s poljubnim številom, ali če h kakšnemu stolpcu matrike A prištejemo kakšen drug njen stolpec, pomnožen s poljubnim številom.
Lastnost determinante se ohranja, če elemente drugega stolpca pomnožimo z –3 in to vrednost prištejemo k prvemu stolpcu. Nato še elemente drugega stolpca pomnožimo z –5 in to prištejemo k tretjemu stolpcu. Dobimo:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 13 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 2 & 31 & 5 \end{vmatrix}$$

Še enkrat uporabimo lastnost 5 in prištejmo 7-kratnik prvega stolpca k drugemu in 2-kratnik prvega stolpca k tretjemu. Dobimo:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 45 & 9 \end{vmatrix}$$

Sedaj razvijemo determinanto po elementih druge vrstice:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 45 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 45 & 9 \end{vmatrix} = 126 .$$

➔Primer 2:

Izračunaj determinanto matrike A.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Izračunajmo det A z razvojem po tretji vrstici. Matriki A priredimo matriko A´, ki ima v tretji vrstici vse elemente razen prvega enake 0.
Prvi stolpec matrike A najprej množimo z –4 in prištejemo k tretjemu. Nato jo množimo še z –3 in jo prištejemo k četrtemu.

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 13 & -14 \\ 6 & -3 & -22 & -11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

Torej je $\det A = \det A' = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -13 & -14 \\ -3 & -22 & -11 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = \det A''$

Vrednost dobljene determinante lahko izračunamo po Sarrusovem pravilu ali z razvojem po prvem stolpcu.
Dobimo: $\det A = -944$
Zaradi preglednejšega zapisa bomo izpuščali zapisovanje matrik in pisali samo determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -13 & -14 \\ 6 & -3 & -22 & -11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -13 & -14 \\ -3 & -22 & -11 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -13 & -14 \\ 0 & -61 & -53 \\ 0 & 57 & 65 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -61 & -53 \\ 57 & 65 \end{vmatrix} = -944$$

Matrične enačbe

Veliko problemov, na katere naletimo, lahko rešimo s pomočjo matrične enačbe.

➔ Primer:

Rešimo matrično enačbo:
$AX + B = 2C$, če je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \; in \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Uredimo enačbo. Na desni strani enačbe naj bodo znani členi, na levi pa neznani členi enačbe.
$AX = 2C - B$
Določimo najprej A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dobimo štiri enačbe:
$3x_{11} + 7x_{21} = 1$
$2x_{11} + 5x_{21} = 0$
Torej je $x_{11} = 5$ in $x_{21} = -2$

$3x_{12} + 7x_{22} = 0$
$2x_{12} + 5x_{22} = 1$
Torej je $x_{12} = -7$ in $x_{22} = 3$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Enačbo z leve pomnožimo z A^{-1}.

$A^{-1}AX = A^{-1}(2C – B)$
$X = A^{-1}(2C – B)$

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.3 SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Sistem m linearnih enačb z n neznankami ima obliko:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
....
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

Pri tem so $a_{ij} \in \Re$ (i = 1, 2, 3, … , m in j = 1, 2, … , n) koeficienti sistema, $b_i \in \Re$ (i = 1, 2, 3, … , m) desne strani enačb in x_j (j = 1, 2, … , n) neznanke.

Sistem lahko zapišemo v matrični obliki na naslednji način: AX = B.
Kjer so:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix}$$

A - matrika koeficientov,
B - vektor desnih strani enačb,
X - vektor neznank.

Zapišimo še razširjeno matriko koeficientov:

$$[A/B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Sistem je **homogen**, če so vsi b_i = 0, drugače je sistem nehomogen.

Rešitev sistema je vsaka n-terica vrednosti za $x_1, x_2 ... x_n$, ki zadošča vsem enačbam tega sistema.

Sistem, ki ima vsaj eno rešitev, je **rešljiv**. Sistem, ki nima nobene rešitve, je nerešljiv (protisloven). Rešljiv sistem je določen, če ima samo eno rešitev, in nedoločen, če ima več kot eno rešitev. **Rešiti sistem pomeni poiskati vse rešitve sistema**.

Dva sistema sta ekvivalentna, če imata iste rešitve. Torej, če je vsaka rešitev prvega sistema hkrati tudi rešitev drugega sistema.

Če želimo ugotoviti, koliko rešitev ima dani sistem linearnih enačb, in če ga želimo rešiti, mu priredimo ekvivalenten, preprostejši sistem.

Katere transformacije privedejo dani sistem enačb v ekvivalentni sistem?
1. Zamenjava vrstnega reda enačb.
2. Množenje poljubne enačbe sistema z od nič različnim številom.
3. Prištevanje k neki enačbi sistema neko drugo enačbo tega sistema, pomnoženo s poljubnim številom.

➔Primer 1:

Rešimo sistem enačb

$$2x_1 + 3x_2 = 13$$
$$5x_1 - x_2 = 7$$

Če drugo enačbo pomnožimo s 3 in jo prištejemo k prvi, dobimo prvotnemu sistemu ekvivalenten sistem enačb:

$$17x_1 = 34$$
$$5x_1 - x_2 = 7$$

Iz prve enačbe dobimo eno samo vrednost za x_1 = 2, iz druge pa eno samo vrednost za x_2 = 3. Dani sistem ima natanko eno rešitev.

Grafično predstavlja rešitev sistema presečišče premic z enačbama $2x_1 + 3x_2 = 13 \;\; in \;\; 5x_1 - x_2 = 7$.

➔Primer 2:

Rešimo še sistem:

$$2x_1 - 3x_2 = 7$$
$$-4x_1 + 6x_2 = -14$$

Če prvo enačbo pomnožimo s 3 in jo prištejemo k drugi, da bi eliminirali x_1, dobimo identiteti 0 = 0, torej je druga enačba produkt prve enačbe s številom –2. Vsaka rešitev prve enačbe je hkrati rešitev druge, in obratno. Zato smemo eno izmed enačb izpustiti. Ker pa lahko iz ene enačbe enolično izračunamo vrednost ene same neznanke, ima dani sistem neskončno mnogo rešitev. Če za x_2 izberemo poljubno realno število a, je $x_1 = \frac{1}{2}(7 + 3a)$.

Vsakemu sistemu linearnih enačb lahko priredimo razširjeno matriko koeficientov, v kateri vsaka vrstica pomeni eno enačbo sistema. Računske operacije (transformacije), ki bi jih izvajali nad sistemom, lahko izvajamo nad razširjeno matriko sistema. Te računske operacije so:

- zamenjava vrstic,
- množenje vrstic z od nič različnim številom,
- seštevanje vrstic, ki jih lahko pred seštevanjem pomnožimo s poljubnim številom,

- zamenjamo lahko tudi stolpce v matriki koeficientov, vendar moramo upoštevati, da smo s tem zamenjali vrstni red neznank. Ne smemo pa množiti ali seštevati stolpcev.

Rešljivost sistemov linearnih enačb

Kako vemo, ali je v sistemu kaka enačba odveč? Pomnožimo prvo enačbo tega sistema s številom k_1, drugo s k_2 …, m-to s k_m in te produkte seštejemo.

$(k_1a_{11} + k_2a_{21} + k_3a_{31} + \ldots + k_ma_{m1})x_1 +$
$(k_1a_{12} + k_2a_{22} + k_3a_{32} + \ldots + k_ma_{m2})x_2 +$
…………………………………
$(k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + k_3a_{3n} + \ldots + k_ma_{mn})x_n =$
$k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 + \ldots + k_mb_n$

Izraz v i-tem oklepaju imenujmo s_i, desno stran pa s, dobimo **linearno kombinacijo enačb** sistema:

$s_1x_1 + s_2x_2 + ... + s_nx_n = s$,

kjer je

$s_1 = k_1a_{11} + ... + k_ma_{m1}$

$s_2 = k_2a_{12} + ... + k_ma_{m2}$

....

$s_n = k_na_{1n} + ... + k_ma_{mn}$

in

$s = k_1b_1 + k_2b_2 + ... + k_mb_m$

Enačbo $s = k_1b_1 + k_2b_2 + ... + k_mb_m$ imenujemo linearna kombinacija enačb sistema.

Definicija:

Če je v danem sistemu enačb katera od enačb linearna kombinacija ostalih, rečemo, da je sistem enačb linearno odvisen.

Sistem enačb je linearno odvisen natanko takrat, kadar obstajajo taka števila $k_1, k_2 \ldots, k_m$, ki niso vsa enaka 0, da sta v zgornji linearni kombinaciji izpolnjena naslednja pogoja:

$s_j = 0$ (j = 1, 2 , … , n)

in

s = 0.

V sistemu smemo izpustiti enačbo, ki je linearna kombinacija ostalih enačb tega sistema.

Sistem, ki ga pri tem izpustimo, je ekvivalenten prvotnemu.

Če je prva enačba v sistemu linearna kombinacija ostalih enačb, jo lahko izpustimo, če je v tako dobljenem sistemu zopet katera enačba linearna kombinacija ostalih, jo spet izpustimo. Tako nadaljujemo, dokler ne pridemo do linearno neodvisnega sistema. **Maksimalno število linearno neodvisnih enačb sistema imenujemo rang sistema.**

Sistem linearnih enačb je **nerešljiv** natanko takrat, kadar obstaja linearna kombinacija enačb tega sistema, v kateri je:

$s_j = 0$, j = 1, 2, … , n in $s \neq 0$.

Iz tega vidimo, da je sistem rešljiv natanko takrat, kadar ni mogoče z enačbami tega sistema tvoriti linearne kombinacije, za katero bi veljalo: $s_j = 0$, j = 1, 2, … , n in $s \neq 0$.

Koliko rešitev ima sistem n linearnih enačb z n neznankami, če je rešljiv?

Naj bo število linearno neodvisnih enačb enako r.
Če je r = n, ima sistem natanko eno rešitev, saj lahko z vsako enačbo enolično določimo vrednost ene neznanke.

Če je r < n, če je število linearno neodvisnih enačb manjše od števila neznank, rešitev sistema ni enolična. Ker so z r enačbami enolično določene vrednosti samo r neznank, lahko n-r neznankam izberemo poljubne vrednosti. Neznanke, ki jim izberemo poljubne vrednosti, so nebazne neznanke, neznanke, ki so z nebaznimi enolično določene, pa bazne. Če nebaznim neznankam izberemo poljubne vrednosti in z njimi izračunamo vrednosti baznih neznank, dobimo **posebno rešitev sistema**. Teh je neskončno mnogo. Če imajo vse nebazne neznanke vrednosti 0, dobimo **bazno rešitev sistema**. Če bazne neznanke izrazimo z nebaznimi in namesto nebaznih neznank postavimo parametre, ki imajo lahko poljubne realne vrednosti, dobimo **splošno rešitev sistema**. Ta je n – r parametrična.
Za bazne neznanke lahko izberemo le tiste, pri katerih ima sistem r enačb z r neznakami, ki ga dobimo, če opustimo odvečne enačbe in vstavimo za vrednosti nebaznih neznank poljubna realna števila, natanko eno rešitev.

➲Primer:

Ugotovimo, koliko rešitev ima dani sistem enačb in ga rešimo.

1) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$
2) $2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$
3) $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 14$

Tretjo enačbo lahko dobimo tako, da prvo enačbo množimo s 3 in temu prištejemo drugo enačbo pomnoženo s 0,5. Torej lahko tretjo enačbo zapišemo, kot linearno kombinacijo prvih dveh.
Zato jo izpustimo in dobimo neodvisni sistem dveh linearnih enačb s tremi neznankami.

1) Če izberemo x_1 in x_2 za bazni neznanki in za x_3 poljubno realno vrednost a, dobimo enolično rešljiv sistem dveh enačb z dvema neznankama.

$x_1 - x_2 + 2a = 5$
$2x_1 + 2x_2 - 4a = -2$
Iz tega pa splošno rešitev sistema: $x_1 = -3 + 2a$, $x_2 = 2$, $x_3 = a$; kjer je a poljubno realno število.

2) Če sta bazni neznanki x_1 in x_3, in če za x_2 izberemo poljubno vrednost b, dobimo:

$x_1 - b + 4 + 2x_3 = 5$
$2x_1 + 2b - 4x_3 = -2$
Dobimo iz tega splošno rešitev sistema: $x_1 = 2$ $x_2 = b$ $x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}b$; kjer je b poljubno realno število.

3) Če bi za bazni neznanki izbrali x_2 in x_3, za x_1 pa poljubno vrednost c, bi dobili:
$-x_2 + 2x_3 = 5 - c$

$2x_2 - 4x_3 = -2 - 2c$

- če $c \neq 2$, je enačba protislovna in je sistem nerešljiv,
- če je $c = 2$, je ena od enačb odveč in nam ostane ena enačba z dvema neznankama: x_2, x_3.

Za eno od njiju si izberemo poljubno vrednost in dobimo eno od zgornjih rešitev.

Ugotovili smo, da si za bazni neznanki lahko izberemo x_1 in x_2 ali x_1 in x_3.

POSEBNO rešitev sistema dobimo, če za število a izberemo vrednost 1 ($a = 1$):
$x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.
BAZNO rešitev dobimo, če za a vstavimo število nič. ($a = 0$):
$x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$.

4.3.1 Gaussova metoda

Osnovna ideja Gaussove metode je prevesti sistem enačb s transformacijami na ekvivalenten sistem enačb, iz katerega bomo dovolj enostavno dobili rešitev sistema.
Pomagamo si z razširjeno matriko.

Na razširjeni matriki koeficientov izvajamo transformacije tako dolgo, da matriki $[A/B]$ priredimo ekvivalentno matriko $[C/D]$.

$$[C/D]=\left[\begin{array}{cccccc:c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

➔<u>Primer 1:</u>

Rešimo sistem enačb:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$$
$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 9$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$$
$$-2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -4$$

Zapišimo razširjeno matriko:

$$[A/B]=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & -16 & 9 & -7 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{33}{7} & -\frac{33}{7} \end{array}\right] = [C/D]$$

Prvotnemu sistemu ekvivalenten sistem linearno neodvisnih enačb je:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 3 \\ -14x_3 + 12x_4 &= -2 \\ -\frac{33}{7}x_4 &= -\frac{33}{7} \end{aligned}$$

Iz zadnje enačbe dobimo $x_4 = 1$. Če postavimo $x_4 = 1$ v predzadnjo enačbo, dobimo $x_3 = 1$. Nato to uporabimo v drugi enačbi in določimo $x_2 = 1$ in iz prve še $x_1 = 1$. Dobili smo rešitev našega sistema: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

➔Primer 2:

Rešimo sistem:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$[A/B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 & 14 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & -12 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemu ekvivalentni sistem linearno neodvisnih enačb je:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_2 - 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Splošna rešitev je enoparametrična. Če za nebazno neznanko izberemo x_3 in njeno vrednost označimo z a, dobimo iz druge enačbe $x_2 = 2a - 3$ in iz prve $x_1 = 5 - 2a + 2a - 3 = 2$. Splošna rešitev je torej:

$x_1 = 2$, $x_2 = 2a - 3$ in $x_3 = a$, kjer je a poljubno realno število.

Če matriki $[A/B]$ sistema n linearno neodvisnih linearnih enačb z n neznankami priredimo s transformacijami ekvivalentno matriko oblike:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & .... & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & ... & 0 & e_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & e_n \end{array}\right],$$

smo vsako neznanko eliminirali iz vseh enačb, razen iz ene, in rešitev sistema je:

$x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$, $x_3 = e_3$, … , $x_n = e_n$.

Primer 3:

Rešimo na opisani način naslednji sistem:

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1000$$
$$x_1 + 3x_2 = 600$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 800$$

$$[A/B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 1000 \\ 1 & 3 & 0 & 600 \\ 3 & 2 & 1 & 800 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 600 \\ 0 & -2 & 2 & -200 \\ 0 & -7 & 1 & -1000 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 300 \\ 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & -6 & -300 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right]$$

Dani sistem ima natanko eno rešitev $x_1 = 150$, $x_2 = 150$ in $x_3 = 50$.

4.3.2 Cramerjevo pravilo

S pomočjo Cramerjevega pravila bomo poiskali rešitev sistema n linearnih enačb z n neznankami.

