REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

UPORABNA MATEMATIKA V LOGISTIKI

BORUT JAMNIK
MARIJA STANIČ

Višješolski strokovni program: Logistično inženirstvo
Učbenik: Uporabna matematika v logistiki
Gradivo za 1. letnik

Avtorja:
Borut Jamnik
Marija Stanič
Inter-es d.o.o.
Višja strokovna šola

Strokovna recenzentka:
Andreja Jelen Mernik

Lektorica:
Jerca Pavlič

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51-7(075.8)(0.034.2)

JAMNIK, Borut
Uporabna matematika v logistiki [Elektronski vir] : gradivo za 1. letnik / Borut Jamnik, Marija Stanič. - El. knjiga. - Ljubljana : Zavod IRC, 2009. - (Višješolski strokovni program Logistično inženirstvo / Zavod IRC)

Način dostopa (URL): http://www.zavod-irc.si/docs/Skriti_dokumenti/Uporabna_matematika_v_logistiki-Jamnik_Stanic_NU.pdf. - Projekt Impletum

ISBN 978-961-6824-29-3
1. Stanič, Marija
251004416

Izdajatelj: Konzorcij višjih strokovnih šol za izvedbo projekta IMPLETUM
Založnik: Zavod IRC, Ljubljana.
Ljubljana, 2009

Strokovni svet RS za poklicno in strokovno izobraževanje je na svoji 124. seji dne 9. 7. 2010 na podlagi 26. člena Zakona o organizaciji in financiranju vzgoje in izobraževanja (Ur. l. RS, št. 16/07-ZOFVI-UPB5, 36/08 in 58/09) sprejel sklep št. 01301-4/2010 / 11-2 o potrditvi tega učbenika za uporabo v višješolskem izobraževanju.

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Impletum 'Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju 2008–11'.
Projekt oz. operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007–2013, razvojne prioritete 'Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja' in prednostne usmeritve 'Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja'.

KAZALO

PREDGOVOR

Logistika kot znanstvena disciplina je začela pridobivati na pomenu šele v drugi polovici prejšnjega stoletja. Splošno logistično znanost predstavljajo interdisciplinarna znanja, ki obsegajo načrtovanje, vodenje in nadziranje tokov blaga, ljudi in informacij od mesta prejema do mesta predaje na način, da se ob minimalnih vloženih sredstvih maksimalno zadovoljijo zahteve in pričakovanja trga. Znanja s področja matematike in statistike zavzemajo pomembno mesto. Katalogi znanj in učna gradiva za iste ali različne ravni formalnega izobraževanja, ki se uporabljajo v programih izobraževanja za področje logistike pa kažejo, da ni konsenza o vsebini in ravni zahtevnosti.

V tem učbeniku, ki je namenjen študentom višješolskega študijskega programa LOGISTIČNO INŽENIRSTVO za predmet UPORABNA MATEMATIKA V LOGISTIKI, so obdelane le tiste teme, ki naj bi omogočile pridobitev kompetenc za kvantitativno analizo in optimalno načrtovanje logističnih procesov na podjetniškem nivoju. Izbor vsebin je pretežno usklajen s katalogom znanj, vendar so vsebine obdelane predvsem na aplikativni ravni, saj praksa kaže, da so tudi tisti, ki sicer imajo primerno teoretično matematično znanje, v zadregi, ko morajo reševati praktične probleme. Za izvedbo zapletenih matematičnih algoritmov ali statističnih obdelav, za katere se v praksi uporabljajo računalniška orodja, se v učbeniku priporoča uporaba le teh, ne da bi se bilo treba študentu poglabljati v izvedbo algoritmov ali postopkov brez uporabe računalnika.

Učbenik je razdeljen na šest poglavij. Prvi dve poglavji sta namenjeni osvežitvi temeljnih matematičnih znanj, kot so:

- računske operacije z realnimi števili,
- računske operacije z algebrskimi izrazi,
- reševanje linearnih enačb in neenačb,
- proučevanju elementarnih funkcij,
- računanju odvodov nekaterih elementarnih funkcij

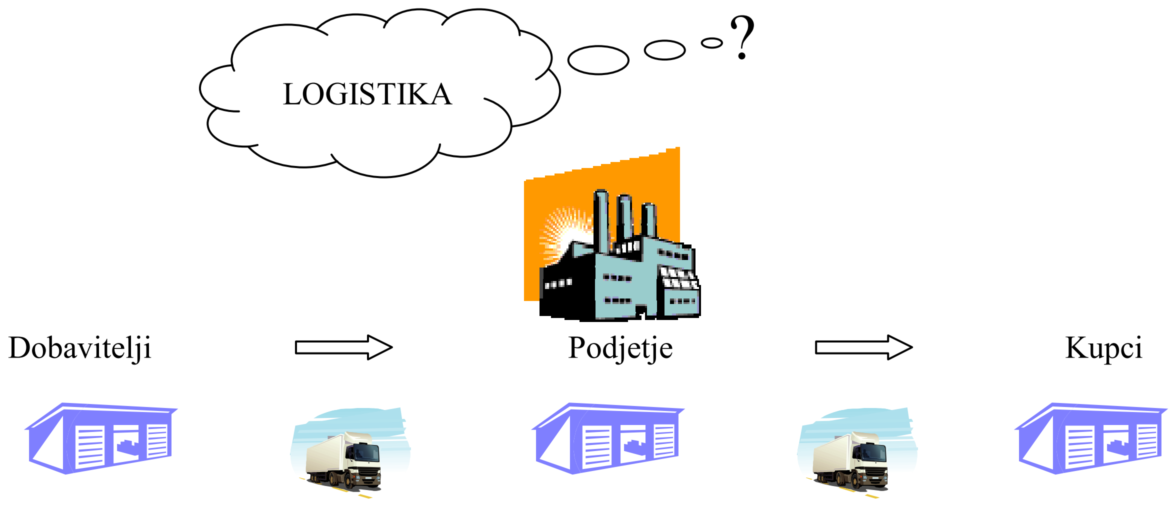
in uporabi teh znanj pri reševanju problemov s področja logistike.

V tretjem poglavju so podane le osnove integriranja, v četrtem pa Gaussova metoda eliminacije kot ena izmed metod za reševanje sistemov linearnih enačb z več neznankami. V petem poglavju sta obdelani metodi za iskanje optimalnih rešitev linearnih problemov z več spremenljivkami na področju transporta.

Šesto poglavje obsega temelja znanja s področja opisne statistike, ki so potrebna srednjemu menedžmentu pri pripravi manj zahtevni statističnih poročil.

Avtorja

UVOD



Pojasnite funkcijo logistike

____

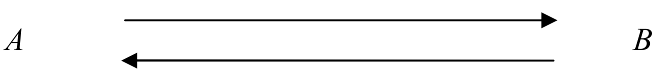
____

____

Menite, da lahko pri organiziranju logističnih aktivnosti pride do reševanja problemov, pri katerih so potrebna znanja iz matematike, ki ste si jih pridobili v osnovni in srednji šoli? Če dvomite, si oglejte naslednje primere.

Primer izračuna potrebnega števila tovornjakov:

Prevoznik je prejel naročilo za dnevni prevoz 600 ton materiala z mesta A v 15 km oddaljen kraj B. V avtoparku razpolaga s tovornjaki z nosilnostjo 20 ton. Zaradi lastnosti tovora je izkoristek nosilnosti 80%.