Imejmo sistem n linearnih enačb z n neznankami :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_{n1} = b_1$$
$$a_{211}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_{n1} = b_2$$
....
$$a_{n11}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_{n1} = b_n$$

Temu sistemu priredimo determinanto:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Če je determinanta sistema D različna od nič, so rešitve sistema:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad ,\ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Kjer je :

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Sistem je **homogen**, če so vsi $b_k = 0$ in tudi vse $D_k = 0$. **Nehomogen** je sistem takrat, ko je vsaj en $b_k \neq 0$. Vsak homogen sistem ima rešitev. Nehomogen sistem pa nima rešitve, če je $D = 0$ in je katera od $D_k \neq 0$.

Primer :

Podjetje Logist prevaža blago med skladišči na progah A, B in C. Prvi prevoznik je opravil eno vožnjo na progi A, dve na progi B, tri na progi C in zaslužil 11 DE. Drugi prevoznik je opravil dve vožnji na progi A, eno na progi B, eno na progi C in zaslužil 8 DE. Tretji prevoznik je opravil eno vožnjo na progi A, tri na progi B, štiri na progi C in zaslužil 15 DE. Koliko stane prevoz na progah A, B in C?

Najprej si besedilno nalogo preoblikujemo v sistem treh enačb s tremi neznankami:

$$x + 2y + 3z = 11$$
$$2x + y + z = 8$$
$$x + 3y + 4z = 15$$

Najprej moramo ugotoviti, če je mogoče vrednost determinante enaka nič.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Torej je naš sistem enolično rešljiv (saj $D \neq 0$).
Izračunajmo determinante posameznih spremenljivk:

$$D_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 4, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 2, \qquad y = \frac{D_y}{D} = 3, \qquad z = \frac{D_z}{D} = 1$$

Odgovor: Prevoz na progi A stane dve DE, na progi B tri DE in na progi C eno DE.

Povzetek:
V tem poglavju ste se naučili računati z matrikami; rešiti znate tudi preproste matrične enačbe. Izračunati znate determinante 2., 3., …,n-tega reda. S pomočjo Gaussove metode in Cramarjevega pravila znate poiskati rešitev sistema linearnih enačb.

Še nekaj nalog za utrjevanje:

1. Podani sta matriki A = $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ in B = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Izračunajte –A ,B – A, A · B in B^T.
2. Izračunajte vrednost determinante D = $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ po Sarrusovem pravilu.
3. Izračunajte vrednost determinante D = $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ z razvojem.
4. Rešite sistem enačb: $2x + y - z = -1$, $x - 3y + 2z = -6$, $-3x + y = 6$.

5 VEKTORJI

CILJI:

Ob koncu tega poglavja boste:
- usvojili definicijo vektorja,
- grafično in računsko seštevali in odštevali vektorja,
- uporabljali lastnost vsote in produkta vektorja s skalarjem pri poenostavljanju izrazov,
- izračunali dolžino vektorja in kot med vektorjema,
- ugotovili, ali sta vektorja pravokotna (vzporedna),
- uporabljali pojma kolinearnost in komplanarnost,
- izračunali skalarni in vektorski produkt vektorjev.

Vektor je količina, s katero lahko opišemo smer in velikost hkrati. Če nekomu poveste, kako daleč je do vašega doma, ne poveste pa mu smeri, v kateri se mora gibati, vas bo težko našel. V tem poglavju boste spoznali, kaj so vektorji in kakšne lastnosti imajo.

5.1 DEFINICIJA VEKTORJA

Količina, s katero lahko opišemo smer in velikost (razdaljo, dolžino) hkrati, se imenuje **vektor**.
Vektor je količina, ki je določena s smerjo, z usmerjenostjo in velikostjo (dolžino).
Vektorje ponazarjamo (rišemo) z usmerjenimi daljicami.
Zapisujemo jih z malo črko, nad katero je polpuščica $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots)$, ali pa z dvema velikima črkama, od katerih je prva začetna, druga pa končna točka vektorja $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \dots)$.

Slika 50: Vektor
Vir: Lasten

Enakost vektorjev:
Vektorja sta enaka, ko sta vzporedna, enako dolga in kažeta v isto smer.

Vektor lahko vzporedno premikamo po prostoru, a se njegove lastnosti ne spremenijo.

Dolžina ali absolutna vrednost vektorja $\overrightarrow{AB}$ je dolžina daljice AB. Označimo jo takole: $|\overrightarrow{AB}|$.
Torej je $|\overrightarrow{AB}| = |AB| = d(A, B)$.

Enotski vektor $\vec{e}$ ali *normiran vektor* je vektor z dolžino 1.

Ničelni vektor je vektor z dolžino 0 (začetna in končna točka sovpadata): $\vec{0}$ *ali* 0

Če sta točki A in B različni, predstavljata usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BA}$ dva različna vektorja. Pravimo, da sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BA}$ nasprotna vektorja, kar označimo:

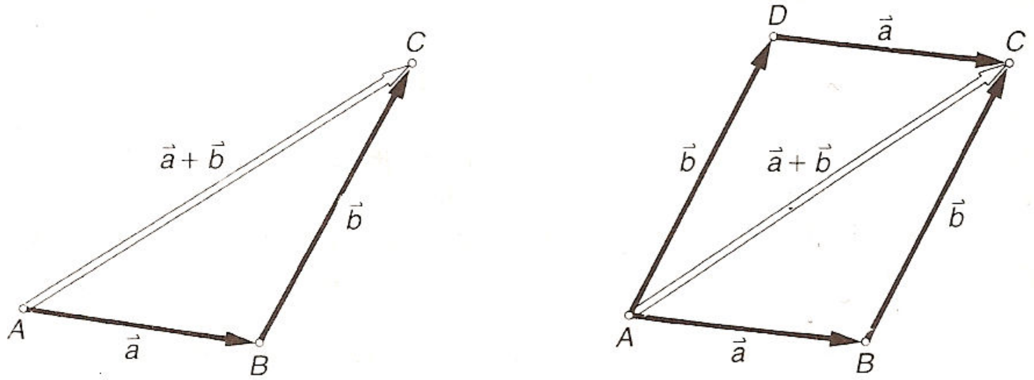
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

5.2 SEŠTEVANJE IN ODŠTEVANJE VEKTORJEV. MNOŽENJE VEKTORJA S SKALARJEM

a) Vsota vektorjev

Vektorje seštevamo grafično tako, da začetno točko naslednjega vektorja, postavimo v končno točko prejšnjega vektorja (uporabimo trikotniško ali paralelogramsko pravilo). **Vsota vektorjev** je vektor, ki poteka od začetne točke prvega do končne točke zadnjega vektorja.

Pri trikotniškem načinu seštevanja postavimo vektorja drugega za drugim. Njuna vsota poteka od začetne točke prvega do končne točke drugega in predstavlja tretjo stranico nastalega trikotnika.



Slika 51: Vsota vektorjev
Vir: Lasten

Če seštevamo vektorja po paralelogramskem pravilu, ju postavimo tako, da imata skupno začetno točko, nato pa sliko dopolnimo do paralelograma, pri čemer vektorja določata dve njegovi stranici. Vsota je vektor, ki se začne v isti točki, kot dana vektorja, leži pa na diagonali paralelograma.

Lastnosti seštevanja vektorjev:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

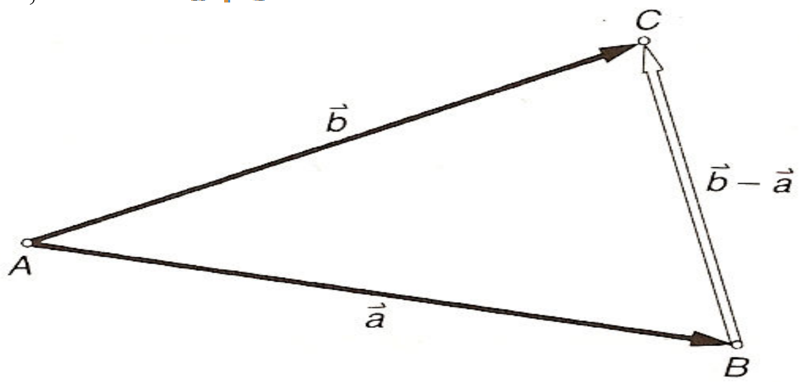
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

b) Razlika vektorjev

Vektor odštejemo tako, da prištejemo njegov nasprotni vektor: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Razliko vektorjev $\vec{a} - \vec{b}$ lahko poiščemo tudi tako, da vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ postavimo v lego s skupno začetno točko. Razlika vektorjev je vektor, ki povezuje končni točki vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in je usmerjen proti prvemu členu odštevanja, se pravi, proti vektorju $\vec{a}$. Iskani vektor razlike najdemo tudi na eni diagonali paralelograma iz paralelogramskega pravila, medtem ko na drugi, kot že vemo, leži vektor $\vec{a} + \vec{b}$.

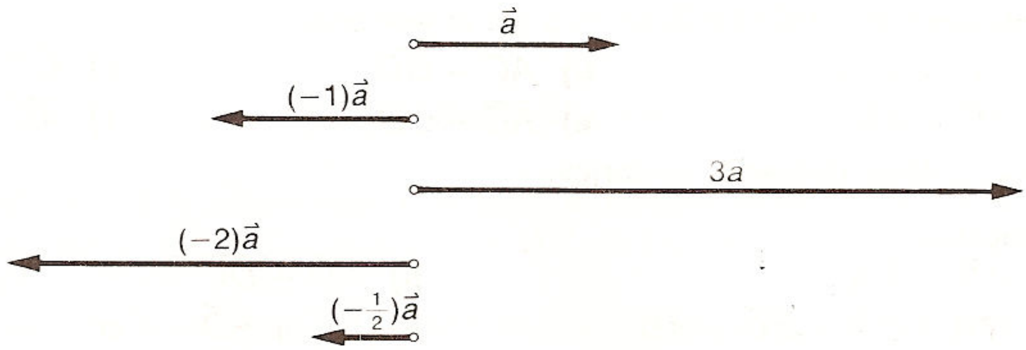


Slika 52: Razlika vektorjev
Vir: Lasten

c) Produkt vektorja s skalarjem

Velja:
$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$
$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Rezultat množenja vektorja $\vec{a}$ s skalarjem k je vektor $k\vec{a}$, ki je vektorju $\vec{a}$ vzporeden in enako usmerjen, če je k > 0 in nasprotno usmerjen, če je k < 0. Če je |k| > 1, se dolžina vektorja poveča, če je |k| < 1, se dolžina vektorja zmanjša, če je |k| = 1, se dolžina vektorja po množenju ne spremeni.



Slika 53: Množenje vektorja s skalarjem
Vir: Lasten

Lastnosti množenja vektorja s skalarjem:
asociativnost v skalarnem faktorju: $k(l\vec{a}) = l(k\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
distributivnost v vektorskem faktorju: $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
distributivnost v skalarnem faktorju: $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

5.3 LINEARNA KOMBINACIJA VEKTORJEV

Linearna kombinacija vektorjev $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ je izraz oblike

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + k_3\overrightarrow{a_3} + \dots + k_n\overrightarrow{a_n},$$

kjer so $k_1, k_2, \dots, k_n$ realna števila (skalarji), *n* pa je naravno število.

Vektorji so <u>linearno odvisni</u>,če lahko enega izrazimo z linearno kombinacijo vseh ostalih.

Sledi: Dva vektorja sta linearno odvisna takrat, ko sta vzporedna (sta kolinearna).

Če lahko enega od vektorjev izrazimo z drugima dvema, vektorji zagotovo ležijo v isti ravnini (so komplanarni).

Sledi: Trije vektorji so linearno odvisni takrat, ko ležijo v isti ravnini (so komplanarni).

Baza vektorskega prostora je taka linearno neodvisna množica vektorjev, s katerimi lahko izrazimo vse vektorje tega prostora, na en sam način.

Število vektorjev v bazi je določeno z največjim možnim številom neodvisnih vektorjev, se pravi:

- na premici zadošča en sam vektor,
- na ravnini potrebujemo dva, ki nista vzporedna,
- v prostoru pa tri, ki ne ležijo v isti ravnini.

Ortogonalno bazo tvorijo vektorji, ki so drug na drugega pravokotni (ortogonalni).
Normirano bazo tvorijo vektorji, ki so normirani oz. enotski.
Ortonormirano bazo tvorijo vektorji, ki so drug na drugega pravokotni in merijo po eno enoto.

Če si bomo ortonormirano bazo izbrali na oseh koordinatnega sistema, bomo ortonormirane krajevne vektorje na oseh *x, y* in *z* po vrsti označili z $\vec{i}$, $\vec{j}$ in s $\vec{k}$. Teh imen za druge, splošne vektorje, običajno ne uporabljamo.

<u>Primer</u>:
Določite skalarja *m* in *n* tako, da bo
$m\vec{a} + 3m\vec{b} = n\vec{a} - \vec{a} - \frac{n}{2}\vec{b}$, če veste, da sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ bazna vektorja.
Rešitev:
Ker sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ bazna vektorja, sta zagotovo linearno neodvisna. Izraz preoblikujmo v njuno linearno kombinacijo: $(m - n + 1)\vec{a} + \left(3m + \frac{n}{2}\right)\vec{b} = \vec{0}$.
Zaradi linearne neodvisnosti morata biti oba izraza v oklepajih enaka 0. S tem dobimo preprost sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama, se pravi:
$m - n + 1 = 0$ in $3m + \frac{n}{2} - 0$.
Ko ga rešimo po zamenjalnem načinu ali načinu nasprotnih koeficientov, dobimo $m = -\frac{1}{7}$ in $n = \frac{6}{7}$.

5.4 SKALARNI PRODUKT

Če med sabo pomnožimo dva vektorja, dobimo realno število (skalar), zato operacijo imenujemo *skalarni produkt*.

Za pokazatelja medsebojne lege vektorjev bomo namesto velikosti kota upoštevali kosinus kota med vektorjema, in zato vpeljemo novo operacijo med vektorji, t. i. skalarni produkt, na naslednji način:

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je število, ki ga izračunamo takole:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi$$

(pomnožimo dolžini obeh vektorjev s kosinusom kota med vektorjema).

Skalarni produkt je enak 0 le, če sta vektorja pravokotna ali pa je vsaj eden od njiju ničelni vektor.

Sledi:

Kot med vektorjema izračunamo s formulo: $cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Dolžino vektorja izračunamo takole: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Formulo za skalarni produkt lahko prepišemo še v drugo obliko:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi = |\vec{a}| \cdot proj_{\vec{a}}\vec{b}$,

kjer je $proj_{\vec{a}}\vec{b}$ projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.

Lastnosti skalarnega produkta:

komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

distributivnost: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

homogenost: $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

➔Primer 1:

Izračunajte dolžino vektorja $\vec{a} - \vec{b}$, če je $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ in kot med vektorjema pa meri 45°. Pri reševanju te naloge se spomnimo na obrazec za dolžino vektorja, ki pravi, da je $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, pa tudi brez distributivnosti in definicije skalarnega produkta ne bo šlo.

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi + |\vec{b}|^2}$$

Po vstavljanju podatkov sledi izračun:

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$$

Primer 2:

Izračunaj še kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{a}-\vec{b}$, če gre za vektorja iz prejšnje naloge.
Nalogo bomo ugnali z obrazcem za kosinus kota med vektorjema, ki je $cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.
V tej nalogi igra vlogo vektorja $\vec{b}$ vektor $\vec{a}-\vec{b}$. Tako je:

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}}{2\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}} = \frac{4-\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}} \Rightarrow \varphi \doteq 28{,}68^\circ.$$

5.5 PRAVOKOTNOST IN VZPOREDNOST

Neničelna vektorja sta *pravokotna* natanko tedaj, ko je njun skalarni produkt enak 0.

Vektorja sta *vzporedna* natanko tedaj, ko lahko enega izrazimo z drugim.

5.6 VEKTORJI IN PRAVOKOTNI KOORDINATNI SISTEM V RAVNINI

Vektorje bi radi predstavili s števili, iz katerih bi bile razvidne vse tri lastnosti vektorjev: smer, usmerjenost in dolžina.

V pravokotnem koordinatnem sistemu v ravnini bomo določili krajevni vektor in ga izrazili v ortonormirani bazi. Tako bomo dobili dve števili, ki bosta vektor točno določali in ju bomo imenovali *komponenti* vektorja.

Poudarimo, da je krajevni vektor $\vec{r}_T$ točke T le tisti vektor, ki vodi do točke T, začne pa se v koordinatnem izhodišču.
Sledi:
Če sta x_T, y_T koordinati točke T, potem se krajevni vektor točke T v ortonormirani bazi ravnine izrazi kot

$$\vec{r}_T = x_T\cdot\vec{i} + y_T\cdot\vec{j}.$$

Enakovredni zapis vektorja je tudi zapis v obliki urejenega para:

$$\vec{r}_T = (x_T, y_T).$$

Seštevanje in odštevanje vektorjev: $\vec{a}\pm\vec{b} = (a_1,a_2)\pm(b_1,b_2) = (a_1\pm b_1, a_2\pm b_2)$.

Množenje vektorja s skalarjem: $k\cdot\vec{a} = k\cdot(a_1,a_2) = (ka_1, ka_2)$

Skalarni produkt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$

Primer:

Dana sta vektorja: $\vec{a} = (2,-3)$, $\vec{b} = (-1,-7)$

$\vec{b}-\vec{a} = (-3,-4)$
$-3\vec{a} + 2\vec{b} = (-8,-5)$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 19$
Dolžina vektorja: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$

Vektor $\overrightarrow{AB}$ izrazimo s krajevnima vektorjema na naslednji način: $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$.

Krajevni vektor razpolovišča S daljice AB izračunamo kot: $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$

Krajevni vektor težišča T trikotnika ABC izračunamo kot: $\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$

5.7 VEKTORJI IN PRAVOKOTNI KOORDINATNI SISTEM V PROSTORU

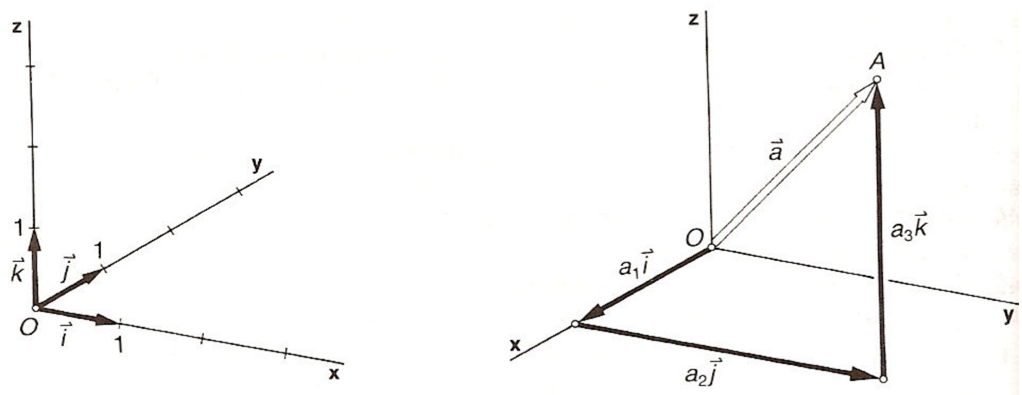
V pravokotnem koordinatnem sistemu v prostoru bomo določili krajevni vektor in ga izrazili v ortonormirani bazi. Tako bomo dobili tri števila, ki bodo vektor točno določali in jih bomo imenovali *komponente* vektorja.

Poudarimo, da je krajevni vektor $\vec{r}_T$ točke T le tisti vektor, ki vodi do točke T, začne pa se v koordinatnem izhodišču.
Sledi:
Če so x_T, y_T, z_T komponente točke T, potem se krajevni vektor točke T v ortonormirani bazi ravnine izrazi kot

$$\vec{r}_T = x_T \cdot \vec{i} + y_T \cdot \vec{j} + z_T \cdot \vec{k}.$$

Enakovredni zapis vektorja je tudi zapis v obliki urejenega para:

$$\vec{r}_T = (x_T, y_T, z_T).$$



Slika 54: Pravokotni koordinatni sistem v prostoru
Vir: Lasten

Seštevanje in odštevanje vektorjev:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \pm (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3).$$

Množenje vektorja s skalarjem: $k \cdot \vec{a} = k \cdot (a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$

Skalarni produkt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Dolžina vektorja: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

➔Primer 1:

Naj bo $\vec{a} = (-1,4,-5)$ in $\vec{b} = (2,-1,-4)$. Izračunajte: $2\vec{a} - 3\vec{b}$, $2\vec{a} \cdot \vec{b}$ in dolžino vektorja $\vec{a}$.

Rešitve so po vrsti naslednje:
$2\vec{a} - 3\vec{b} = (-8,11,2)$
$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 28$
$|\vec{a}| = \sqrt{42}$

Primer 2:

Dana sta vektorja $\vec{a} = (-2,4,6)$ in $\vec{b} = (x,2,12)$. Določite neznano komponento x tako, da bosta vektorja

a) pravokotna,
b)vzporedna,
c) takšna, da bo $\vec{b}$ dvakrat daljši od vektorja $\vec{a}$.

Rešitve:

a) Če želimo, da bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna, mora veljati: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Tako je:
$-2x+4\cdot 2+6\cdot 12=0$
$-2x+80=0$
$x=40$.

b) Določimo x tako, da bosta vektorja vzporedna, da bo med njima torej veljala zveza $\vec{a} = k\vec{b}$, kjer je k realno število, ki ga želimo poiskati.
$(-2,\ 4,\ 6)=k\cdot(x,\ 2,\ 12)$
$(-2,\ 4,\ 6)=(kx,\ 2k,\ 12k)\Rightarrow$
$-2=kx\ \wedge\ 4=2k\ \wedge\ 6=12k$
Ker zadnji dve enačbi nimata iste rešitve (drugo reši $k = 2$, tretjo pa $k = \frac{1}{2}$), tudi celoten sistem treh enačb nima rešitve in tako dana vektorja v nobenem primeru ne moreta biti vzporedna.

c) V tretjem primeru želimo, da bo med dolžinama vektorjev veljala zveza: $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$. Izračunajmo dolžini obeh vektorjev.

$|\vec{a}| = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}$, $\qquad |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + 4 + 144} = \sqrt{x^2 + 148}$

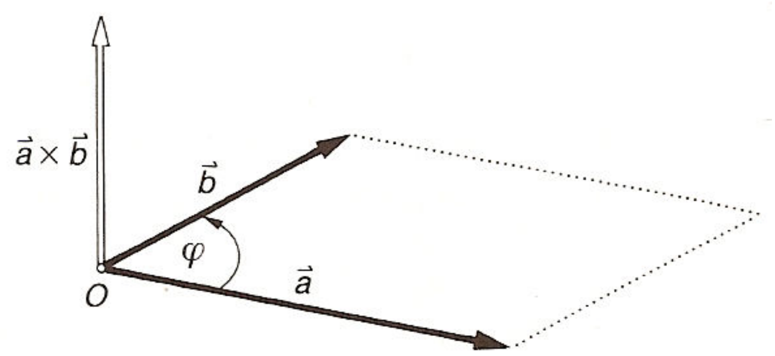
Enačba, ki jo moramo rešiti, je $\sqrt{x^2+148}=2\cdot\sqrt{56}$. Če obe strani enačbe kvadriramo, dobimo:
$x^2+148=4\cdot 56$ oziroma $x^2=224-148=76\Rightarrow x=\pm\sqrt{76}=\pm\sqrt{4\cdot 19}=\pm 2\cdot\sqrt{19}$.
Tako smo ugotovili, da obstajata dva možna vektorja $\vec{b}$ z dvojno dolžino vektorja $\vec{a}$. To sta: $\vec{b}_1 = (2\sqrt{19},2,12)$ in $\vec{b}_2 = (-2\sqrt{19},2,12)$.

Primer 3:

Računsko ugotovite, ali so vektorji $\vec{a} = (2,-1,1), \vec{b} = (4,-2,-1), \vec{c} = (-2,1,8)$ komplanarni!
Če so dani trije vektorji komplanarni, če torej ležijo v isti ravnini, so linearno odvisni in se da vsakega od njih izraziti z ostalima dvema. Poskusimo izraziti vektor $\vec{a}$ z vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{c}$.
Iščemo skalarja k in l, da bo $\vec{a} = k\vec{b} + l\vec{c}$. Ko vstavimo komponentne zapise vektorjev, dobimo:
$(2, -1, 1) = k(4, -2, -1) + l(-2, 1, 8)$
$(2, -1, 1) = (4k, -2k, -k) + (-2l, l, 8l)$
$(2, -1, 1) = (4k - 2l, -2k + l, -k + 8l)$
Dva vektorja sta enaka, če se ujemata v vseh istoležnih komponentah, torej mora veljati:
$4k - 2l = 2$ in $-2k + l = -1$ in $-k + 8l = 1$.
Ko rešimo sistem druge in tretje enačbe, dobimo vrednosti $k = \frac{3}{5}$ in $l = \frac{1}{5}$, ki ustrezata tudi prvi enačbi, kar je nujno preveriti, saj gre za sistem treh enačb z dvema neznankama. Čisto lahko bi se namreč zgodilo, da dobljeni vrednosti k in l ne bi ustrezali prvi enačbi, kar bi pomenilo, da sistem ne bi imel rešitve.
Ugotovili smo, da se vektor $\vec{a}$ da izraziti s preostalima dvema vektorjema kot $\vec{a} = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$, kar pomeni, da so linearno odvisni, kar je možno le, če ležijo v isti ravnini. Dani vektorji **so** komplanarni in s tem ne tvorijo baze prostora.

5.8 VEKTORSKI PRODUKT

Vektorski produkt je operacija, ki paru vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ priredi tretji vektor, ki ga označimo z $\vec{a} \times \vec{b}$ in mu pravimo vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je določen s temi lastnostmi:
– je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$,
– njegova dolžina je številsko enaka ploščini paralelograma, napetega na $\vec{a}$ in $\vec{b}$ (če ju narišemo tako, da imata skupno izhodišče),
– usmerjen je tako, da je, gledano s konca vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$, vrtenje po krajši poti iz $\vec{a}$ v $\vec{b}$ pozitivno.



Slika 55: Vektorski produkt
Vir: Lasten

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ natanko tedaj, ko sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.

Če je φ kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je ploščina paralelograma enaka absin φ: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\ sin\varphi$.
Lastnosti vektorskega produkta:
vektorski produkt ni komutativen: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (m\vec{b})$

distributivnost glede na vsoto: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Vektorski produkt v ortonormirani bazi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Povzetek:

V tem poglavju ste se naučili računati z vektorji: seštevati in odštevati vektorje, izračunati dolžino vektorja in kot med vektorjema, izračunati skalarni in vektorski produkt vektorjev. Veste, kdaj sta vektorja pravokotna oz. vzporedna.

Še nekaj nalog za utrjevanje:

1. Naj bo $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ in kot med njima 60°. Izračunajte dolžino vektorja $2\vec{a} + \vec{b}$.
2. Določite x tako, da bosta vektorja $\vec{a} = (2, 5, x)$ in $\vec{b} = (3, 0, 2)$ pravokotna.
3. Naj bo $\vec{a} = (2, 0, -1)$ in $\vec{b} = (-3, 1, 4)$. Izračunajte $\vec{a} + 4\vec{b}$, $2\vec{b} \cdot \vec{a}$ in dolžino vektorja $2\vec{a}$.
4. Izračunajte (2, 0, –1) x (–3, 1, 4).
5. Svoje znanja lahko še dodatno utrdite s pregledom snovi in nalog na spletnem naslovu: http://www.e-um.si.

6 STATISTIKA

CILJI:

Ob koncu tega poglavja boste:
- znali opisati osnovne statistične pojme,
- poznali faze obdelave podatkov,
- znali podatke prikazati tabelarično in grafično (z linijskim in stolpčnim grafikonom, ter frekvenčnim kolačem),
- znali izračunati aritmetično sredino, modus in mediano za grupirane in negrupirane podatke,
- znali določiti mere razpršenosti (variacijski razmik, povprečni absolutni odklon, varianco in standardni odklon) za grupirane in negrupirane podatke,
- znali določiti krajevne in časovne indekse (indekse s stalno osnovo in verižne indekse),
- znali določiti trend prostoročno in z metodo najmanjših kvadratov.

6.1 UVOD

Statistika je znanost o kvantitativnih metodah obdelave podatkov. Ukvarja se z zbiranjem, predstavljanjem, obdelavo in interpretiranjem podatkov. Tem postopkom rečemo s skupnim imenom statistično raziskovanje. Statistika preučuje množične pojave (statistika prometnih nesreč, statistika prevoza potnikov in materialov, statistika štetja prometa, statistika ekonomskih pojavov …). S pomočjo statističnih obdelav preučujejo nekatere zakonitosti, ki povezujejo prometne nesreče, da bi jih potem lahko preprečili, preučujejo ekonomske pojave, da bi zmanjšali tveganja posameznih odločitev ...
Statistika se je včasih ukvarjala samo z gospodarstvom in naseljenostjo, torej z državniškimi zadevami, od tod tudi ime statistika. Sedaj pa se je razširila na vse znanosti, ki se ukvarjajo z množičnimi pojavi.

Zakaj pojave sploh statistično obdelujemo? Ker so pojavi preobsežni, da bi jih lahko obravnavali v celoti ali pa ker bi bilo predrago zajeti jih v celoti. Zato se moramo zadovoljiti z delnimi podatki in iz teh sklepati o značilnostih celotnega pojava. Seveda za te sklepe ne moremo reči, da so točni, ampak govorimo o določenih verjetnostih sprejetih sklepov. Seveda moramo, da lahko sklepamo o verjetnosti naših ugotovitev, poznati nekaj osnov verjetnostnega računa. Na tem mestu se bomo seznanili z nekaterimi matematičnimi metodami, ki nam bodo pomagale pri sklepih o množičnih pojavih.

6.2 OSNOVNI STATISTIČNI POJMI

Populacija je končna ali neskončna množica, ki jo statistično obdelujemo. Je skupina enot določena s tremi pogoji:
- stvarnim (kdo je v populaciji; študentje),
- krajevnim (mariborskih šol),
- časovnim (v šolskem letu 2002/03).

Populacijo lahko sestavljajo ljudje, živali, dogodki, predmeti, …
Enota je posamezni element populacije (posameznik, en predmet, en dogodek, …).
Vzorec je poljubna podmnožica populacije, s katero raziskujemo. S pomočjo opazovanja in statistične obdelave vzorca sklepamo o lastnostih celotne populacije.

Statistični znaki ali statistične spremenljivke (variable) so tiste lastnosti statističnih enot, ki nas zanimajo in po katerih se enote med seboj razlikujejo.

Statistične spremenljivke so lahko: atributivne in numerične.
Atributivne so tiste lastnosti, ki jih moramo povedati opisno (poklic, strinjanje z nekimi trditvami …). **Numerične** so tiste lastnosti, ki jih lahko povemo številčno (starost, višina …).
Atributivne spremenljivke so lahko **nominalne ali ordinalne**.
Nominalne spremenljivke so tiste, pri katerih ugotavljamo, ali so enote po njih enake ali različne. Kategorije so med seboj enake in se ne stopnjujejo. Primeri nominalnih spremenljivk so: spol, poklicni status, vrsta šole …
Ordinalne spremenljivke so atributivne z numerično osnovo. Kategorije se stopnjujejo, ugotavljamo, katera spremenljivka je višje, katera je nižje. Primeri ordinalnih spremenljivk so: izobrazba, učni uspeh, strinjanje s stališči, priljubljenost politika …

Numerične spremenljivke so lahko: **intervalne ali proporcionalne**.
Intervalne so tiste, pri katerih ugotavljamo, za koliko je nekdo višje ali nižje. Nimajo absolutne ničle, to pomeni, da razmerja niso enopomensko izražena. Primeri intervalnih spremenljivk so: rezultati testov znanja …
Pri proporcionalnih spremenljivkah so razmerja točno določena in imajo absolutno ničlo. Primeri: višina, teža, dolžina …

Numerične spremenljivke delimo še na **zvezne in nezvezne**.
Zvezne zavzemajo vsako vrednost v nekem intervalu (teža, višina, …).
Nezvezne zavzemajo samo nekatere cele vrednosti v intervalu (število prometnih nesreč, število študentov, …).
Kvaliteta podatkov oziroma vrsta spremenljivk odreja, katero statistično metodo bomo uporabili, saj posamezne statistične metode predpostavljajo določen tip spremenljivk. Na primer, računanje povprečja predpostavlja numerične spremenljivke.

6.3 FAZE OBDELAVE PODATKOV

Urejanje in tabelarično ter grafično prikazovanje podatkov za atributivne ali numerične spremenljivke

Analitična obdelava podatkov za atributivne ali numerične spremenljivke.