Koliko tovornjakov potrebuje, če

- *ima 8 – urni delovnik in ocenjuje, da potrebuje za natovarjanje, raztovarjanje , odmore in druge nepredvidene dogodke 3 ure dnevno*
- *predvideva, da bo vozil s povprečno hitrostjo 60 km/uro.*

Bi pritrdili naslednji rešitvi:

Število tovornjakov je lahko le naravno število, zato potrebuje 4 tovornjake. Vsak tovornjak lahko opravi 10 voženj po 15 ton. Lahko pa se odloči, da bodo opravili manj od 40 voženj, če bodo naložili maksimalni možni tovor, to je 16 ton na vožnjo.

Primer matematičnega modela optimalne izbire vozila

Izbira med različnimi cestnimi vozili za prevoz tovora temelji na prevoznih potrebah glede količine tovora in prevozne razdalje.
Podjetje bo izbralo tisto vozilo, za katero so stroški najmanjši. Običajno se stroški za namene oblikovanja cene prevozne storitve delijo v

- FIKSNE – neodvisni od prevoženih kilometrov (amortizacija,…)
- VARIABILNE – odvisni od prevoženih kilometrov (stroški goriva, vzdrževanja,…).

Kako bi rešili naslednji problem?

Prevoznik razpolaga z dvema voziloma.
- *Za vozilo A znaša mesečna amortizacija 100 €, stroški na prevoženi kilometer pa 1,2€.*
- *Za vozilo B znaša mesečna amortizacija 200 €, stroški na prevoženi kilometer pa 0,8€.*

Prevoznika zanima, katera je tista mejna vrednost prevoženih mesečnih kilometrov, ko se mu splača uporabiti vozilo A, oziroma vozilo B, da bodo skupni stroški na vozilo manjši.

Rešitev:

Skupni stroški na vozilo so odvisni od variabilnih in fiksnih stroškov, kar zapišem v obliki enačbe linearne funkcije ($y = kx + n$), kjer je **k** variabilni strošek na kilometer, **x** mesečno število prevoženih kilometrov, **n** pa mesečna amortizacija.
- Za vozilo A so skupni stroški za x km: $y_A = 1{,}2x + 100$
- Za vozilo B so skupni stroški za x km: $y_B = 0{,}8x + 200$

Mejna vrednost je tisto število mesečnih kilometrov, pri katerih so skupni stroški enaki, kar zapišem:

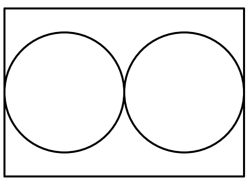
$$y_A = y_B \longrightarrow 1{,}2\,x + 100 = 0{,}8\,x + 200 \longrightarrow x = 250$$

Komentar:
Prevozniku se splača uporabljati vozilo A le, če ima na mesec manj kot 250 km voženj.

Primer izračuna obremenitve palete:

Transport in skladiščenje so pomembne aktivnosti v logistiki. Uporabljajo se embalaže različnih oblik in dimenzij (škatle, sodi,…). Iz več embalažnih enot se pripravljajo tovorne enote, kjer se uporabljajo standardizirani embalažni materiali, npr. palete. Logistik mora načrtovati skladiščne površine, opremo skladišč, naročati embalažni material, pripravljati navodila za pripravo tovornih enot,…Kako bi odgovorili na naslednje vprašanje?

Ali lahko na evropaleto (d=1200mm, š= 800 mm) naložite 2 soda s premerom 5 dm in višino 1m, ki sta napolnjena z asfaltom (specifična gostota asfalta je 2400 kg/m^3), če je dovoljena maksimalna obremenitev palete 1000 kg ? Težo praznega soda zanemarite.



Se strinjate z naslednjim odgovorom:
Na paleto lahko naložim dva soda, saj je masa dveh sodov 942 kg, torej manj od maksimalno dovoljene.

Primer izračuna deleža

Transport je najpomembnejša logistična aktivnost. Statistični urad Republike Slovenije spremlja količino prepeljanega blaga. V tabeli 1 so zbrani podatki za 3. četrtletje (julij, avgust, september) o prepeljanem blagu v notranjem prevozu in v mednarodnem prevozu. Na podlagi zbranih podatkov lahko izračunate posamezne deleže.

Tabela 1: Cestni blagovni prevoz, Slovenija, 3. četrtletje 2008

	Prepeljano blago
	1000 t
SKUPAJ	22.678
Notranji prevoz	18.223
Mednarodni prevoz: blago, naloženo v Sloveniji	1.455
Mednarodni prevoz: blago, razloženo v Sloveniji	1.727
Mednarodni prevoz: prevoz po tujini in kabotaža	1.273

Vir: www.stat.si

Se strinjate, da je bil delež notranjega prevoza blaga 80% celotnega prevoza blaga, ki so ga opravili slovenski prevozniki?

POVZETEK

To je bilo le nekaj primerov, ki ste jih lahko rešili z znanji, ki ste si jih pridobili v osnovni šoli. Organiziranje, vodenje in nadziranje logističnih procesov, katerih optimalni potek lahko bistveno vpliva na uspešnost poslovanja podjetja, pa zahteva poznavanje matematičnih in statističnih metod ter računalniških orodij, ki so se uveljavile v logistični stroki v drugi polovici prejšnjega stoletja. Praktična uporaba le teh zahteva teoretično matematično znanje na nivoju srednjega strokovnega znanja in uporabo računalniških pripomočkov. Nekaj temeljnih znanj in spretnosti si boste pridobili, če boste aktivno predelali naslednja poglavja.

1 OSNOVE

V uvodnem delu ste rešili nekaj primerov, kjer je zadoščalo znanje osnovnih računskih operacij z realnimi števili, poznavanje linearne funkcije in linearne enačbe, nekaj geometrije, procentnega računa. Ta znanja ste si že pridobili v osnovni šoli in poglobili v srednji. Vseeno pa vam priporočamo kratko ponovitev nekaterih temeljnih vsebin, ki so v tem poglavju z namenom, da osvežite znanja.

- **o številskih množicah in računskih operacijah z realnimi števili;**
- **o računskih operacijah s potencami;**
- **o uporabi procentnega računa pri reševanju problemov iz delovnega okolja;**
- **o pravilih za računanje z algebrskimi izrazi;**
- **o linearnih enačbah in neenačbah ter kvadratnih enačbah.**

Če boste imeli težave, vam svetujem, da vzamete ponovno v roke osnovnošolske in srednješolske učbenike. Pomagate pa si lahko tudi s spletnimi stranmi. Zlasti vam priporočamo spletno stran E-um interaktivna učna gradiva (www.e-um.si) Ob koncu tega poglavja vam bomo priporočili, katere izmed učnih gradiv za »gimnazijo« so primerna za osvežitev in utrjevanje znanj iz tega poglavja.

1.1 ŠTEVILSKE MNOŽICE

Množica naravnih števil je množica 1, 2, 3, ….

Matematični zapis: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Množica celih števil

Množico celih števil sestavljajo negativna cela števila, število 0 in pozitivna cela števila.

Matematični zapis: $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Množica racionalnih števil

Množico racionalnih števil (ulomkov) sestavljajo števila, ki jih lahko zapišemo v obliki $\frac{a}{b}$, kjer **a** in **b** pripadata množici celih števil in **b** ni nič.

Matematični zapis : $Q = \left\{ \frac{a}{b} \;;\; a \in Z \;\wedge\; b \in Z \;\wedge\; b \neq 0 \right\}$

Vsako racionalno število $\frac{a}{b}$, če je $b \neq 0$, lahko zapišete kot decimalno število, tako da števec delite z imenovalcem.

a) $\frac{11}{8} = 11 : 8 = 1{,}375$
b) $2 : 3 = 0{,}66\ldots$

Vsako decimalno število lahko zapišete kot decimalni ulomek.