Urejanje pomeni sortiranje, preštevanje, izločanje neveljavnih podatkov. Rezultat urejanja so ABSOLUTNI PODATKI. Na primer število študentov prvega letnika.
Absolutne podatke zapišemo z absolutno frekvenco, ki jo označimo z $\boldsymbol{f}$. Absolutni podatki sami zase nimajo prave vrednosti, dobijo jo šele s primerjavo. Tako pridemo do relativnih števil. Ko ugotavljamo, kolikšen del od celote so absolutne frekvence, **dobimo relativna števila**, ki jim pravimo strukture.

$$f^0 = \frac{f}{N},$$

kjer je
f^0 - relativna frekvenca
f - absolutna frekvenca
N - število vseh enot v vzorcu (numerus)

Relativno frekvenco lahko izražamo s strukturnimi proporcami f^0 ($f^0 = 0{,}05$) ali s strukturnimi odstotki $f\%$ ($f\% = 5\ \%$). Odstotno frekvenco dobimo tako, da relativno frekvenco množimo s 100.

$$f\% = \frac{f}{N} \cdot 100$$

TABELARIČNO PRIKAZOVANJE

Statistične spremenljivke ali podatke lahko uredimo po velikosti. Pravimo, da jih uredimo v **ranžirno vrsto**.
RANŽIRNA VRSTA je najenostavnejša oblika ureditve. Iz nje lahko razberemo temeljne značilnosti: minimalni in maksimalni rezultat in kolikokrat se neki podatek ponovi. Seveda je primerna le za majhno število podatkov, saj je pri velikem številu podatkov nepregledna in nam ne da neke splošne slike.

Primer:

Naj bodo dani rezultati pri nekem testu znanja:
13, 16, 18, 22, 36, 34, 40, 19, 24, 25, 26, 30, 30, 31, 32, 27, 27, 29, 20, 21, 21, 23, 22, 8, 12, 22, 7, 22, 14, 31, 17
Ranžirna vrsta za te podatke je naslednja:
7, 8, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 22, 22, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 27, 29, 30, 30, 31, 31, 32, 34, 36, 40.
Najmanjše število doseženih točk je bilo 7, največje pa 40.

Kadar imamo veliko število podatkov, jih zaradi preglednosti uredimo v tabelo.
Tabelo sestavlja:

- naslov tabele, v katerem mora biti opredeljena statistična populacija in navedene spremenljivke, po katerih populacijo prikazujemo; v desnem kotu nad tabelo napišemo enoto, če je enaka za vse podatke v tabeli, če pa so enote različne, jih navedemo za vsak stolpec posebej v glavi tabele in za vsako vrstico posebej v čelu tabele;
- osrednje del tabele, sestavljen iz tekstovnega dela (glava in čelo tabele), kjer povemo, kaj tabela prikazuje, in številskega dela, v katerem v polja vpisujemo podatke; zbirna vrstica prikazuje vsoto podatkov v stolpcu, zbirni stolpec pa vsoto podatkov v vrstici;
- pod tabelo navedemo vir in zapišemo pripombe.

Glavne sestavine tabele
Tabela 2: Glavne sestavine tabele

Naslov tabele

<table>
<tr><td colspan="6">GLAVA TABELE</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Č
E
L
O</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="8">S
T
O
L
P
E
C</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">vrstica</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>polje</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Zbirna vrstica</td><td></td></tr>
</table>

Vir: Lasten

Tabela 3: Aktivno prebivalstvo (v 1000) po glavnih poklicnih skupinah in spolu za leto 2000

POKLICNE SKUPINE	SKUPAJ (v 1000)		
	MOŠKI	ŽENSKE	SKUPAJ
Visoki uradniki, menedžerji, zakonodajalci	44	19	63
Strokovnjaki	36	58	94
Tehniki in drugi strokovni delavci	63	61	124
Uradniki	31	68	99
Storitveni poklici, trgovci	40	67	107
Kmetovalci, gozdarji, ribiči	40	34	74
Poklici za neindustrijski način dela	92	6	98
Upravljalci strojev in naprav …	106	64	170
Poklici za prosta dela	18	30	48
Vojaški poklici	2		2
Nerazvrščeni	8	5	13
SKUPAJ	481	413	894

Vir: SURS, Statistični letopis 2000

Vrnimo se k našemu prvotnemu primeru rezultatov testa znanja.
Napravimo tako imenovano frekvenčno distribucijo individualnih vrednosti oziroma pogostnostno porazdelitev posameznih vrednosti.

Tabela4: Frekvenčna porazdelitev individualnih vrednosti rezultatov testa

x (vrednosti)	f (absolutna frekvenca)
7	1
8	1
9	-
10	-
11	-
12	1
13	1
…	
21	2
22	4
…	
40	1
$\sum f$ =N	31

Vir: Lasten

Dobljena porazdelitev je krajša, vendar je v njej še vedno preveč podrobnosti. Zato vrednosti združimo v skupine (ali grupe ali frekvenčne razrede).

Tabela 5: Grupiranje podatkov

razredi	*f*	*f*(%)
7–11	2	6,45
12–16	4	12,9
17–21	6	19,35
22–26	8	25,81
27–31	7	22,58
32–36	3	9,68
37–41	1	3,23
	N = 31	100,00

Vir: Lasten

Celoten razpon podatkov zajamemo z določenim številom frekvenčnih razredov, ki so ponavadi enako široki, ni pa nujno. Število razredov in interval (to je širina razreda) se določajo sproti, brez pravila. Upoštevamo predvsem število enot v vzorcu (N). Ponavadi napravimo tako, da bomo imeli do 10 razredov. Če imamo vse intervale enako široke, lahko celoten obseg delimo s širino intervala in dobimo število intervalov. Vsak razred ima zgornjo in spodnjo mejo. Spodnja meja je za 0,5 manjša od števila, ki je zapisano, zgornja pa za 0,5 večja.

V našem primeru ima razred 7–11 spodnjo mejo s_k = 6,5 in zgornjo mejo z_k = 11,5. Razred 12–16 pa ima spodnjo mejo s_k = 11,5 in zgornjo mejo z_k = 16,5.

K je doloceno stevilo, v prvem razredu 1, v drugem 2…

Širina frekvenčnega razreda je enaka razliki med zgornjo in spodnjo mejo razreda.

$d_k = z_k - s_k$

Sredino frekvenčnega razreda dobimo tako, da vsoto zgornje in spodnje meje delimo z dve.

$x_k = \frac{z_k + s_k}{2}$

Tabela 6

razredi	*f*	*f*°	F	F°
7–11	2	6,45	0	0
12–16	4	12,9	2	6,45
17–21	6	19,35	6	19,35
22–26	8	25,81	12	38,71
27–31	7	22,58	20	64,52
32–36	3	9,68	27	87,1
37–41	1	3,23	30	96,77
	N=31	100	31	100

Vir: Lasten

V zgornji tabeli imamo tudi stolpca, v katera smo vnašali kumulativno absolutno frekvenco F in relativno kumulativno frekvenco F°.

Kumulativna frekvenca nam pove število rezultatov (podatkov) pod spodnjo mejo danega razreda.

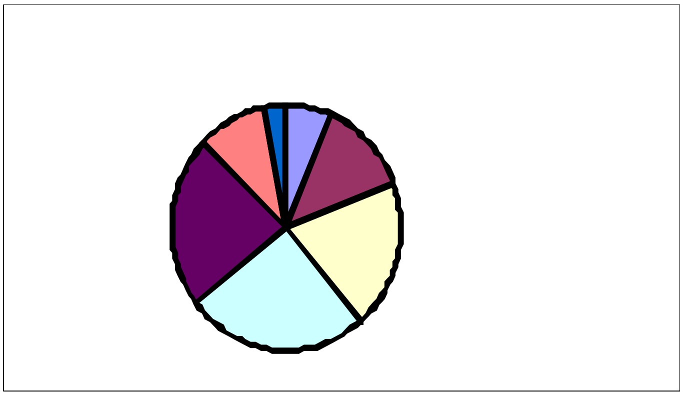
$F_{k+1} = F_k + f_k$

6.4 GRAFIČNO PRIKAZOVANJE PODATKOV

Veliko učinkoviteje kot s tabelami lahko prikažemo podatke z grafikoni. Kateri grafikon uporabimo, je odvisno od vrste podatkov in števila frekvenčnih razredov.

Kadar imamo manjše število razredov, lahko uporabimo **frekvenčni kolač** (angleško: pie chart) ali **strukturni krog** ali tudi krožni diagram. Kako postopamo:
1. določimo pripadajoče relativne frekvence
2. določimo tem pripadajoče središčne kote s pomočjo procentnega računa, saj vemo, da celota pomeni 360^0.

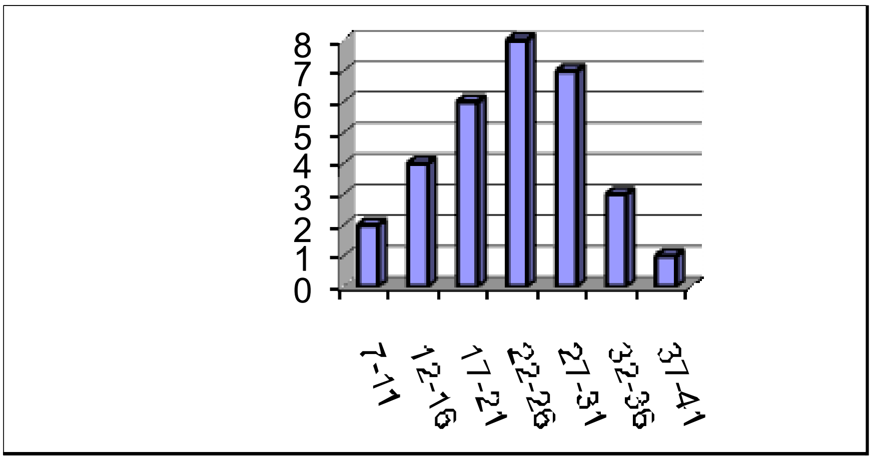
Narišimo za zgornji primer strukturni krog.



Slika 56: Strukturni krog
Vir: Lasten

Če so podatki razvrščeni v veliko frekvenčnih razredov ali imamo veliko posameznih vrednosti, je primerneje uporabiti stolpčni diagram ali histogram.

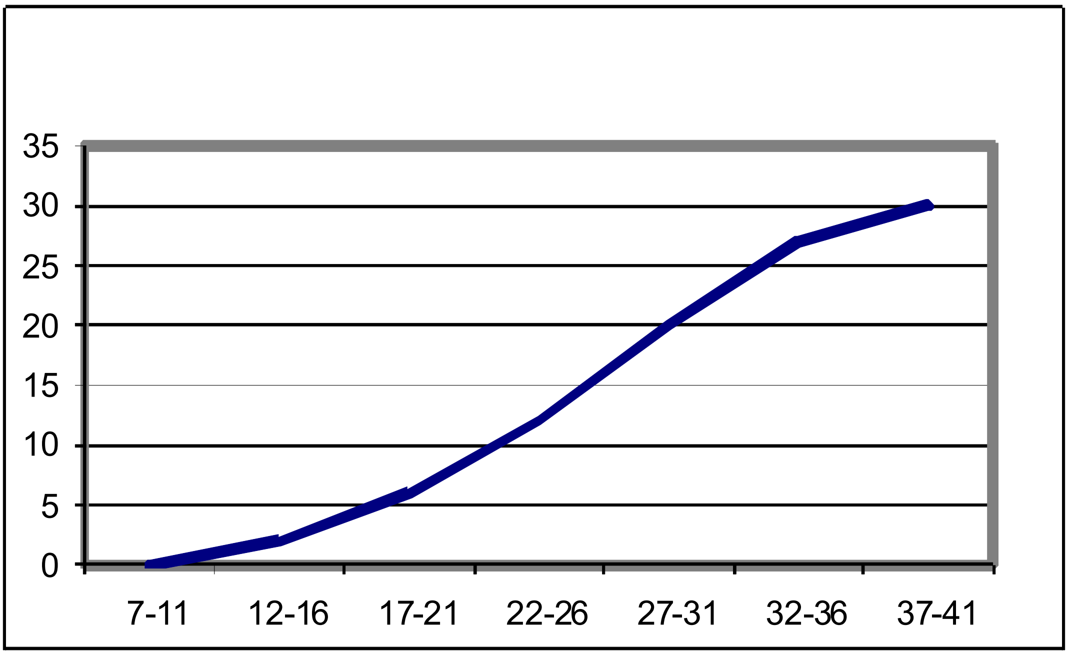
Histogrami so lahko različni, odvisno od vrste podatkov in seveda od tega, kaj želimo z diagramom povedati.
Narišimo še stolpični diagram za naše rezultate pri testu znanja, zbrane v Tabeli 2.



Slika 57: Histogram
Vir: Lasten

Lahko pa podatke prikazujemo še z linijskimi grafikoni ali poligoni. Poligon je najprimernejši za prikazovanje vrednosti kumulativnih frekvenc.

Linijski grafikon ali poligon za kumulativno frekvenco ima približno obliko črke S.



Slika 58: Linijski grafikon
Vir: Lasten

6.5 MERE SREDNJE VREDNOSTI

To so vrednosti, ki kažejo osrednjo težnjo podatkov oziroma centralno tendenco podatkov in s temi lahko opišemo celotno množico podatkov naenkrat.
Mere srednje vrednosti so :

ARITMETIČNA SREDINA (M, $\bar{x}$)
MEDIANA (M_e)
MODUS (M_O)

1. ARITMETIČNA SREDINA

Je povprečje rezultatov in je enaka kvocientu vsote vseh vrednosti statistične spremenljivke s številom teh vrednosti. Aritmetično sredino računamo le iz numeričnih podatkov. Dobra lastnost aritmetične sredine je, da nanjo vpliva tako število vseh podatkov kot njihova teža (velikost). Izčrpa vse podatke in je zato primerna za nadaljnjo obdelavo. Hkrati pa je to tudi njena slabost. Pri preveč heterogenih podatkih je bolje, da je ne računamo, ker bi se preveč pomaknila v smeri skrajne vrednosti.

a) Individualni podatki:

$$\mathrm{M} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

Primer: Določite povprečno število prevoženih kilometrov v prejšnjem tednu, če smo v ponedeljek prevozili 50 km, torek 100 km, sredo 65 km, četrtek 73 km, petek 27 km, soboto 36 km in v nedeljo nič.

$\mathrm{M} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} = \frac{50 + 100 + 65 + 73 + 27 + 36 + 0}{7} \doteq 50{,}14$ km.

V prejšnjem tednu smo dnevno v povprečju prevozili 50,14 km.
Kaj pa, če se določene vrednosti ponavljajo?

Tehtana aritmetična sredina:

$$\mathrm{M} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_3 x_N}{N}$$

Primer:

Izračunajmo povprečno oceno v razredu pri pouku matematike, če so imeli štirje oceno 1, deset jih je dobilo 2, deset oceno 3, štirje oceno 4 in dva oceno 5.

$\mathrm{M} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_N x_N}{N} = \frac{4 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{30} \doteq 2.67$

Povprečna ocena pri matematiki je približno 2,67.

b) Grupirane vrednosti

Aritmetično sredino grupiranih podatkov izračunamo s pomočjo kumulativne vsote:

$$\mathrm{M} = x_0 - \frac{iS_F}{N}.$$

Kjer so:
i – širina intervala
S_F - vsota kumulativnih frekvenc
x_0 - sredina zadnjega razreda

Aritmetično sredino grupiranih vrednosti – tistih, ki smo jih uredili v frekvenčno porazdelitev, lahko izračunamo tudi po:

$$\mathrm{M} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_N x_N}{N},$$

kjer so x_k sredine razredov.

c) Sumarna aritmetična sredina

Kadar imamo več že izračunanih aritmetičnih sredin nekih skupin podatkov in želimo izračunati skupno aritmetično sredino, pa numerusi (N) niso enaki, določimo skupno (ponderirano) aritmetično sredino:

$$M_{SK} = \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2 + ... + N_k M_k}{N_1 + N_2 + ... + N_k}$$

➔Primer:
Povprečna ocena pri matematiki po posameznih razredih je bila:
1.a (30 dijakov): 2,12
1.b (31 dijakov): 2,46
1.c (25 dijakov): 3,14
1.d (28 dijakov): 2,76
Izračunajmo povprečno oceno vseh prvih letnikov:

$$M_{SK} = \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2 + ... + N_k M_k}{N_1 + N_2 + ... + N_k} = \frac{30 \cdot 2{,}12 + 31 \cdot 2.46 + 25 \cdot 3.14 + 28 \cdot 2{,}76}{30 + 31 + 25 + 28} \doteq 2{,}59$$

2. MEDIANA (M_e)

Mediana ali središčnica je tista srednja vrednost statistične spremenljivke, pri kateri je polovica vrednosti večjih, druga polovica vrednosti pa manjših od dane vrednosti (50% je manjših vrednosti in 50% večjih vrednosti).

a) Individualne vrednosti:
Poiščemo vrednost, ki je na R_{Me} mestu po velikosti urejenih podatkov.

$$R_{Me} = \frac{N+1}{2} \text{ in}$$

Rp = N $\cdot P$ + 0,5

P = 0,5

$$\text{Me} = x_p + (x_1 - x_0)(Rp - R)$$

➔Primer 1:

Podano imamo naslednjo ranžirno vrsto:
6, 7, 8, 9, 10
Mediana je v tem primeru podatek v sredini ranžirne vrste: 8

➔Primer 2:

Imejmo podatke urejene v ranžirno vrsto:

Tabela 7: Ranžirna vrsta

R	1	2®	3	4
x	5	5(x_0)	7(x_1)	8

Vir: Lasten

Pri sodem številu podatkov ni pravega srednjega podatka, zato za mediano vzamemo aritmetično sredino srednjih dveh podatkov.
Me = $x_p + (x_1 - x_0)(Rp - R)$
Me = 5 + (7 – 5)(2,5 – 2)
Me = 6

b) Grupirani podatki

Za grupirane podatke mediano določimo s pomočjo naslednjega obrazca:

$$M_e = x_0 + \frac{i(R_{Me} - F_0)}{f_0}$$, kjer je

x_0 - natančna spodnja meja razreda, v katerem je mediana

$$R_{Me} = \frac{N+1}{2}.$$

f_0 - absolutna frekvenca razreda, v katerem je mediana

F_0 - kumulativna frekvenca razreda, v katerem je mediana

i - širina razreda

➔Primer 3:

Tabela 8

razred	f	F
7–11	2	0
12–16	4	2
17–21	6	6
22–26	8	12
27–31	7	20
32–36	3	27
37–41	1	30

Vir: Lasten

$R_{Me} = \frac{N+1}{2} = 16$

$x_0 = 21{,}5$

$f_0 = 8$

$F_0 = 12$

Me = 24

Značilnosti mediane:

Mediana je manj natančna srednja vrednost kot aritmetična sredina. Nanjo vpliva samo število rezultatov, ne pa tudi njihova teža. Zato je primerna za računanje takrat, ko so podatki heterogeni. Za nadaljnjo obdelavo pa ni primerna, ker danih podatkov ne izčrpa v zadostni meri. Njena funkcija je veljavnejša analiza podatkov in s tem so veljavnejša tudi spoznanja oziroma trditve.

3. MODUS (Mo)

Modus ali gostiščnica se imenuje najpogostejša vrednost ali najpogostejši podatek v množici vseh vrednosti.

a) Individualne vrednosti

Poiščemo podatek, ki se največkrat ponovi. Če se v neki množici podatkov dve vrednosti pojavita enako mnogokrat, pravimo, da je razdelitev vrednosti bimodalna. Če sta enako močni vrednosti sosednji, pa lahko izračunamo povprečje obeh in nam ta predstavlja modus.

b) Grupirane vrednosti

Približek modusa določimo tako, da poiščemo sredino razreda z najvišjo frekvenco. Dobimo modalni razred.
V našem primeru:
Mo=24
Natančno pa modus določimo na naslednji način:

$$Mo = x_0 + \frac{i(f_0 - f_n)}{2f_0 - f_n - f_v},$$

kjer je:
x_0 - natančna spodnja meja razreda, v katerem je modus
f_0 - absolutna frekvenca razreda, v katerem je modus
i - širina razreda
f_n - absolutna frekvenca razreda, ki je pred modalnim (nižji)
f_v - absolutna frekvenca razreda, ki je za modalnim (višji)
V našem primeru dobimo: Mo = 24,8

Prednost modusa pred aritmetično sredino je v tem, da nanj ne vplivata niti teža vrednosti niti število vrednosti, ampak samo frekvenca. Zato zelo dobro predstavlja podatke.

6.6 MERE VARIACIJE – RAZPRŠENOSTI

Srednje vrednosti v splošnem preslabo opišejo množico podatkov. Vrednosti spremenljivke se odklanjajo od srednjih vrednosti (na primer od povprečja), pravimo tudi, da vrednosti varirajo od srednjih vrednosti, kar je posledica vplivov posamičnih vrednosti spremenljivke. Poznamo več mer variacij.

1. VARIACIJSKI RAZMIK (VR)

Variacijski razmik je zelo enostavna mera variacije. Je razlika med maksimalno in minimalno vrednostjo statistične spremenljivke.

$$VR = x_{\max} - x_{\min}$$

➔ Primer:

Pet študentov so vprašali, koliko ur tedensko porabijo za branje knjig. Dva bereta po 5 ur, eden 7 ur, eden 8 ur in eden 10 ur.
VR = $x_{\max} - x_{\min}$ = 10 – 5 = 5

Variacijski razmik je odvisen od skrajnih vrednosti in te zelo povečajo variacijski razmik. Zato je zelo nezanesljiva mera variacije in ni primerna za nadaljnjo obdelavo podatkov.

2. POVPREČNI ABSOLUTNI ODKLON

Povprečni absolutni odklon nam pove, za koliko se v povprečju vrednosti spremenljivke razlikujejo od aritmetične sredine.

a) Individualni podatki

$$PO_M = \frac{\sum_{k=1}^{N} |x_k - M|}{N}$$

➔<u>Primer:</u>

Uporabimo zgornji primer bralcev knjig in določimo povprečni absolutni odklon.
Najprej moramo določiti aritmetično sredino M.

$$M = \frac{5+5+7+8+10}{5} = 7$$

$$PO_M = \frac{\sum_{k=1}^{N} |x_k - M|}{N} = \frac{2+2+0+1+3}{5} = 1.6$$

V povprečju se vrednosti spremenljivke za 1,6 razlikujejo od aritmetične sredine.

b) Grupirane vrednosti

$$PO_M = \frac{\sum_{k=1}^{N} f_k |x_k - M|}{N}$$

kjer so:
x - sredine razredov
f - absolutne frekvence razredov
M - aritmetična sredina
N - skupno število podatkov

➔<u>Primer:</u>

Uporabimo primer o rezultatih na testu znanja.
Aritmetično sredino za ta primer smo že določili.

$$M = x_0 - \frac{iS_F}{N} = 23{,}35$$

Pri računanju si pomagamo s tabelo:

Tabela 9

Razredi	Absolutna frekvenca f	Sredina razreda x	$\lvert x - M \rvert$	f$\lvert x - M \rvert$
7–11	2	9	14,35	28,70
12–16	4	14	9,35	37,40
17–21	6	19	4,35	26,10
22–26	8	24	0,65	5,20
27–31	7	29	5,65	39,55
32–36	3	34	10,65	31,95
37–41	1	39	15,65	15,65

Vir: Lasten

$$PO_M = \frac{\sum_{k=1}^{N} f_k |x_k - M|}{N} = \frac{28{,}7 + 37{,}4 + 26{,}1 + 5{,}2 + 39{,}55 + 31{,}95 + 15{,}65}{31} \doteq 6{,}98$$

3. VARIANCA (σ^2)

Tudi varianca nam kaže povprečno odstopanje posameznih vrednosti od aritmetične sredine. Je najpogostejša in najbolj znana mera variacije. Varianca je aritmetična sredina kvadratov odklonov vseh vrednosti od aritmetične sredine.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k\_1}^{N} (x_k - M)^2}{N}$$

Pri varianci nas motijo kvadrati, zato za mero variacije oziroma razpršenosti raje uporabimo **STANDARDNI ODKLON**.
Standardni odklon je kvadratni koren iz variance.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Kako jo izračunamo?

a) Individualne vrednosti

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2}{N}}{N}$$

➔Primer 1:

Uporabimo zgornji primer z bralci knjig.
Določimo vsoto kvadratov vseh spremenljivk.

$$\sum_{k=1}^{N} x_k^2 = 25 + 25 + 49 + 64 + 100 = 263$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2}{N}}{N} = \frac{263 - \frac{35^2}{5}}{5} = 3{,}6$$

Določimo še standardni odklon: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1{,}897$.
Večja sta varianca in standardni odklon, večja so odstopanja od aritmetične sredine.

b) Grupirane vrednosti $\sigma^2 = \frac{i^2}{N}\left(2 \cdot S_{FF} + S_F - \frac{S_F{}^2}{N}\right)$,

kjer je
i – širina intervala
S_{FF} - vsota kumulativnih frekvenc v drugi kumulativni vrsti

S_F - vsota kumulativnih frekvenc v prvi kumulativni vrsti
N – število vseh podatkov

Pri računanju si pomagamo s tabelo kumulativnih frekvenc.
Primer 2:

Določimo varianco in standardni odklon za naš primer rezultatov na testu. Zapišimo tabelo kumulativnih frekvenc. Kumulativno frekvenco i-tega razreda druge kumulativne vrste dobimo tako, da seštejemo kumulativne frekvence prve vrste do i-tega razreda. Pomagamo si s tabelo.

Tabela 10

Razredi	Absolutna frekvenca f	F	FF
7–11	2	0	0
12–16	4	2	0
17–21	6	6	2
22–26	8	12	8
27–31	7	20	20
32–36	3	27	40
37–41	1	30	67

Vir: Lasten

i = 5
S_{FF} = 2 + 8 + 20 + 40 + 67 = 137
S_F = 2 + 6 + 12 + 20 + 27 + 30 = 97
N = 31

$$\sigma^2 = \frac{i^2}{N}\left(2 \cdot S_{FF} + S_F - \frac{S_F^{\ 2}}{N}\right) = \frac{5^2}{31}\left(2 \cdot 137 + 97 - \frac{97^2}{31}\right) = 54{,}42$$

Določimo še standardni odklon:
$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 7{,}38$

Standardni odklon, kot mera variacije, pove, koliko je vredna aritmetična sredina. Ali nam dobro ali slabo predstavlja podatke.

Kadar ima pojav enaka ali zelo podobna povprečja, pomeni višji standardni odklon višjo variabilnost spremenljivk. Kadar pa imamo različne pojave in s tem tudi različne aritmetične sredine, jih ne moremo direktno primerjati, ampak moramo absolutne vrednosti najprej pretvoriti v relativne in šele nato primerjati.

Ena izmed relativnih mer variacije je **KOEFICIENT VARIACIJE (V)**. Omogoča primerjavo različnih pojavov glede variabilnosti.

$$V = \frac{100 \cdot \sigma}{M}$$

Koeficient variacije pove, kolikšen odstotek vrednosti aritmetične sredine zavzema standardni odklon.

6.7 RELATIVNA ŠTEVILA

INDEKSI

Indeksi so relativna števila, ki jih uporabljamo za primerjanje dveh istovrstnih, enakovrednih podatkov v različnem času, kraju ali po različni stvarni opredelitvi. Računamo jih tako, da vzamemo neko vrednost za izhodišče računanja, ji poimenujemo osnovo in pripišemo vrednost 100. Vse druge vrednosti računamo glede na to osnovo. Indekse izračunamo:

$$I_{j/0} = \frac{Y_j}{Y_0} \cdot 100$$

Kjer je:
$I_{j/0}$ - indeks,
Y_0 - podatek, s katerim primerjamo osnovna indeksa,
Y_j - podatek, ki ga primerjamo.

Indeks ima vrednost večjo od 100 takrat, ko je primerjalni podatek Y_j večji od osnove Y_0, če pa je primerjalni podatek manjši od osnove, je vrednost indeksa manjša od 100. Indekse običajno zaokrožujemo na cela števila, če pa je primerjalni podatek glede na osnovo zelo majhen, ga zaokrožimo na eno decimalko.

1) Krajevni indeksi

S krajevnimi indeksi primerjamo istovrstne podatke, ki se nanašajo na različna geografska območja.

➔Primer:

Primerjajmo mesečne bruto plače v letu 2006 v štirih slovenskih občinah, izražene v takratni valuti – slovenskih tolarjih (SIT). Izračunajmo indekse, osnova pa nam bo podatek za Slovenijo.

Tabela 11: Povprečne mesečne plače za 4 slovenska mesta

Občina	Povprečne mesečne bruto plače	Povprečne mesečne neto plače	Delovno aktivno prebivalstvo
Ljubljana	347136	213220	193157
Maribor	286030	183135	61736
Celje	289253	185549	29507
Kranj	297759	191415	25003
SLOVENIJA	290635	185342	824839

Vir: Statistični urad RS

Iz tabele uporabimo podatke za povprečne mesečne bruto plače, kot osnovo pa uporabimo podatek za Slovenijo.
Izračun za Maribor:

$$I_{Mb\ /\ Slo} = \frac{Y_{Mb}}{Y_{Slo}} \cdot 100 = \frac{286030}{290635} \cdot 100 = 98$$

Podobno izračunamo še ostale kraje in dobimo naslednjo tabelo:

Tabela 12: Krajevni indeksi

Občina	Povprečne mesečne bruto plače	Indeksi (Slovenija = 100)
Ljubljana	347136	119
Maribor	286030	98
Celje	289253	99,5
Kranj	297759	102
SLOVENIJA	290635	100

Vir: Statistični urad RS

Indeks razložimo tako, da od indeksa odštejemo 100 in dobimo relativno razliko ($D_{j/0}$), ki jo izrazimo v odstotkih.

$$D_{j/0} = I_{j/0} - 100$$

Relativno razliko za Maribor izračunamo:

$D_{Mb/Slo} = 98 - 100 = -2$ %.

Dobljen rezultat nam pove, da so bile bruto plače v Mariboru za 2 % nižje od povprečja v Sloveniji.

Izračunani indeksi kažejo, da so bile povprečne mesečne bruto plače višje od povprečja v Sloveniji v Ljubljani, in sicer za 19 %, v Kranju za 1 %, v Celju pa nižje za 0,5%.
Krajevne indekse običajno prikazujemo s stolpci.

2) Časovni indeksi

Časovne indekse računamo s primerjavo dveh istovrstnih podatkov, ki se nanašata na dva različna časovna trenutka ali razmika. Po načinu izbora osnove ločimo indekse s stalno osnovo in indekse s premično osnovo ali verižne indekse.
Časovne indekse s stalno osnovo računamo po naslednji formuli:

$$I_{j/0} = \frac{Y_j}{Y_0} \cdot 100$$

Kjer je:

$I_{j/0}$ - indeks,

Y_0 - vrednost člena, s katerim primerjamo osnovna indeksa,

Y_j - vrednost člena, ki ga primerjamo.

Verižne indekse, za katere je značilna premična osnova, računamo:

$$V_I = \frac{Y_j}{Y_{j-1}} \cdot 100$$

Kjer je:

V_I - verižni indeks,

Y_{j-1} - podatek, s katerim primerjamo osnovna indeksa,

Y_j - podatek, ki ga primerjamo.

➔Primer:

Izračunajmo indekse s stalno osnovo in verižne indekse za Pridelek pšenice v Sloveniji v letih od 2003 do 2007.

Tabela 13: Pridelek pšenice

Leto	Pšenica (v tonah)
2003	122,9
2004	146,8
2005	141,3
2006	134,4
2007	133,3

Vir: Statistični letopis 2008

Primer izračuna indeksa s stalno osnovo 2005 = 100 za leto 2007:

$$I_{07/05} = \frac{Y_{07}}{Y_{05}} \cdot 100 = \frac{133{,}3}{141{,}3} \cdot 100 = 94$$

Ko preučujemo spreminjanje pojava v času, imenujemo relativno razliko stopnja rasti (S_j).

S_{07} = 94 – 100 = –6 %. V letu 2007 je bilo 6 % manj pridelane pšenice kot leta 2005.

Primer izračuna verižnega indeksa za leto 2004:

$$V_{04/03} = \frac{Y_j}{Y_{j-1}} \cdot 100 = \frac{146{,}8}{122{,}9} \cdot 100 = 119$$

S_{04} = 119 – 100 = 19 %

V letu 1994 je bil pridelek pšenice 19 % večji kot leto poprej.