$1{,}375 = 1\frac{375}{1000} \quad \rightarrow \quad 1\frac{3}{8}$

Množica iracionalnih števil

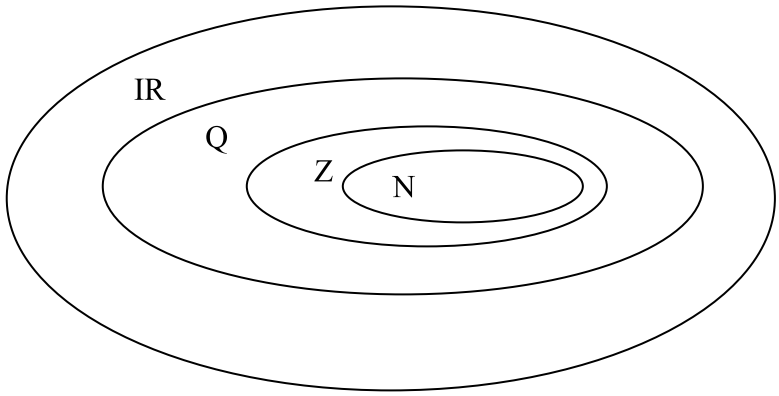
So tudi števila, ki jih ne morete uvrstiti v nobeno izmed doslej naštetih množic, npr. korena $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$. Taka števila tvorijo množico **iracionalnih** števil.

Realna števila

Vse navedene množice tvorijo množico **realnih števil,** ki se označuje z **R.**

Povezanost naštetih množic kaže slika 2:

Množico realnih števil sestavljajo naravna, cela, racionalna in iracionalna števila.



Slika 1: Realna števila

Naravna, cela, racionalna in iracionalna števila so podmnožice realnih števil.

S simboli to zapišete: $N \subset Z \subset Q \subset IR \subset R$

1.2 POTENCE

Kaj je potenca?

potenčni eksponent

$$\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n} = a^{n}$$

osnova

Računanje s potencami:

- Množenje: $a^m a^n = a^{m+n}$
- Deljenje: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

- Potenciranje : $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
- Korenjenje: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Če je m < n, zapišete količnik kot potenco z negativnim eksponentom.

Primer: $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$ *Torej :* $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

Zakaj je $a^0 = 1$? $\rightarrow$ $1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

Desetiške enote lahko zapišete kot potence števila 10!

Primeri:

$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^6 = 1\,000\,000$

Decimalne ulomke lahko zapišete kot potence števila 10 z negativnim eksponentom.

Primer: $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

Ko računate z žepnim računalom, se vam lahko prikaže takšen rezultat: $1,4^{-5}$. Kako to zapišete z decimalnim številom?

Primer:

$1,4^{-5}$ pomeni $\frac{1,4}{10^5} = \frac{1,4}{100000} = 0,000014$

Če v številskih izrazih nastopajo decimalna števila, jih lahko zapišete kot produkt celega števila in potence števila 10. S tem si lahko olajšate izračun vrednosti številskih izrazov.

Primer:

$0,03 \cdot 0,5 = 3 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-1} = 15 \cdot 10^{-3} = 0,015$

Zlasti vam to priporočamo pri reševanju problemov, pri katerih nastopajo količine, ki so izražene v različnih merskih enotah.

Primer:

1 km = 10^3 m
1 mm = 10^{-3} m
200 km = $200 \cdot 10^2 = 2 \cdot 10^4$

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. Naj bo x=4, y=5, z= -2, p=$\frac{1}{2}$, q= $-\frac{2}{3}$. Izračunajte vrednost naslednjih izrazov:
   a) $x-(y+z)=$ $[1]$
   b) $x\,(p+q)=$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$
2. Izračunajte z ulomki

$$\left(5\frac{2}{3}+0{,}75-3{,}5\cdot\frac{4}{7}\right):2\frac{3}{4} \qquad \left[1\frac{20}{33}\right]$$

3. Izračunajte z decimalnimi števili

$$1\frac{7}{20}-1{,}25\left(2\frac{1}{5}-7{,}5:3\frac{3}{4}\right)= \qquad [1{,}1]$$

4. Izračunajte tako, da najprej decimalna števila zapišete ko produkt celega števila in potence števila 10:
   a) $\frac{0{,}125.0{,}3}{2{,}5}=$ $[0{,}015]$
   b) $\frac{400.0{,}9.0{,}084}{0{,}005.3{,}6.280}=$ $[6]$
5. Zapišite, kako bi izračunali opravljeno transportno delo , če uporabite naslednje simbole:
   - za nosilnost vozila q ,
   - za dinamično izkoriščenost nosilnosti vozila ε in
   - za prevoženo razdaljo L

Logistiki opredeljujejo transportno delo S kot produkt količine tovora in razdalje L (v tkm) , dinamično izkoriščenost nosilnosti vozila pa kot razmerje med dejanskim opravljenim delom S in možnim S_{max}.

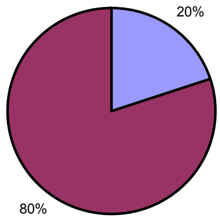
1.3 PROCENTI

Kaj je procent?

$$\frac{1}{100}=0{,}01=1\%$$

Procent ali odstotek je izraz za stoti del celote.

Na sliki 2 celoto predstavlja krog, krožna izseka pa procentna deleža, ki pripadata procentni meri 20% oziroma 80%.



Slika 2: Krožni diagram

Procentni račun ima pri reševanju problemov iz delovnega okolja pomembno vlogo. Običajno se računa procentni delež:

procentni delež = celota · procentna mera

Primer:

Banka obrestuje vloge po 3% letni obrestni meri: Kolikšne so letne obresti za depozit 3000€, če banka uporablja navadni obrestni račun?

Letne obresti = depozit · letna obrestna mera = 3000€ · 3% = 3000€ · 0,03 = 90€

Mogoče vas bodo zanimali naslednji primeri uporabe procentnega računa:

Primer izračuna neto plače

Kolikšna je vaša neto plača, če ste se z delodajalcem dogovorili za bruto 1500,00 €?

Izračun ni odvisen le od vašega matematičnega znanja, pač pa od poznavanja modela obračuna, ki ga določajo predpisi in je naslednji:

NETO plača = BRUTO plača – prispevki za socialno varnost – akontacija dohodnine

Prispevke za socialno varnost določa država s prispevno stopnjo, ki je izražena v odstotkih in se obračunava od bruto plače Sedanja stopnja je 22,10%.
Tudi model obračuna akontacije dohodnine je določen s predpisi in je naslednji:

- *Osnovo za izračun akontacije dohodnine dobite tako, da bruto plačo zmanjšate za prispevke in splošno davčno olajšavo, ki je sedaj 247,00€.*
- *Pri izračunu akontacije dohodnine upoštevajte naslednjo davčno lestvico:*

Davčni razred	Osnova za izračun akontacije dohodnine	Izračun akontacije dohodnine
1	do 567,00 €	16 % od davčne osnove
2	od 567,00 € do 1133,00 €	91,00 € + 27% od zneska, ki presega 567,00 €
3	nad 1133,00 €	244,00 € + 41% od zneska nad 1133,00 €

V skladu s predpisi oblikovan model izračuna neto plače je naslednji:

	Osnova v €	Stopnja oz. davčni razred	Znesek v €
Prispevki za socialno varnost iz plače	1500,00	22,10%	331,50
Akontacija dohodnine	921,50	91,00 € + 27% od (921,00 – 567,00) €	186,60
NETO PLAČA			981,90

Primer izračuna davka na dodano vrednost – DDV

Tudi model obračuna DDV določajo predpisi in sicer ga je potrebno po predpisani davčni stopnji obračunati od prodajne cene in je naslednji:

PRODAJNA CENA
+
DDV (delež po predpisani davčna stopnja od prodajne cene)
⇩
PRODAJNA CENA Z DDV

Primer:

Koliko davka morate odvesti državi, če ste mesečno izstavili račune za prevoz v skupnem znesku 5400,00 € z vključenim DDV? Davčna stopnja je 8,5%.