Tabela 14: Pridelek pšenice v Sloveniji v letih od 2003 do 2007

Leto	Pšenica (v t)	Indeksi s stalno osnovo (2005 = 100)	Verižni indeksi
2003	122,9	87	-
2004	146,8	104	119
2005	141,3	100	96
2006	134,4	95	95
2007	133,3	94	99

Vir: Statistični letopis 2008

Zveza med indeksi s stalno osnovo in verižnimi indeksi

Zvezo med indeksi s stalno osnovo in verižnimi indeksi ugotovimo iz osnovnega obrazca za izračun verižnih indeksov. V obrazcu pomnožimo števec in imenovalec s 100, delimo z Y_0 in dobimo:

$$V_j = \frac{Y_j}{Y_{j-1}} \cdot 100 = \frac{\frac{Y_j}{Y_0} \cdot 100}{\frac{Y_{j-1}}{Y_0} \cdot 100} \cdot 100 = \frac{I_j}{I_{j-1}} \cdot 100$$

To formulo lahko zapišemo krajše:

$$V_j = \frac{I_j}{I_{j-1}} \cdot 100$$

Obrazec uporabimo, kadar poznamo indekse s stalno osnovo in računamo verižne indekse in kadar poznamo verižne indekse in želimo izračunati indekse s stalno osnovo.

a) Računanje verižnih indeksov iz indeksov s stalno osnovo

➔Primer: Izračunajmo verižne indekse iz indeksov s stalno osnovo (1995 = 100), podanih v tabeli št. 15.

Uporabimo zgornji obrazec in izračunamo verižni indeks za leto 1997:

$$V_{97} = \frac{I_{97}}{I_{96}} \cdot 100 = \frac{104}{98} \cdot 100 = 106$$

Tabela 15: Dinamika prodaje v nekem podjetju v letih od 1995 do 2000. Indeksi s stalno osnovo 1995 =100 in preračunani verižni indeksi

Leto	Indeks (1995 = 100)	Verižni indeksi
1995	100	-

1996	98	98
1997	104	106
1998	103	99
1999	109	106
2000	112	103

Vir: Lasten

b) Računanje indeksov s stalno osnovo iz verižnih indeksov

V primeru, ko poznamo verižne indekse in bi radi izračunali indekse s stalno osnovo, izberemo najprej osnovo in izračunamo:

- indeks s stalno osnovo za predhodno časovno enoto po obrazcu:

$$I_{j-1} = \frac{I_j}{V_j} \cdot 100 \qquad \text{; pred baznim letom}$$

- indeks s stalno osnovo za časovne enote po izbrani bazni časovni enoti po obrazcu:

$$I_j = V_j \cdot \frac{I_{j-1}}{100} \quad \text{; po baznem letu}$$

Primer:

Izračunajmo indekse s stalno osnovo iz verižnih indeksov podanih v tabeli …

Tabela 16:Dinamika prodaje v podjetju Številka 2 d.o.o. v letih od 1995 do 2000. Verižni indeksi in preračunani indeksi s stalno osnovo (1997 = 100)

Leto	Verižni indeksi	Indeks (1997 = 100)
1995	-	99
1996	102	101
1997	99	100
1998	98	98
1999	103	101
2000	104	105

Vir: Lasten

Izračun indeksov s stalno osnovo (1997 = 100) za leto 1996 in 1995:

$$I_{96} = \frac{I_{97}}{V_{97}} \cdot 100 = \frac{100}{99} \cdot 100 = 101$$

$$I_{95} = \frac{I_{96}}{V_{96}} \cdot 100 = \frac{101}{102} \cdot 100 = 99$$

Izračun indeksov s stalno osnovo (1997 = 100) za leto 1998 in 1999:

$$I_{98} = V_{98} \cdot \frac{I_{97}}{100} = 98 \cdot \frac{100}{100} = 98$$

$$I_{99} = V_{99} \cdot \frac{I_{98}}{100} = 103 \cdot \frac{98}{100} = 101$$

6.8 ANALIZA ČASOVNIH VRST

Časovne vrste so v ekonomiji najbolj pogosta oblika podatkov, ki jih imamo na voljo za analiziranje preteklih, tekočih in verjetnih bodočih gibanj ekonomskih spremenljivk, ki opisujejo dogajanja v gospodarstvu. Za enostavno analizo časovne vrste uporabljamo enostavne kazalce dinamike, ki smo jih že spoznali (indeksi s stalno osnovo, verižni indeksi, stopnje rasti, koeficienti rasti).
Na vrednosti podatkov v časovni vrsti vplivajo številni dejavniki. Njihova moč in učinek na pojav se spreminja, v splošnem pa je rezultat teh dejavnikov določeno gibanje pojava.

Spremembe, ki lahko nastopijo v posamezni časovni vrsti:

- trend predstavlja učinek dejavnikov, ki delujejo na dolgi rok in prikazuje osnovno smer razvoja. Trend je lahko naraščajoči, padajoči ali nihajoči trend.
- ciklična nihanja so dolgoročna, nihanja okoli trenda pa značilna za ekonomske pojave.
- periodična nihanja so rezultat dejavnikov, ki se pojavljajo v stalnih časovnih razmikih.
- iregularna nihanja so lahko posledica enkratnih dejavnikov (naravne nesreče …) ali slučajnih dejavnikov.

Trend

Trend prikazuje osnovno smer razvoja pojava in je najpomembnejša sestavina časovne vrste. Poznavanje trenda nam omogoča napovedati verjetni razvoj pojava v prihodnosti, olajšuje ugotavljanje ostalih sestavin pojava, izračun trenda pa nam omogoča nazornejšo primerjavo med pojavi.
Metod za določanje trenda je več. Najpogosteje se uporablja prostoročno metodo in metodo najmanjših kvadratov.

Prostoročna metoda določanja trenda
Je najenostavnejša med vsemi metodami. Časovno vrsto vrišemo v linijski grafikon in izsamega poteka linije sklepamo o obliki in poteku trenda. Trend v vsakem primeru poteka med realnimi vrednostmi tako, da se osnovna časovna vrednost od trenda odklanja navzgor in navzdol. Linija je lahko premica ali krivulja, ki jo vrišemo po lastni presoji. Tovrstno določanje trenda je seveda subjektivno, vendar hitro in enostavno.

Primer:

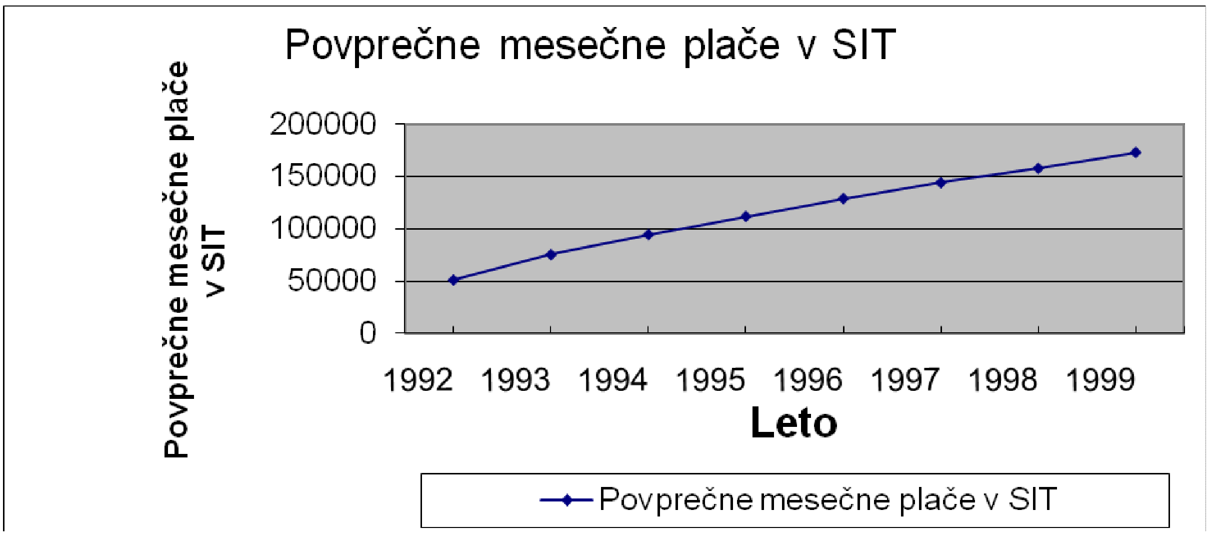
Tabela 17: Povprečne mesečne bruto plače zaposlenih v Sloveniji v letih od 1992 do 1999

Leto	Povprečne mesečne plače (v SIT)
1992	51044
1993	75432
1994	94618
1995	111996
1996	129125
1997	144251
1998	158069
1999	173245

Vir: Statistični letopis 2000

V tabeli so podatki o povprečnih mesečnih bruto plačah zaposlenih v Sloveniji v letih od 1992 do 1999, izraženi v takratni valuti – slovenskih tolarjih (SIT).
Prikažimo časovno vrsto z linijskim grafikonom in prostoročno določimo trend.

V grafikonu prostoročno vrišemo linijo, ki se časovni vrsti najbolje prilega. V primeru povprečne bruto plače zaposlenih lahko ugotovimo, da je linija premica in je trend naraščajoč.



Slika 59: Linijski grafikon
Vir: Lasten

Metoda najmanjših kvadratov

Metoda najmanjših kvadratov je metoda, ki jo med analitičnimi metodami za ugotavljanje trenda najpogosteje uporabljamo.
Odkloni od trenda so v posameznih časovnih enotah lahko pozitivni ali negativni, njihova vsota pa je enaka nič.

$$\sum_{t=1}^{N}(Y_t - T_t) = 0$$

Pri tej metodi je postavljena zahteva, da mora biti vsota kvadratov odklonov časovne vrste (Y_t) od trenda (T_t) minimalna:

$$\sum_{t=1}^{N}(Y_t - T_t)^2 = \min$$

V okviru tega dela bomo obravnavali le linearni trend, ki je opredeljen z linearno funkcijo:
T = α + βt
Pri čemer je
α - konstanta linearnega trenda
β - smerni koeficient linearnega trenda, ki nam pove letno (mesečno) spremembo linearnega trenda
t - čas

$$\sum_{t=1}^{N} Y_t = \alpha N + \beta \sum_{t=1}^{N} t$$

$$\sum_{t=1}^{N} Y_t t = \alpha \sum_{t=1}^{N} t + \beta \sum_{t=1}^{N} t^2$$

Linearni trend bomo uporabljali le takrat, ko pojav narašča ali nazaduje enakomerno.

➔ Primer:

Izračunajmo parametre linearnega trenda za primer povprečnih mesečnih plač zaposlenih v Sloveniji v letih od 1992 do 1999.

Funkcijo trenda določimo s pomočjo dveh normalnih enačb:
937780 = 8α + 36β
4937320 = 36α + 204β
Z rešitvijo enačb dobimo:
β = 17078,81
α = 40367,8

T_t = 40367,8 + 17078,81t
Vrednosti trenda izračunamo:

$T_{t=1} = 40367{,}8 + 17078{,}81 \cdot 1 = 57446.66$

$T_{t=2} = 40367{,}8 + 17078{,}81 \cdot 2 = 74525{,}42$

Tabela 18: Povprečne mesečne bruto plače zaposlenih v Sloveniji v letih od 1992 do 1999; podatki za izračun parametrov funkcije trenda in vrednosti trenda

Leto	Povprečne mesečne plače (v SIT)	Čas t	t^2	tY_t	T_t
1992	51044	1	1	51044	57446,66
1993	75432	2	4	150864	74525,42
1994	94618	3	9	283854	91604,23
1995	111996	4	16	447984	108683,04
1996	129125	5	25	645625	125761,85
1997	144251	6	36	865506	142840,66
1998	158069	7	49	1106483	159919,47
1999	173245	8	64	1385960	176998,28
	937780	36	204	4937320	

Vir: Statistični letopis 2000

Napovedovanje na osnovi trenda

Ena od najpomembnejših nalog statistike je pripraviti osnove za zmanjšanje tveganja pri sprejemanju odločitev. Prav na osnovi trendne enačbe lahko predvidimo razvoj časovne vrste v prihodnosti.

V našem primeru, povprečnih bruto plač v Sloveniji, napovejmo bruto plačo zaposlenih v letu 2000. Spremenljivko t določimo tako, da nadaljujemo s številom, ki sledi (9) in s pomočjo trendne enačbe predvidimo povprečno mesečno bruto plačo za leto 2000:

$$T_{t=9} = 40367{,}8 + 17078{,}81 \cdot 9 = 194077{,}09$$

Seveda bo gibanje pojava v prihodnosti takšno, kot je bilo do sedaj, če bodo nanj vplivali vsi dejavniki kot do sedaj in v takšnem obsegu kot do sedaj. Kratkoročna napovedovanja razvoja so običajno zanesljivejša, saj se dejavniki v krajšem obdobju ponavadi manj spremenijo.

Opomba: Nekateri podatki so pridobljeni na spletni strani Statističnega urada Republike Slovenije, dosegljivi na naslovu http://www.stat.si/. Za nadgranjo statistične obdelave podatkov z osebnimi računalniki je namenjen statistični paket SPSS. Več informacij na naslovu http://www.spss.com/.

Povzetek:
V tem poglavju ste se naučili osnov statistike: podatke znate prikazati tabelarično in grafično, izračunati znate srednje vrednosti in mere razpršenosti. Določiti znate krajevne in časovne indekse (indekse s stalno osnovo in verižne indekse) ter prostoročno in z metodo najmanjših kvadratov določiti trend.

Še nekaj nalog za utrjevanje:

1. Oglejte si zadnji popis prebivalstva na spletni strani Statističnega urada Republike Slovenije, dosegljivi na naslovu http://www.stat.si/.
2. Podatke, 341, 564, 325, 143, 431, 254, 564 zapišite v ranžirno vrsto in izračunajte aritmetično sredino, medianom, modus ter standardni odklon.
3. Podatke 5, 3, 7, 3, 8, 5, 1, 5, 2, 7, 9, 4, 3, 2, 7, 4, ,7 , 2, 6, 8, 4, 9, 10, 10, 2, 5, 9, 1, 5, 2 grupirajte v tri frekvenčne razrede in izračunajte aritmetično sredino, standardni odklon ter koeficient variacije grupiranih podatkov.
4. Frekvenčne razrede iz prejšnje naloge grafično prikažite s strukturnim krogom in histogramom.

7 KOMBINATORIKA IN VERJETNOSTNI RAČUN

CILJI:

Ob koncu tega poglavja boste:
- poznali osnovne kombinatorične pojme in znali rešiti enostavnejše primere iz kombinatorike,
- poznali klasično, aksiomatično in statistično definicijo verjetnosti,
- poznali definicijo pogojne verjetnosti,
- znali razložiti pojma slučajna spremenljivka in matematično upanje.

Če potujemo iz Maribora v Ankaran, se bomo najverjetneje odpravili po avtocesti. Ali ste kdaj pomislili, na koliko različnih načinov bi lahko potovali proti morju? Vse možnosti bi lahko prikazali s kombinatoričnim drevesom (v resnici jih je preveč), lahko pa se jih naučite izračunati. Pri verjetnosti bomo opazovali tiste dogodke, za katere hočemo, da se zgodijo, vendar ni nujno, da se bodo dejansko zgodili. Spoznali boste, kaj je nemogoč dogodek (noben študent ne opravi izpita), gotov dogodek (kozarec pade na tla, če ga izpustimo) in slučajen dogodek ter znali izračunati njihove verjetnosti.

7.1 ELEMENTARNA KOMBINATORIKA

Pred 250 leti sta matematika Eueler in Bernoulli rešila problem zamenjave pisem.
Pisar je napisal n pisem in n ovojnic. Pri vstavljanju pisem ni bil pozoren. Koliko je možnosti, da vsaj eno pismo ne pride na pravi naslov?
Naj bo $n = 4$.
Za prvo ovojnico imamo na voljo eno od štirih pisem, za drugo eno od 3 pisem, za tretjo ovojnico ima na voljo 2 pismi in za četrto eno pismo.
$N = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Vseh napačnih možnosti je 23, kajti samo ena je prava.
<u>Pravilo produkta:</u>
Če imamo pri nekem postopku k zaporednih faz in je pri prvi fazi n_1 možnosti, pri drugi n_2 možnosti,…, število izborov v posamezni fazi pa je neodvisno od tega katere možnosti smo izbrali v prejšnjih fazah, je število odločitev:
$N = n_1 \cdot n_2 ... \cdot n_k$
<u>Pravilo vsote:</u>
Če izbiramo med n_1 možnostmi iz prve množice izborov, n_2 možnostmi iz druge množice izborov, …, n_k možnostmi iz k-te množice izborov in so izbori nezdružljivi potem velja:
$N = n_1 + n_2 + … + n_k$.

➔<u>Primer 1:</u>

Ga. Novak je na kosilu v samopostrežni restavraciji. Na jedilniku so:
- 2 vrsti juh (goveja in porova)
- 3 vrste glavnih jedi
- 3 vrste solat
- 2 vrsti sladic (kuhana smetana in sladoled)

Koliko jedilnikov ima na voljo, če zagotovo izbere govejo juho in sladoled?

N = $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$
Na voljo ima devet jedilnikov.

Primer 2:

Oznake avtomobilskih registerskih tablic v Sloveniji so sestavljene iz števk in črk slovenske abecede in X in Y (brez šumnikov in črke O) in so treh vrst:

1) na začetku črka za njo števka različna od nič in tej sledi še trimestno število;
2) na začetku dve dvomestni števili, ki ji sledi še črka;
3) na začetku črka, sledi ji števka, za njo dvomestno število in na koncu spet črka.

S katerim tipom avtomobilskih tablic lahko v eni upravni enoti opremijo največ avtomobilskih tablic?

1) N = $23 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 23 \cdot 9 \cdot 10^3$
2) N = $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 23 = 23 \cdot 10^4$
3) N = $23 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 23 = 23^2 \cdot 10^3$

Največ avtomobilov lahko opremimo s tretjim tipom avtomobilskih tablic.

7.1.1 Permutacije

V pisarni morate pospraviti n dokumentov v n različnih map, vrstni red je pomemben.
V prvo mapo lahko damo dokument na n različnih načinov, v drugo mapo lahko damo dokument na (n-1) načinov, …, v n-to mapo lahko damo dokument na 1 način.
Torej je vseh načinov:
N = $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$
Produkt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ krajše zapišemo $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ = n!
Kar preberemo n fakulteta ali n faktorsko.

Definirajmo še 0! = 1.

Primer 1:

Določi vrednost 6!.
$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5! = 720$

Primer 2:

Določimo še vrednost naslednjih ulomkov:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Razporeditve n različnih elementov na n mest (vrstni red elementov je pomemben) imenujemo permutacije n elementov.
Teh razporeditev je n!.
Permutacije pri katerih razporejamo same različne elemente imenujemo PERMUTACIJE BREZ PONAVLJANJA.

Permutacij n elementov s ponavljanjem, od katerih se eden od elementov ponavlja p-krat, drugi q-krat, tretji r-krat in tako naprej, je:

$$P_n^{p,q,r,...} = P_{p,q,r,..}(n) = \frac{n!}{p!q!r!...}$$

7.1.2 Variacije

Pri permutacijah brez ponavljanja smo razporejali vse elemente neke končne množice z močjo n. Če pa elemente neke končne množice z močjo n razporejamo na r mest in je r < n, elementi pa se ne smejo ponavljati, delamo razporeditve po r elementov iz množice, ki ima n elementov. To so variacije n elementov reda r brez ponavljanja

Število variacij r-tega razreda **brez ponavljanja** je

$$V(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Če v naboru dovolimo ponavljanje, potem govorimo o variacijah n-tega razreda s ponavljanjem. Število **variacij s ponavljanjem** r-tega razreda je:

(p)V(n,r) = n^r.

7.1.3 Kombinacije

Ko iz množice z n elementi izbiramo k elementov in vrstni red ni pomemben, govorimo o kombinacijah. Na primer ab in ba sta ista kombinacija. V splošnem se lahko pokaže, da je število kombinacij:

C(n,r) = $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

C(n,r) je število podmnožic z r elementi v množici z n elementi.

Za pozitivni celi števili r in n , kjer je r$\leq$n, uvedimo naslednji simbol $\binom{n}{r}$, kar preberemo n nad r in ga imenujemo **binomski koeficient**. Matematično koeficient pomeni naslednje:

$$\binom{n}{r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

➔Primer 1:

Na koliko načinov lahko sestavimo 3-člansko ekipo, ki jo sestavljajo 3 od 8 šoferjev avtobusa?
Izberimo tri od osmih šoferjev avtobusa, in ker vrstni red ni pomemben, je možnosti C(8,3), torej:

C(8,3) = $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$

Ekipo lahko sestavimo na 56 načinov.

Če se v kombinaciji kateri elementi lahko pojavljajo večkrat, potem spet govorimo o kombinacijah s ponavljanjem.

Primer 2:

Kombinacije tretjega reda s ponavljanjem iz množice A = $\{1,2,3,4\}$ so:
111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444.

Splošno velja za število kombinacij r-tega razreda s ponavljanjem iz množice z n elementi naslednji obrazec:

$$(p)C(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

7.2 VERJETNOST

7.2.1 Uvod v verjetnost

Če za nek dogodek ne moremo predvideti, ali bo nastopil ali ne, pravimo, da je slučajen. Lahko nastopi ali ne.
Nemogoč dogodek je dogodek, ki se nikoli ne zgodi.
Gotov dogodek je dogodek, ki se za dani poskus vedno zgodi.

Primer: Pri metu kovanca ne moremo trditi, ali bo na zgornji strani grb ali število.
Tudi število avtomobilov, ki prehajajo skozi presek neke ulice v določenem časovnem intervalu, je slučajno.

Na žalost ne moremo točno predvideti, ali se bo neki slučajni dogodek zgodil, lahko pa merimo oziroma določimo njegovo verjetnost. Če bi dovolj velikokrat vrgli kovanec, bi ugotovili, da približno v 50 % primerih pade grb. Podobno tudi, če bi merili število avtomobilov v 15-minutnem intervalu dovolj velikokrat, bi ugotovili, na primer, da se 10 avtomobilov pojavlja v neki ulici v približno 30 %. Torej, v približno 30 % primerih lahko pričakujemo, da bo v 15-minutnem intervalu skozi ulico peljalo 10 avtomobilov.
Tako merimo verjetnost, da se zgodi neki dogodek. Naj nam bo to motivacija za vpeljavo teorije verjetnosti.

Klasična teorija verjetnosti

Klasična definicija verjetnosti: verjetnost nekega dogodka je enaka razmerju med številom ugodnih izidov in številom vseh izidov.
Označimo s P(D) verjetnost dogodka D, m naj bo število ugodnih izidov in n število vseh izidov. Torej:

$$P(D) = \frac{m}{n}$$

Primer: Mečimo idealno kocko, potem je možnost, da pade število 3 enaka $\frac{1}{6}$. Število ugodnih izidov je 1, število vseh možnih izidov pa je 6. Po zgornji definiciji je P(3) = $\frac{1}{6}$.

Klasična definicija verjetnosti zajema samo primere, v katerih obstaja končno število izidov v eksperimentu in vsi izidi morajo biti enakovredni.

Kadar vsi izidi nimajo enakih možnosti, da se zgodijo, in kadar je število poskusov neskončno, moramo uporabiti drugačno verjetnost.

Statistična definicija verjetnosti

Statistična verjetnost temelji na bazi eksperimenta. Poskus ponovimo n-krat pod enakimi pogoji. Nek dogodek A se je izvršil k-krat. Število k imenujemo **frekvenca dogodka** A (glede na dani poskus), kvocient $\frac{k}{n}$ pa **relativna frekvenca** .

Definicija: **Verjetnost dogodka je število, pri katerem se običajno ustali relativna frekvenca dogodka pri velikem številu poskusov**.
Do relativne frekvence lahko vedno pridemo z merjenjem ali opazovanjem.

➔Primer 1:

Naslednja tabela nam prikazuje pogostnost okvar na določenih tipih avtomobilov.

Število opazovanih avtomobilov	**10**	**1000**	**2000**	**5000**	**10000**
Število okvar	0	5	12	21	50
Relativna frekvenca	0	0,005	0,006	0,0048	0,005

Relativna frekvenca se ustali nekje okoli 0,5 % in lahko rečemo, da je možnost za okvaro te vrste avtomobila 0,5 %.

Aksiomatična teorija verjetnosti

Sodobna teorija verjetnosti je zgrajena na aksiomatski podlagi. Aksiomi so osnovni zakoni (temeljne resnice), na katerih gradimo vse nadaljnje trditve. Dogodke predstavljamo kot množice. Na kratko poglejmo nekaj o takšnem pristopu k verjetnosti.
Naj bo S množica vseh možnih izidov eksperimenta. Množico S imenujemo prostor dogodkov (algebra dogodkov) in naj bo končna množica. Množice z enim elementom $\{e\}$ iz algebre dogodkov S imenujemo elementarni dogodki.

Prazna množica je **nemogoč dogodek** – dogodek, ki se nikoli ne zgodi, in množica S je **gotov dogodek** – dogodek, ki se za dani poskus vedno zgodi. Podmnožica A algebre dogodkov S se imenuje dogodek.

Z operacijami med množicami iz algebre dogodkov dobimo nove dogodke:
AUB je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi dogodek A ali dogodek B (ali oba istočasno).
$A \cap B$ je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi dogodek A in dogodek B.
$\overline{A}$ je dogodek, ki se zgodi, če se ne zgodi dogodek A, in ga imenujemo **nasprotni dogodek dogodku A.**
A/B je dogodek, ki se zgodi, če se zgodi dogodek A in ne nastopi dogodek B.
Dogodka A in B sta nezdružljiva, če je $A \cap B = \phi$, torej, če se ne moreta zgoditi oba hkrati.
Dogodek $A \subseteq S$ se je zgodil, če se je zgodil elementaren dogodek (izid eksperiment), ki pripada podmnožici A.
➔Primer 2:

Naj bo naš eksperiment met igralne kocke. Naj bo S = $\{1,2,3,4,5,6\}$ množica izidov tega eksperimenta. Naj bodo dogodki :

A = $\{2,4,6\}$ - možnost parnega števila
B = $\{1,3,5\}$ - možnost neparnega števila
C = $\{2,3,5\}$
Potem so dogodki:
AUC = $\{2,3,4,5,6\}$
$C \cap B = \{3,5\}$
$\overline{C} = \{1,4,6\}$
$A \cap B = \phi$
S je gotov dogodek, ker se bo zagotovo zgodil eden izmed izidov v eksperimentu.: 1 ali 2 ali 3 ali 4 ali 5 ali 6.

Po klasični definiciji verjetnosti je P(B) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Do sedaj smo predpostavljali, da je S končna množica. Vsaka podmnožica množice S je dogodek, če je množica S končna. Če je množica S končna, se imenuje diskreten prostor dogodkov, v nasprotnem primeru pa kontinuirani prostor dogodkov.

➲Primer 3:

Če v prometno križišče dnevno prispe 500 vozil, od teh pa jih 50 prispe iz točno določene smeri, je verjetnost, da bo vozilo prispelo v križišče iz te smeri, 10 %.

➲Primer 4:

Na semaforjih se prižge rdeča luč vsako četrto minuto in traja eno minuto, nato se prižge zelena luč in tako naprej. Vsako polno uro se prižge rdeča luč. Če prispemo pred semafor enkrat med 7.55 in 8.05, kolikšna je verjetnost, da bo gorela rdeča luč?
Opravka imamo s kontinuiranem prostorom dogodkov.

Dogodek A je, da gori rdeča luč. Rdeča luč gori ob 8.00, nato še ob 8.04 in ob 7.56. Skupaj torej 3 minute.
S je celotni časovni interval, torej 10 minut.
Verjetnost dogodka A je razmerje med časom, ko je prižgana rdeča luč, in celotnim časovnim intervalom.
$P(A) = \frac{3}{10}$

Naj bo sedaj S prostor dogodkov in $\mathcal{A}$ družina dogodkov na S. Sedaj lahko definiramo verjetnost kot funkcijo iz množice $\mathcal{A}$ v množico realnih števil.
Za to funkcijo veljajo naslednje lastnosti:
1. Za vsak dogodek A iz S velja, da je verjetnost dogodka med nič in ena
$0 \leq P(A) \leq 1$.
1. Verjetnost gotovega dogodka je 1: P(S) = 1.
2. Verjetnost nemogočega dogodka je nič: P(N) = 0.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, če velja, da je $A \cap B = \phi$.

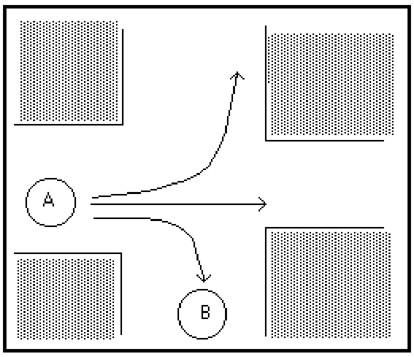
Na osnovi teh lastnosti (aksiomov) pokažimo nekaj pomembnih lastnosti.

1. Za neki $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Dokaz:
Naj bo ($\overline{A}$) komplement dogodka A. Množico S se da zapisati kot
S = A$\cup$ $\overline{A}$, pri čemer vemo, da sta A $\cap$ $\overline{A}$ = ϕ. Zato lahko zapišemo
1= P(S) = P(A$\cup$ $\overline{A}$) = P(A) + P($\overline{A}$).
Torej: P($\overline{A}$) = 1 – P(A).
2. Če je dogodek A $\subseteq$ B (pomeni, da če se zgodi dogodek A, se zgodi tudi dogodek B), potem je P(A) $\leq$ P(B).
Dokaz:
Vemo, da lahko B zapišemo: B = A$\cup$(B/A). Po tretji lastnosti je P(B) = P(A) + P(B/A), ker vemo, da je P(B/A) $\geq$ 0, dobimo:
P(A) $\leq$ P(B).
3. Za dogodka A in B velja: P(A/B) = P(A) – P(A$\cap$B)
Dokaz: Množico A lahko zapišemo kot:
A = (A/B) $\cup$(A$\cap$B) in zopet po tretji lastnosti velja:
P(A) = P(A/B) + P(A$\cap$B) in iz tega
P(A/B) = P(A) – P(A$\cap$B).
4. Za dva dogodka A in B, ki nista nujno nezdružljiva, vedno velja:
P(A$\cup$B) = P(A) + P(B) - P(A$\cap$B).
Dokaz: Glede na izrek 3 lahko zapišemo:
P(A$\cup$B) = P(A/B) + P(B) = P(A) – P(A$\cap$B) + P(B)
Oziroma: P(A$\cup$B) = P(A) + P(B) – P(A$\cap$B).
POSLEDICA:
Za dogodke A; B in C velja:
P(A$\cup$B$\cup$C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(A$\cap$B) – P(A$\cap$C) – P(B$\cap$B) + P(A$\cap$B$\cap$C).

➔Primer 5:
Mečimo kovanec. Naj bo dogodek A, če se pojavi ribica. Verjetnost tega dogodka je 0,5. Nasprotni dogodek je, če pade številka. Po prvi lastnosti vemo:
P(Š) = P($\overline{R}$) = 1 – 0,5 = 0,5.

➔Primer 6:
Križišče ima obliko, kot je na sliki.



Slika 60: Prikaz križišča
Vir: Lasten

Verjetnost, da vozilo zavije v ulico B, je 0,2. Verjetnost, da se odpelje naravnost, je enaka verjetnosti nasprotnega dogodka. Torej, P = 1 – 0,2 = 0,8.

➔Primer 7:

Mečemo igralno kocko. Dogodek A nastopi, če se pojavita številki 2 ali 3. Dogodek B nastopi, če padeta številki 3 ali 4. Verjetnost za vsako izmed števil je $\frac{1}{6}$. Po četrtem izreku velja:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) - \frac{1}{6}$

Torej, dogodek $(A \cup B)$ nastopi, ko padejo števila 2 ali 3 ali 4, in njegova verjetnost je 0,5.

Primer 8:

V škatli imamo 10 kroglic, od katerih so 4 zelene in 6 rdečih. Kolikšna je verjetnost, da bomo izvlekli zeleno kroglico.
$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Verjetnost dogodka A je:

$P(A) = \frac{4}{10}$.

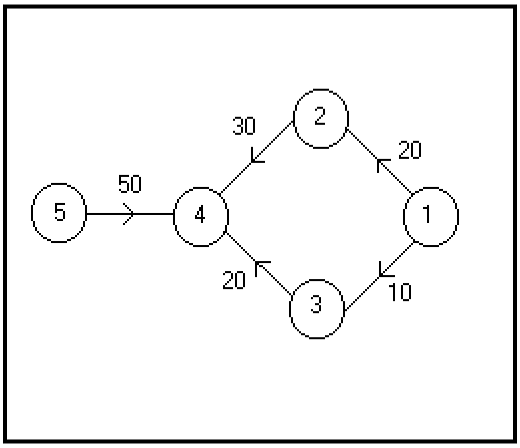
7.2.2 Pogojna verjetnost

Naj bosta A in B dogodka iz algebre dogodkov S. Če dogodek A se lahko zgodi samo, če se zgodi dogodek B. Potem verjetnost dogodka A imenujemo pogojna verjetnost in jo označimo s P(A/B).