Kako boste izračunali DDV, če ste izstavili računov za 5400,00€ z vključenim DDV?

5400,00 ………….. 108,5%
DDV ………... 8,5%

$$\text{DDV} = \frac{5400{,}00 \cdot 8{,}5}{108{,}5} = 423{,}00\ €$$

POMNITE:
V strokovni praksi se za razmerje $\frac{8{,}5}{108{,}5}$ uporablja izraz PRERAČUNANA DAVČNA STOPNJA.

Primer ABC analize

V logistiki je zelo pomembno področje upravljanje (menedžment) zalog. Gre za opredeljevanje postopkov poslovanja skladišč s ciljem zmanjševanja stroškov. Zaloge predstavljajo pomemben strošek zato si podjetja prizadevajo, da so čim manjše in čas skladiščenja čim krajši.
V praksi se uporablja več matematičnih metod in računalniških orodij, ki naj logistikom olajšajo pripravo ustreznih rešitev. Ena izmed starejših metod, ki se uporablja v proizvodnem ali trgovskem podjetju, je **ABC analiza**. Gre za razvrščanje materialov po letni nabavni vrednosti v tri razrede:

- v A so materiali (polproizvodi), katerih letna nabavna vrednost predstavlja od 60% do 80% vrednosti celotnih letne porabe materiala;
- v B, katerih letna nabavna vrednost predstavlja od 15% do 30% vrednosti celotnih letne porabe materiala;
- v C ostali.

Glede na razvrstitev materialov podjetje sprejema odločitve glede nabavnih količin, terminih naročanja,…Največ pozornosti bo podjetje posvetilo materialom iz skupine A, ker je njihova nabavna vrednost največja in so lahko prihranki največji.

Primer:

Podjetje potrebuje za proizvodnjo 10 različnih materialov. Podatki o ceni in letnih potrebah so razvidni iz tabele 2. Razvrstite materiale v 3 skupine, tako da bodo v skupini A materiali, ki predstavljajo do 70% letne nabavne vrednosti vseh materialov; v skupini B materiali, ki predstavljajo do 25% letne nabavne vrednosti; v skupini C pa ostali.

Tabela 2: Letne količine nabavljenih materialov

Zap.št. mat.	Cena/kos v €	Št. kosov
1	0,25	400000
2	5,00	26000
3	4,00	27 500
4	0,20	100 000
5	8,00	1 250
6	0,60	50 000
7	150,00	200
8	0, 80	550 000
9	80,00	1 000
10	1,25	40 000

Rešitev je prikazana v tabeli 3.

Tabela 3: Razvrstitev nabavljenih materialov po ABC metodi

Št.mat.	cena/kos	Št.kosov	Vrednost	Kumulativne vsote v %	SKUPINE
8	0,80	550000	440000,00	44	A
2	5,00	26000	130000,00	57	
3	4,00	27500	110000,00	68	
1	0,25	400000	100000,00	78	
9	80,00	1000	80000,00	86	B
10	1,25	40000	50000,00	91	
6	0,60	50000	30000,00	94	
7	150,00	200	30000,00	97	C
4	0,20	100000	20000,00	99	
5	8,00	1250	10000,00	100	
SKUPAJ			1000000,00		

1.4 ALGEBRSKI IZRAZI

Algebrski izrazi so številski izrazi, ki jih povezujejo realna števila, obča (simboli za števila) in simboli za računske operacije.

Primeri:

$2x + y$;
$p = a^2$;
$a(a+b)$;
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Nekaj pravil, ki vam bodo koristila pri računanju z algebrskimi izrazi:

Kvadrat binoma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Izpostavljanje skupnega faktorja

$$a^2 + ab = a(a+b)$$

Razstavljanje

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^2 + 5a + 6 = (a+2)(a+3)$$

Algebrski ulomki

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. Izračunajte:

   a) $\frac{6a^3b^3}{-3ab^2} =$ [$-2a^2b$]

   b) $\frac{a^3b^2 - a^2b^3}{2ab} =$ [$\frac{ab(a-b)}{2}$]

   c) $12ab^2 \frac{a+3b}{3b} =$ [$4a^2b + 12ab^2$]

d) $\frac{2a-b}{ab2}-\frac{3a-1}{ab}=$ $\qquad [\frac{2a-3ab-2b}{ab^2}]$

e) $\frac{1}{x}-\frac{10}{x^3}+\frac{25}{x^5}=$ $\qquad [\frac{(x^2-5)^2}{x^5}]$

f) $\frac{3+x}{5+x}+\frac{2x}{5-x}+\frac{3x-5}{x^2-25}=$ $\qquad [\frac{4+x}{5-x}]$

g) $\frac{x}{x+3}+\frac{x+1}{3-x}-\frac{x+21}{x^2-9}=$ $\qquad [\frac{-8}{x-3}]$

h) $\frac{y^2-y-12}{y^2-4y}\cdot\frac{y^3-y^2}{y^2+7y+12}=$ $\qquad [\frac{y^2-y}{y+4}]$

1.5 ENAČBE IN NEENAČBE

Linearna enačba z eno neznanko

Splošna oblika linearne enačbe z eno neznanko: **ax + b= 0**
Rešitev ali koren enačbe: $x=-\frac{b}{a}$
Rešitev je realno število, če je a različen od nič. To zapišete: $x \in R$, če je $a \neq 0$

Enačbo lahko sestavljajo algebrski izrazi, ki jih morate poenostaviti, da pridete do rešitve. Pri tem upoštevajte naslednja pravila:

- enačbo množite ali delite z istim od 0 različnim številom;
- pri prenosu člena z ene na drugo stran enačbe spremenite predznak.

Primer:

$\frac{x}{2}+1=4$ *1. korak: Enačbo pomnožite z 2*

$\frac{x}{2}\cdot 2+1\cdot 2=4\cdot 2$

$x+2=8$ *2. korak: 2 prenesete na desno stran*

$x=8-2$

$x=6$

Ali je 6 res koren enačbe?

Preizkus: $\frac{6}{2}+1 = 4$

$3+1 = 4$

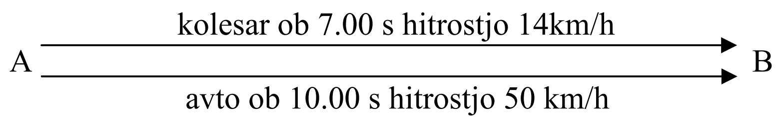
$4 = 4$

Reševanje problemov iz vsakdanjega življenja in na delovnem mestu pogosto pripelje do reševanja linearnih enačb. Problem je najprej potrebno prevesti v matematični jezik – zapisati enačbo.

Primer:

Iz mesta A ob 7. uri odpelje kolesar s hitrostjo 14km/h, ob 10. uri pa avto s hitrostjo 50km/h. Kdaj bo avto dohitel kolesarja?

Lahko problem skicirate:



Kaj morate izračunati ali kaj je neznanka? Lahko se odločite za čas vožnje kolesarja ali avta, ki se razlikujta za 3 ure.

*Čas vožnje kolesarja **t**; potem je čas vožnje avta **t-3**.*

Oba prevozita enako dolgo pot, zato velja naslednja enačba:

$$\text{Hitrost kolesarja} \cdot \text{čas kolesarja} = \text{Hitrost avta} \cdot \text{čas avta}$$
$$14t = 50(t-3)$$
$$t = 4,16$$

V minutah: $0,16$ *ure* $= 0,16 \cdot 60$ *minut* $= 9,6$ *minut* ≈ 10 *minut*

Se strinjate z naslednjim odgovorom?
Srečala se bosta ob 11.10.

Obrazce, ki jih uporabljate pri računanju ploščin ravninskih likov, površin in prostornih ter razni drugi obrazci, ki jih uporabljate na strokovnem področju, so enačbe, ki izražajo odnose med več količinami. Če v obrazcu nastopa le ena neznana količina, so to enačbe z eno neznanko. Neznano količino izračunate tako, da enačbo transformirate v tako obliko, da je neznanka izražena z znanimi količinami.

Primer iz geometrije:

Diagonala kvadrata 10: Izračunajte stranico!

$a\sqrt{2} = \mathrm{d} \;/ : \sqrt{2}$

$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. $\frac{3x}{4}+\frac{2x}{4}=\frac{7x}{6}+6$ [x= 72]

2. $\frac{1}{x}-5=0$ [$x=\frac{1}{5}$]

3. $x(1-\frac{1}{x})=3$ [x = 4]

4. Iz naslednjih obrazcev izrazite zahtevano količino:

a) $V = 2\pi r(r+v)$, v =?
b) o = 2(a+b), a=?

Linearna neenačba z eno neznanko

Splošna oblika linearne neenačbe z eno neznanko:

a) **ax+b < 0** ali
b) **ax+b > 0**

Rešitev neenačbe so vse tiste vrednosti za x, za katere je vrednost izraza na levi strani neenačbe

a) negativna ali
b) pozitivna.

Primer:

2x-1<3x+5

Pri reševanju neenačb uporabljate enaka pravila kot pri reševanju enačb, le da v primeru, ko neenačbo množite ali delite z negativnim številom, se znak za neenakost < ali > obrne.

Torej:

2x -3x < 5+1
-x < 6 / (-1)
x > -6

Komentar:
Za x>-6 je vrednost izraza 2x-1 manjša od 3x+5. Torej ima neenačba nešteto rešitev: katerokoli število, ki je večje od -6.

Kvadratna enačba

Splošna oblika kvadratne enačbe:

$$ax^2+bx+c=0$$

Kvadratna enačba ima največ dve rešitvi, ki se izračunata po naslednji formuli:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Primer:

$4x^2 - 4x + 5 = 0$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{25-16}}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{25-16}}{4} = \frac{1}{2}$$

V primeru, da je vrednost izraza pod korenskim znakom (determinanta)

a) **nič**, ima enačba eno rešitev;
b) **negativn**a, enačba nima rešitve v množici realnih števil.

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. Rešite neenačbo:

$(2x + 1)(2x - 1) - (2x + 3)^2 < x2 - (x - 1)^2$ $\qquad$ $[x > -\frac{9}{14}]$

2. Rešite kvadratni enačbi:

a) $2x^2 = 18x + 20$ $\qquad$ $[x_1 = 10; x2 = -1]$

b) $\frac{5}{x+1} - \frac{3x}{2-x} = \frac{7}{3}$ $\qquad$ $[x_1 = \frac{1}{2}\ ; x_2 = -16]$

Če ste imeli težave pri razumevanju učne snovi in pri reševanju primerov za utrjevanje, izberite naslednja interaktivna učna gradiva za »gimnazije« na spletni strani www.e-um.si:

1. letnik
Aritmetika (16)
Odstotki
Uporaba odstotkov
Potence
Računske operacije
Zahtevnejše enačbe

Računanje z izrazi (12)
Kvadrat dvočlenika
Razstavljanje in izposta…
Razstavljanje dvočlenika
Algebrski ulomki

Enačbe z algebrskimi u…
Obravnavanje neenačb

2. letnik
Potence in koreni (7)
Potence z racionalnimi…
Potence s celimi ekspo…
Potence – vaje

POVZETEK

Brez računanja tudi v logistiki ne gre. Na delovnem mestu boste uspešni, če vam ne bo delalo težav računanje z realnimi števili z ali brez kalkulatorja. Predvsem morate biti pozorni na vrstni red računskih operacij in pomen oklepajev:

- **Množenje in deljenje imata prednost pred seštevanjem in odštevanjem**
- **Vrstni red operacij lahko določite tudi z uporabo oklepajev. Oklepaj pove, katera operacija ima prednost.**

Potence uporabljate za krajši zapis produkta enakih števil. Lahko pa z njimi tudi računate. Zlasti pride to v poštev, ko so količine izražene z merskimi števili z velikim številom ničel ali decimalnih mest kot npr.:

- $\mathbf{6\,000\,000 = 6 \cdot 10^6}$
- $\mathbf{0{,}002 = 2 \cdot 10^{-3}}$
- $\mathbf{\dfrac{6000000}{0{,}002} = \dfrac{6 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^9 = 3000000000}$

Odstotki so primerni za izražanje relativnih deležev, to je razmerja med delom celote in celoto, kot npr.:

$\mathbf{50 \text{ od } 200 = \dfrac{50}{200} = \dfrac{25}{100} = 0{,}25 = 25\%}$

Na delovnem mestu se boste srečali s problemi, ki jih boste rešili, če jih boste znali zapisati v matematičnem jeziku, to je v obliki enačbe, formule. Pri iskanju rešitve enačbe pa morate obvladati pravila o računanju z algebrskimi izrazi, kot so:

- **izpostavljanje skupnega faktorja:** $\mathbf{8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1)}$
- **razstavljanje:** $\mathbf{2x(4x^2 - 1) = 2x(2x-1)(2x+1)}$
- **in druga, ki vam bodo koristila pri reševanju enačb.**

2 ELEMENTARNE FUNKCIJE

Matematična znanja s področja poznavanja in analiziranja elementarnih funkcij boste lahko s pridom uporabljali pri reševanju tistih problemov na delovnem področju, ko lahko odnose med količinami zapišete v obliki funkcije.

V ekonomiji in logistiki so zanimivi predvsem primeri, ko iščete območja neodvisne spremenljivke, na katerih funkcijske vrednosti naraščajo, padajo, ima funkcija minimum ali maksimum.

V tem poglavju boste obnovili znanja o elementarnih funkcijah, ki ste jih že spoznali v srednji šoli. Seveda le tisto, ki je nujno, da boste lahko uspešni na poslovnem področju logistike. Zlasti je pomembno, da veste:

- **kaj je funkcija,**
- **opredeliti postopke analize funkcij,**
- **znati zapisati enačbo linearne funkcije, narisati in analizirati graf, uporabiti ta znanja pri reševanju transportnih problemov,**
- **znati napisati enačbo kvadratne funkcije, določiti ekstreme in ničle, narisati in analizirati graf,**
- **znati analizirati polinom tretje stopnje in skicirati graf,**
- **znati izračunati odvod nekaterih funkcij in uporabiti odvod pri reševanju logističnih problemov.**

2.1 OPREDELITEV FUNKCIJE IN VRSTE REALNIH FUNKCIJ

Pri delu se pogosto srečujete s problemi, kjer nastopata dve ali več količin, ki so med seboj odvisne ali preprosto povedano: sprememba ene vpliva na spremembo druge količine.

Primer:

Če vašemu telesu dovajate preveč kalorij, se običajno poveča vaša telesna teža. Zelo dobrodošla bi bila enačba, ki bi nam podala zvezo med kalorijami in povečanjem telesne teže.

Iz delovnega okolja pa naslednji primer:

Avto vozi s stalno hitrostjo 60km/h. Kolikšno pot opravi v 1, 2, 3,…urah?