Po definiciji je :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \; P(B) > 0$$

Primer:
Poglejmo skico prometne mreže.



Slika 61: Prometna mreža
Vir: Lasten

Iz skice razberemo, da v križišče 4 v urnem intervalu prispe 100 vozil. Vprašajmo se, kakšna je verjetnost, da je vozilo, ki je prispelo v križišče 4, imelo izhodišče v križišču 1, če vemo, da je v križišče prispelo iz zgornjega dela mreže.
V križišču 2 ima izhodišče 10 vozil. Dobimo:

P(1/Zg) = $\dfrac{P(1 \cap Zg)}{P(Zg)} = \dfrac{\frac{20}{100}}{\frac{30}{100}} = \dfrac{0{,}20}{0{,}30} \doteq 0{,}67$

7.2.3 Slučajne spremenljivke

Izide v večini primerih, ki smo jih do sedaj naštevali, lahko predstavimo v numerični obliki.

Pri metu kovancu lahko obema možnima izidoma, ki sicer nista števili, pripišemo, recimo vrenosti 1, če pade številka, in 2, če pade slika.

V tem primeru imamo opravka s spremenljivko, ki v vsaki ponovitvi poskusa sicer zavzame neko vrednost, vendar pred izvedbo poskusa **ne moremo reči, katero vrednost bo spremenljivka zavzela.** Takim spremenljivkami pravimo **slučajne spremenljivke**.
Množici vrednosti, ki jih lahko spremenljivka zavzame, pravimo ZALOGA VREDNOSTI.
Poleg te moramo za vsako spremenljivko poznati tudi PORAZDELITVENI ZAKON, ki nam pove, kakšne so verjetnosti, da slučajna spremenljivka zavzame posamezno vrednost iz svoje zaloge vrednosti.
Slučajne spremenljivke bomo označevali z velikimi črkami, vrednosti, ki jih spremenljivke dosežejo, pa z enako malo črko.
Slučajna spremenljivka: X; vrednost, ki jo lahko doseže, pa označimo z x_1 do x_n. Dogodek, da spremenljivka X doseže vrednost x_k, pa s X= x_k.

Vidimo, da je slučajna spremenljivka realna funkcija definirana na množici elementarnih dogodkov.
Funkcija f definirana na X, tako da je:
$p(x_k) = P(X = x_k)$,
se imenuje funkcija verjetnosti.

Vrednost verjetnostne funkcije v točki x nam pove verjetnost, da slučajna spremenljivka zavzame prav vrednost x.

Enoten prikaz zaloge vrednosti in porazdelitvenega zakona za slučajno spremenljivko s končno zalogo vrednosti omogoča **verjetnostna shema**. To je tabela, ki ima v prvi vrstici naštete vse elemente x_k, pod njimi pa zapisane vse pripadajoče verjetnosti. Ker tvorijo dogodki popoln sistem dogodkov, mora biti vsota števil v drugi vrstici enaka 1.

Napravimo verjetnostno shemo za poskus meta idealne kocke. Opravka imamo s 6 enako verjetnih izidov.

X:

Tabela 19: Verjetnostna shema

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Vir: Lasten

Če slučajni spremenljivki X, tako kot v zgornjem primeru, ustreza simetričen popoln sistem dogodkov z močjo n, zaradi česar so vse verjetnosti $P(X = x_k)$ enake $\frac{1}{n}$, gre za enakomerno diskretno porazdelitev.

7.2.4 Matematično upanje

Recimo, da preučujemo slučajno spremenljivko X, ki ima zalogo vrednosti $\{x_k, k = 1,2,...,n\}$ in porazdelitveni zakon, opisan z verjetnostno funkcijo $p(x_k) = P(X = x_k)$. Ponovimo N-krat poskus, pri katerem nastopa ta slučajna spremenljivka. Dobimo N realizacij slučajne spremenljivke X. Pri tem ugotavljamo, kolikokrat zavzame X vsako od možnih vrednosti x_k.
Tako dobimo neko frekvenčno porazdelitev.
Naj bodo $f_1, f_2, \ldots, f_n$ frekvence posameznih vrednosti. Izračunajmo povprečno vrednost vseh realizacij.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} f_k x_k \qquad (1)$$

Namesto te formule lahko, če postavimo konstanto $\frac{1}{N}$ za znak za seštevanje, zapišemo:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{N} x_k$$

Vrednosti x_k so sedaj pomnožene s svojimi relativnimi frekvencami : $f_k^{'} = \frac{f_k}{N}$.
Če število vseh realizacij N narašča prek vsake meje, se relativne frekvence običajno ustalijo pri verjetnostih $p_k = P(X = x_k)$, zato se pri velikem številu poskusov povprečna vrednost realizacij slučajne spremenljivke X običajno ustali pri številu:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \qquad (2)$$

Število E(X) je definirano z zgornjim obrazcem in ga imenujemo **matematično upanje** (matematično pričakovanje) ali povprečna vrednost slučajne spremenljivke X.

Izraz matematično upanje izvira iz iger na srečo. Če je v loteriji n različnih dobitkov s frekvencami $f_1, f_2, \ldots, f_n$, je povprečni dobitek na eno srečko dan z obrazcem (1); na toliko lahko v povprečju upamo pri nakupu ene srečke.

➔Primer 1:

Opazujemo število letno prevoženih kilometrov osebnih avtomobilov.
To je slučajna količina, katere vrednosti se spreminjajo od avtomobila do avtomobila. Omejimo se na avtomobile v nekem mestu. Potem lahko na vzorcu 1000 avtomobilov izračunamo povprečje prevoženih kilometrov.
Označimo to povprečje s $\bar{x}$. Vzemimo, da je $\bar{x}$ = 17500 km. Na osnovi tega se ponavadi reče, da je letno povprečje prevoženih kilometrov približno18000 km.
Teh 17500 km smo dobili tako, da smo izračunali povprečje prevoženih kilometrov samo za 1000 opazovanih avtomobilov. Pravo povprečje bi dobili, če bi upoštevali vse avtomobile v mestu.
Tako dobljeno povprečje predstavlja matematično upanje E(X) števila prevoženih kilometrov kot slučajne spremenljivke.
$\bar{x}$ je tem bližje E(X), čim večje je število avtomobilov v vzorcu. Seveda mora biti vzorec avtomobilov izbran slučajno.

$$\bar{x} = \frac{1}{1000}(10000 \cdot 2 + 11000 \cdot 3 + ...25000 \cdot 1) = 17506 \doteq 17500$$

Aritmetična sredina vzorca je:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{N} x_k$$

Tabela 20: Absolutne in relativne frekvence

Št. prevoženih km v tisočih x_k	Absolutna frekvenca f_k	Relativna frekvenca $\frac{f_k}{n}$
10	2	0,002
11	3	0,003
12	5	0,005
13	15	0,015
14	27	0,027
15	72	0,072
16	161	0,161
17	215	0,215
18	210	0,210
19	155	0,155
20	84	0,084
21	31	0.031
22	11	0,011
23	6	0.006
24	2	0,002
25	1	0,001
	N=1000	1,000

Vir: Lasten

Torej, če gre

$$\frac{k_k}{n} \rightarrow f(x_k) \quad za \quad n \rightarrow \infty,$$

se $\bar{x}$ približuje k:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

➔Primer 2:

Vrzimo dve kocki istočasno. Slučajni pari številk (a, b), ki se lahko pojavijo, so variacije drugega razreda s ponavljanjem števil 1, 2, 3, 4, 5, 6.

S = $\{(11),(12),...(66)\}$

Naj bo X(a, b) = max(a, b). Torej, X je izid eksperimenta tako, da pokaže večje izmed števil, ki padeta na kockah. X je slučajna spremenljivka z množico vrednosti X(S).

$X(S) = \{1,2,3,4,5,6\}$

Verjetnostna funkcija ima naslednje vrednosti:

$$p(1) = P(X = 1) = P\left(\{(1,1)\}\right) = \frac{1}{36}$$

$$p(2) = P(X = 2) = P\left(\{(2,1),(2,2),(1.2)\}\right) = \frac{3}{36}$$

$$p(3) = P(X = 3) = P\left(\{(1,3),(3,1),(3,2).(3,3),(2,3)\}\right) = \frac{5}{36}$$

$$p(4) = P(X = 4) = P\left(\{(1,4),(4,1),(4,2),(4,3)(4,4),(2,4),(3,4)\}\right) = \frac{7}{36}$$

In analogno:

$$p(5) = P(X = 5) = \frac{9}{36}$$

$$p(6) = P(X = 6) = \frac{11}{36}$$

Na primer: p(3) je verjetnost, da ima slučajna količina vrednost 3.

Zapišimo verjetnostno shemo za dobljeno slučajnostno funkcijo.

Tabela 21: Verjetnostna shema

x_k	1	2	3	4	5	6
$p(x_k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Vir: Lasten

Za matematično upanje slučajne spremenljivke X dobimo:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} x_k p(x_k) = 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + 3\cdot\frac{5}{36} + 4\cdot\frac{7}{36} + 5\cdot\frac{9}{36} + 6\cdot\frac{11}{36} \doteq 4{,}47$$

Matematično upanje slučajne spremenljivke ima podobno slabost kot aritmetična sredina, ki jo poznamo iz statistike. Število E(X) sicer zagotovo leži med največjo in najmanjšo možno vrednostjo slučajne spremenljivke X, vendar so te vrednosti lahko precej razpršene okrog njega in je zato informacija, ki jo daje E(X) o slučajni spremenljivki X, v splošnem precej skopa.

7.2.5 Varianca in standardna deviacija diskretne slučajne spremenljivke

Kvaliteto informacije, ki jo daje matematično upanje, bomo ocenili tako, da bomo povedali, kako so posamezne vrednosti te slučajne spremenljivke razpršene okrog njenega matematičnega upanja.
Razpršenost merimo z VARIANCO ali DISPERZIJO D(X) slučajne spremenljivke.

Varianca diskretne slučajne spremenljivke X je definirana:

$$D(X) = \sum_k \left(p_k (x_k - E(X))^2\right)$$

Pozitivna vrednost korena $\sqrt{D(X)}$ se imenuje STANDARDNA DEVIACIJA σ_x slučajne spremenljivke X.

Standardna deviacija nam pove, kakšno je povprečno odstopanje (razpršenost) vrednosti slučajne spremenljivke od vrednosti matematičnega upanja.

Operativna formula za izračunavanje variance je:
D(X) = $\sum x_k{}^2 p(x_k) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$; kjer je $E(x^2) = \sum x_k^2 p(x_k)$

➔<u>Primer:</u>

Verjetnostna funkcija je podana z verjetnostno shemo:

Tabela 22: Verjetnostna shema

x_k	1	2	3	4	5	6
$p(x_k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Vir: Lasten

Izračunali smo že, da je E(X) $\doteq$ 4,47.

Izračunajmo še varianco in standardno deviacijo.

Najprej izračunajmo:
E(X^2) = $\sum x_k{}^2 p(x_k) = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36} \doteq 21{,}97$
Torej je varianca:

D(X) = E(X^2) - $[E(X)]^2$ = 21,97 – 19,98 $\doteq$ 1,99

In iz tega standardna deviacija:

$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}99} \doteq 1{,}41$.

7.2.6 Dvodimenzionalna diskretna slučajna spremenljivka

Če se izidi eksperimenta opisujejo s parom realnih števil, imamo opravka z dvodimenzionalnimi slučajnimi spremenljivkami ali slučajnimi vektorji. Vsi pojmi, ki smo jih vpeljali za enodimenzionalno slučajno spremenljivko, se morajo sedaj razširiti na dvodimenzionalno slučajno spremenljivko.

Naj bosta sedaj X in Y dve diskretni slučajni spremenljivki z naslednjimi množicami vrednosti:
X(S) = $\{x_1, x_2, ... x_n\}$
Y(S) = $\{y_1, y_2, ... y_m\}$

Kartezični produkt teh dveh množic je:

X(S)xY(S) = $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_m)\}$

Verjetnost para (x_i, y_j) je podana s funkcijo:

$$P(X = x_i, Y(y_j) = h(x_i, y_j)$$

To je verjetnostna funkcija dvodimenzionalne slučajne količine (X, Y).
Pove nam verjetnosti za pare vrednosti slučajnih količin X in Y.

Funkciji

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j) \text{ in}$$

$$g(x_j) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i, y_j)$$

se imenujeta MARGINALNI funkciji verjetnosti.

Marginalna funkcija verjetnosti f(x) nam pove, kolikšna je verjetnost, da slučajna količina X zavzame vrednost x, ne glede na to, kakšno vrednost bo zavzela slučajna spremenljivka Y.

Funkcija h(x_i, y_j) zadostuje naslednjim pogojem:

1. h(x_i, y_j) $\geq$ 0 za vsak par (x_i, y_j)
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j) = 1$

Če so E(X) in E(Y) matematični upanji spremenljivk X in Y, potem izraz:

$$C(X,Y)=\sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_j - E(Y))h(x_i, y_j) =$$

$$= E[(X - E(X)(Y - E(Y))] = \sum_i \sum_j x_i y_j h(x_i, y_j) - E(X) \cdot E(Y)$$

imenujemo KOVARIANCA.

Primer:

Vzemimo dve pošteni kocki in opazujmo verjetnosti uresničitve maksimalnega števila v paru (a, b) in vsote števil a in b.
X(a, b) = max(a, b)

Y(a, b) = a + b

Funkcijo verjetnosti dvodimenzionalne slučajne spremenljivke (X, Y) bomo prikazali s tabelo.

Tabela 23: Funkcija verjetnosti dvodimenzionalne slučajne spremenljivke

X Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum_j$

1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
3	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{7}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
$\sum_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

Vir: Lasten

Vrednost funkcije h(x_i, y_j) v točki (5, 6) je:

$$H(5,6) = P(X = 5, Y = 6) = P\left(\{(1,5),(5,1)\}\right) = \frac{2}{36}$$

Podatke za izračun vrednosti kovariance dobimo neposredno iz tabele.

$$C(X,Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j h(x_i, y_j) - E(X) \cdot E(Y) =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{36} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36} + \ldots + 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{36} - 4{,}47 \cdot 7 \doteq 2{,}9$$

Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, če velja:
P(X = x_i ,Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) za vse x_i in y_j .

Povzetek:
V tem poglavju ste se naučili: izračunati število premutacij, variacij in kombinacij, izračunati verjetnost nekega dogodka in poznate pojma slučajna spremenljivka in matematično upanje.

Še nekaj nalog za utrjevanje:

1. Izračunajte število kombinacij pri igranju igre na srečo LOTO.
2. Izračunajte: $\binom{18}{12}$.
3. V posodi so tri bele, dve črni in pet rdečih kroglic. Naenkrat vzamemo iz posode tri kroglice. Kolikšna je verjetnost, da je vsaj ena rdeča?
4. V posodi so tri bele, dve črni in pet rdečih kroglic. Zaporedoma vzamemo iz posode tri kroglice; kroglic ne vračamo v posodo. Kolikšna je verjetnost, da so vse tri rdeče?

8 LITERATURA

Pavlič, G., et al. *Od piramid do kaosa*: Matematika za 2. letnik tehniških in drugih strokovnih šol. Ljubljana: Modrijan, 2001.

Pavlič, G., et al. *Planum*: Matematika za 2. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan, 2004.

Rugelj, M., et al. *Od logaritmov do vesolja*: Matematika za 3. letnik tehniških in drugih strokovnih šol. Ljubljana: Modrijan, 2001.

Rugelj, M., et al. S*patium*: Matematika za 3. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan, 2004.

Statistični urad Republike Slovenije. Dostopno na naslovu: http://www.stat.si.

Statistični urad Republike Slovenije. *Statistični letopis 2000* (online). Dostopno na naslovu: http://www.stat.si.

Statistični urad Republike Slovenije. *Statistični letopis 2008* (online). Dostopno na naslovu: http://www.stat.si.

Šadl, M. *Statistika za komercialiste*. Murska Sobota: Ekonomska šola, Višja strokovna šola, 2001.

Šparovec, J., et al. *Od ključavnice do integrala*: Matematika za 4. letnik tehniških in drugih strokovnih šol. Ljubljana: Modrijan, 2001.

Šparovec, J., et al. *Tempus*: Matematika za 4. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan, 2004.

Vidav, I. *Višja matematika I*. Ljubljana: DZS, 1994.

Vidav, I., in Grasselli, J. *Višja matematika II*. Ljubljana: DZS, 1979.

Projekt **Impletum**
Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju 2008–11

Konzorcijski partnerji:

Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007–2013, razvojne prioritete Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja in prednostne usmeritve Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.