V tem primeru fizikom zapis enačbe funkcije ni delal problemov.
Količine: hitrost (v), pot (s), čas (t)

Hitrost se ne spreminja. Pot in čas sta spremenljivki in sicer je pot odvisna od časa. V matematičnem jeziku pravimo, da je pot funkcija časa. Čas je neodvisna spremenljivka, pot pa odvisna.

Pot izračunate tako, da hitrost pomnožimo s časom. S simboli to zapišete

$f(t) = s = vt$

S simboli zapisan izraz je **predpis**, ki poljubno izbrani vrednosti neodvisne spremenljivke t priredi določeno vrednost odvisne spremenljivke s.

Nekaj vrednosti za neodvisno spremenljivko in pripadajočih funkcijskih vrednosti:

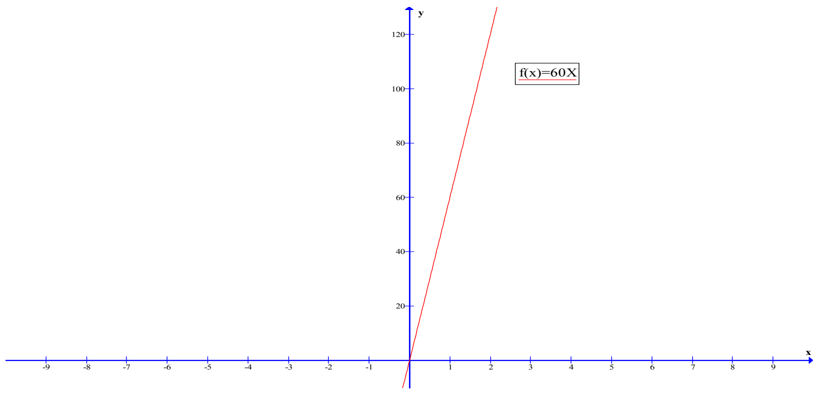
t v urah	1	2	3
s v km	60	120	180

Odnos med neodvisno in odvisno količino grafično predstavite v pravokotnem koordinatnem sistemu, ki ga tvorita pravokotni premici:

- vodoravna : abscisna os (x-os)
- navpična: ordinatna os (y-os)

Graf sestavljajo točke, katerih koordinate zadoščajo predpisu in sicer pomeni oddaljenost od ordinatne osi vrednost neodvisne spremenljivke, oddaljenost od abscisne osi pa vrednost odvisne spremenljivke.

Slika 3 je graf funkcije s = vt. Točka T , ki leži na premici, je za eno enoto oddaljena od ordinatne osi in za 60 od abscisne osi, kar zapišete T (1,60). V točki T ima funkcija vrednost 60. V točki T (2,120) ima vrednost 120. Če se neodvisna spremenljivka 2-krat poveča, se tudi odvisna 2-krat poveča. Takšne odnose imenujemo ***linearne funkcije,*** katerih grafi so premice.



Slika 3: Graf linearne funkcije s = 60t

Primer:

Avto vozi s pospeškom 4m/s^2*. Kolikšno pot opravi v 1, 2, 3,..sekundah?*

Količine: pospešek (a), pot (s), čas (t)

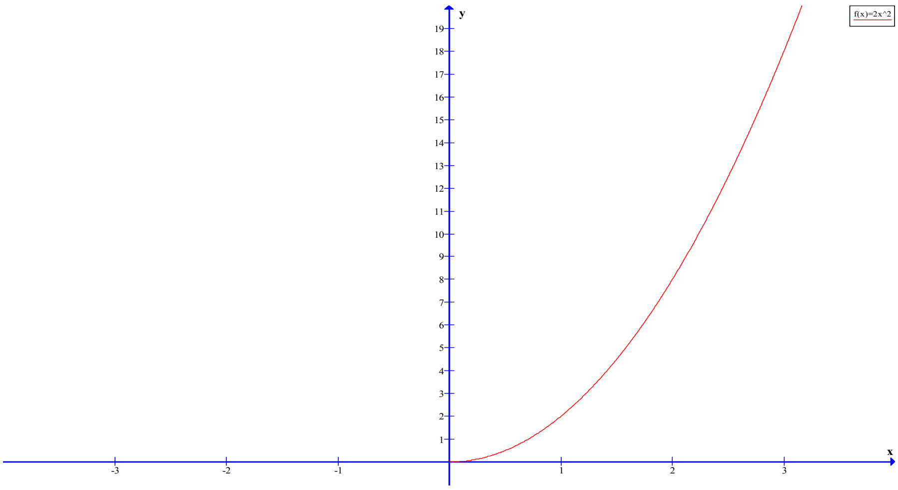
Predpis, ki ga boste uporabili za izračun poti, je

$$s = \frac{a}{2}\, t^2$$

Nekaj izračunov odvisne spremenljivke:

t	*1*	*2*	*3*
s	*2*	*8*	*18*

Slika 4 prikazuje graf **kvadratne funkcije** za pozitivne vrednosti neodvisne spremenljivke. Graf je parabola.



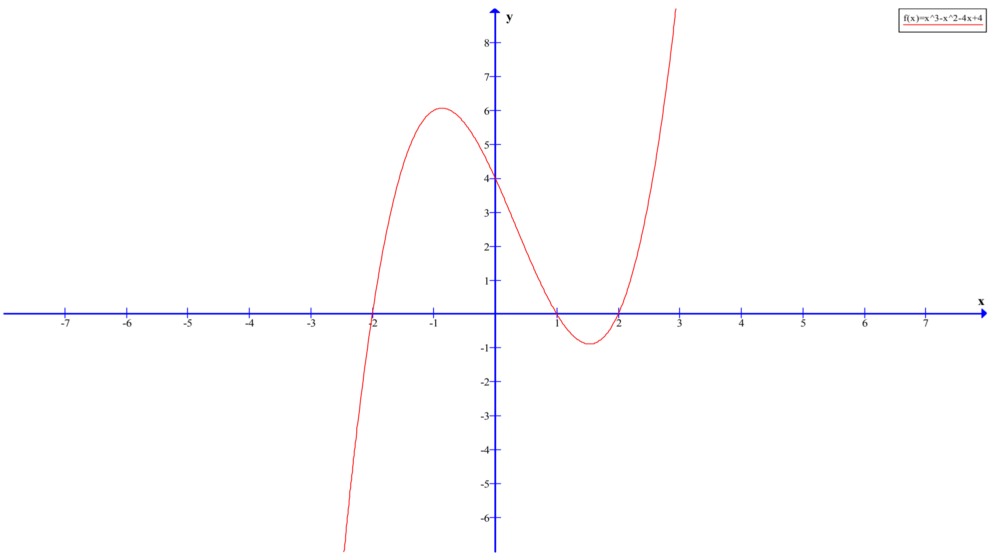
Slika 4: Graf kvadratne funkcije $s = \frac{a}{2}\ t^2$ za $x > 0$

Še nekaj primerov funkcij

Polinomi

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

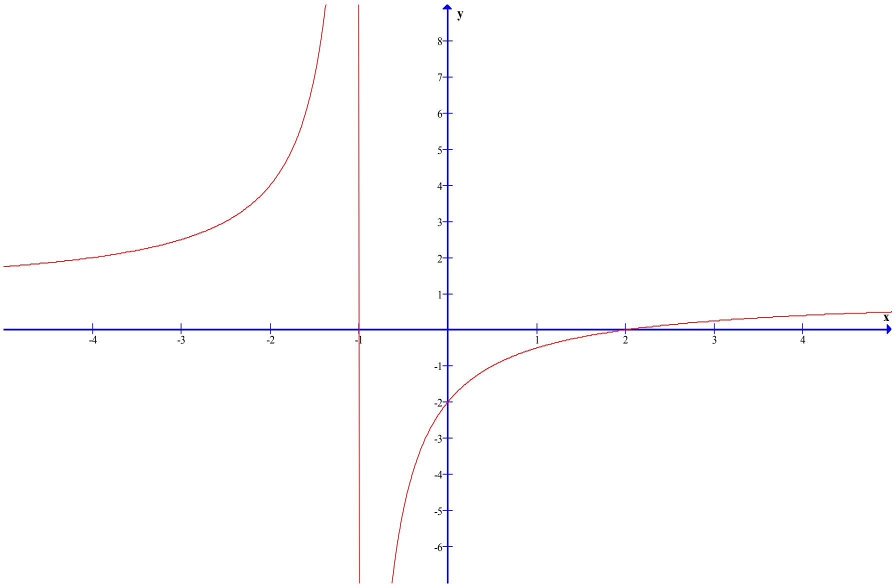
Na sliki 5 je narisan graf polinoma tega polinoma.



Slika 5: Graf polinoma $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

Racionalne funkcije so količniki dveh polinomov: $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

Vrednosti neodvisne spremenljivke pri katerih je števec ali imenovalec 0, se imenujejo kritične točke racionalne funkcije. Funkcija $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ ima za $x = 2$ števec 0, kar pomeni, da je funkcijska vrednost nič. Na grafu na sliki 6 je to presečišče z abscisno osjo, ki se imenuje **ničla** racionalne funkcije. Za $x = -1$ je imenovalec 0, kar pomeni, da funkcijska vrednost ni določena. Ta vrednost se imenuje **pol** racionalne funkcije. Na grafu je v tej točki narisana asimptota x = -1, to je premica, ki je vzporedna ordinatni osi. Funkcijske vrednosti v okolici asimptote se približujejo neskončni pozitivni oziroma negativni vrednosti.



Slika 6: Graf racionalne funkcije $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$

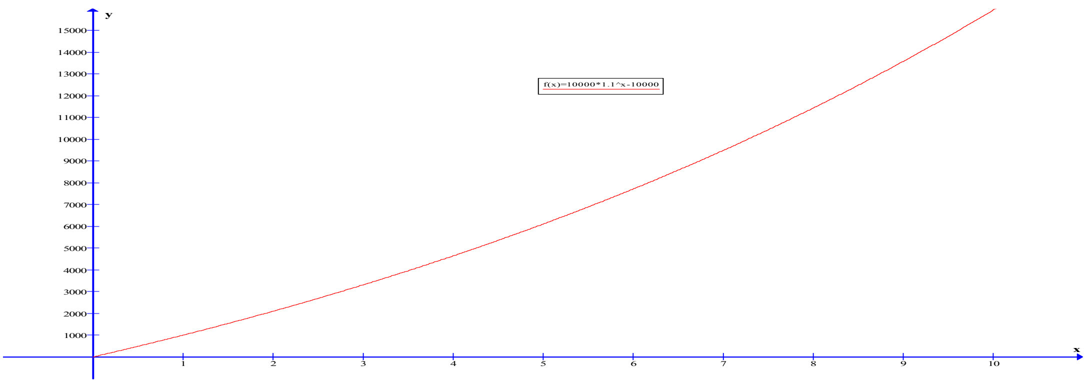
Eksponentna funkcija

$y = a^x$

Primer:

Naobrestena glavnica pri obrestnoobrestnem računu je eksponentna funkcija kapitalizacijskih obdobij**:** $\mathbf{f(x)= G_0 r^x}$ (x je število kapitalizacijskih obdobij, r je obrestovalni faktor *).*

*Graf na sliki 7 prikazuje **obresti** za depozit 10000€ pri letni obrestni meri 10% in letni kapitalizaciji.*



Slika 7: Obresti po obrestnoobrestnem računu za depozit 1000€ pri letni obrestni meri 10%
$y = 10000 \cdot 1{,}10^x - 10000$

POMNITE

FUNKCIJA je predpis zapisan v obliki **enačbe funkcije**, ki vsaki vrednosti neodvisne spremenljivke (običajno x) priredi natanko določeno vrednost odvisne spremenljivke (običajno y).

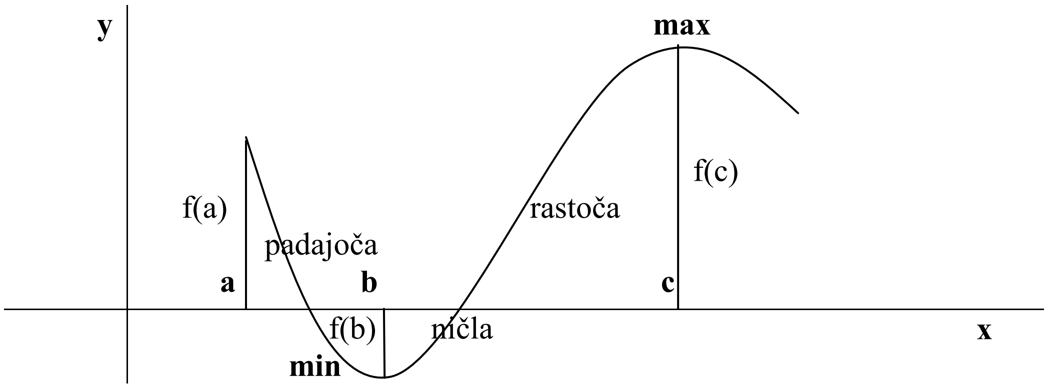
Graf funkcije je črta, ki jo sestavljajo točke, katerih koordinate zadoščajo enačbi funkcije.

2.2 LASTNOSTI REALNIH FUNKCIJ

Pri proučevanju funkcij boste proučevali predvsem naslednje lastnosti:

- na katerem intervalu je funkcija **rastoča, padajoča;**
- pri kateri vrednosti neodvisne spremenljivke (x) je funkcijska vrednost f(x) največja – **maksimum;**
- pri kateri vrednosti neodvisne spremenljivke je funkcijska vrednost najmanjša – **minimum;**
- pri katerih vrednostih neodvisne spremenljivke je funkcijska vrednost nič – **ničle funkcije.**

Slika 8 prikazuje graf polinoma. Na intervalu [a,b] je funkcija padajoča. Pri vrednosti neodvisne spremenljivke x = b , ima minimum. Na intervalu [b,c] je funkcija rastoča. V točkah, kjer graf seka abscisno os, sta ničli polinoma.



Slika 8: Graf polinoma

Navedene lastnosti polinoma zapišete na naslednji način:

a) Funkcija je na določenem intervalu **padajoča**, če velja, da povečanju neodvisne spremenljivke sledi zmanjšanje funkcijske vrednosti.

Če je $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Na grafu je funkcija padajoča za $a < x < b \rightarrow f(a) > f(b)$

b) Funkcija je na določenem intervalu **rastoča**, če velja, da povečanju neodvisne spremenljivke sledi tudi povečanje funkcijske vrednosti.

Če je $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Na grafu je funkcija rastoča na intervalu $b < x < c \rightarrow f(b) < f(c)$

c) Funkcija ima **lokalni minimum**, če je funkcijska vrednost v okolici večja od funkcijske vrednosti minimuma.

f(b) = min, če je f(x) > f(b) $\forall$ (preberite za) $b - \varepsilon \leq x \leq b + \varepsilon$

ε je poljubno majhno realno število.

d) Funkcija ima **lokalni maksimum**, če je funkcijska vrednost v okolici manjša od funkcijske vrednosti maksimuma.

f(c) = max, če je f(x) < f(c) $\forall$ (preberite za) $c - \varepsilon \leq x \leq c + \varepsilon$

Minimum, maksimum imenujemo tudi **ekstreme** funkcije ali **stacionarne** točke.

e) Funkcija ima ničlo pri tisti vrednosti neodvisne spremenljivke, ko je funkcijska vrednost 0.

Če je x_n ničla funkcije $\rightarrow$ $f(x_n) = 0$

Če je funkcijska vrednost 0, seka graf funkcije abscisno os. Ničla je torej presečišče grafa z abscisno osjo.

POMNITE
Funkcija je rastoča, če za $x_1 < x_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$
Funkcija je padajoča, če za $x_1 < x_2$ je $f(x_1) > f(x_2)$
Funkcija ima pri x=b minimum, če je za $b - \varepsilon \leq x \leq b + \varepsilon \quad f(x) > f(b)$
Funkcija ima pr x=c maksimum, če je $c - \varepsilon \leq x \leq c + \varepsilon \quad f(x) < f(c)$
x je ničla funkcije, če je $f(x) = 0$

2.3 ANALIZA FUNKCIJ

Matematična znanja s področja poznavanja funkcij in njihovih lastnosti pridobijo uporabno vrednost pri reševanju problemov, ki jih lahko zapišete v obliki enačbe funkcije.

Analiza linearne funkcije

Primer s področja logistične dejavnosti:

Podjetja običajno obračunavajo amortizacijo osnovnih sredstev po metodi enakomernega časovnega amortiziranja, kar pomeni, da se letne amortizacijske stopnje ne spreminjajo. Lahko pa se odločijo za metodo funkcionalnega obračunavanje, npr. za tovornjak bo amortizacija odvisna od prevoženih kilometrov. Lahko pa je obračun kombiniram, kar pomeni, da se podjetje odloči, da bo del amortizacije obračunalo po metodi enakomernega časovnega amortiziranja, del pa po metodi funkcionalnega obračunavanja.

Primer:

Naj bo nabavna vrednost tovornjaka, ki naj bi se amortiziral v petih letih in v tem času prevozil 500.000 km, 8.500 €. Zapišite funkcijo za letni izračun amortizacije, če se 50% nabavne vrednosti amortizira po metodi enakomernega časovnega amortiziranja (tudi linearno amortiziranje), 50% pa po metodi funkcionalnega amortiziranja!

1. Izračun letne amortizacije po metodi enakomernega časovnega amortiziranja

Letna amortizacijska stopnja: 20% = 0,2
Amortizacijska osnova: 50% od 8500€

$AM_{\check{c}} = 0{,}5 \cdot 8500€ \cdot 0{,}2 = 850€$

2. Izračun letne amortizacije po metodi funkcionalnega amortiziranja:

Po metodi funkcionalnega amortiziranja je amortizacija odvisna od prevoženih kilometrov. Za x prevoženih kilometrov na leto je amortizacija:

$$AM_f = f(x) = \frac{0{,}5 \cdot 8500}{500000} \cdot \mathbf{x} = 0{,}0085\,\mathbf{x}$$

prevoženi km v enem letu

Amortizacija na prevoženi kilometer

Skupna amortizacija: y = 0,0085 x + 850 → stalni člen n
↓
smerni koeficient k

Če je v letu tovornjak prevozil 150000 km, bo amortizacija

$Y = 0{,}0085 \cdot 150000 + 850 = 2125$

Splošno eksplicitno enačbo linearne funkcije običajno zapišete z naslednjimi simboli:

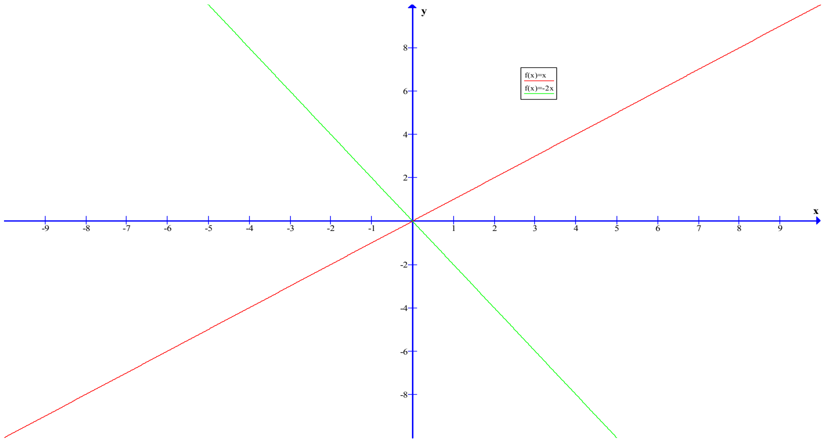
$y = k\,x + n$	y – odvisna spremenljivka x – neodvisna spremenljivka k – smerni koeficient n – stalni člen	*Primer:* $y = 2x + 5$ $k = 2$, $n = 5$

Splošno implicitno enačbo linearne funkcije pa z naslednji:

$$\mathbf{ax + by + c = 0} \;\rightarrow\; y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Sedaj boste proučili, kaj določa smerni koeficient.

Na sliki 9 so narisana grafa linearnih funkcij $y = x$ in $y = -2x$



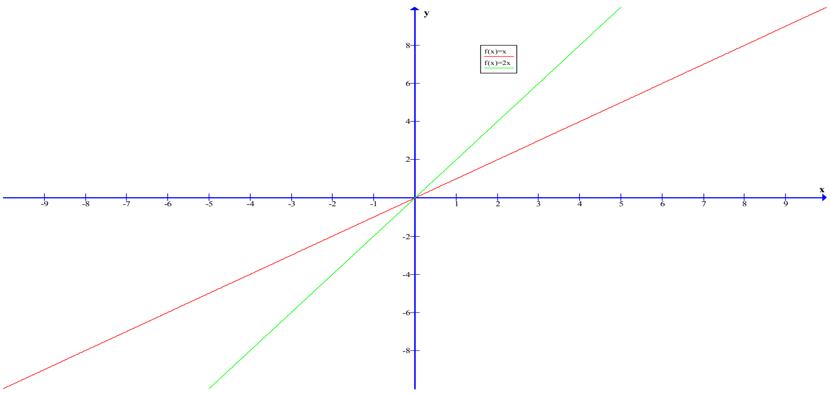
Slika 9: Grafa funkcij $y = x$ in $y = -2x$

Smerna koeficienta sta različna po predznaku. Funkcija $y = x$, ki ima pozitiven smerni koeficient, je rastoča; funkcija $y = -2x$, ki ima negativen, je padajoča.

Absolutna vrednost smernega koeficienta pa določa velikost kota, ki ga premica oklepa z abscisno osjo.

Na sliki 10 sta grafa funkcij
$y = x \;\rightarrow\; k_1 = 1$
$y = 2x \;\rightarrow\; k_2 = 2$

Kot, ki ga prva premica $y = x$ oklepa z abscisno osjo, je manjši od kota, ki ga oklepa druga premica $y = 2x$ z abscisno osjo.

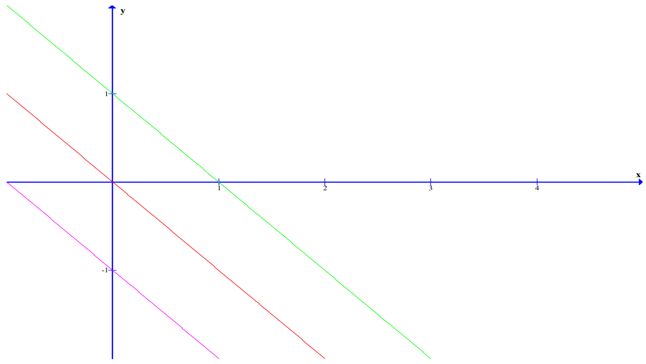


Slika 10: Grafa linearnih funkcij $y = x$ in $y = 2x$

Kaj določa stalni člen?

Na sliki 11 so narisane premice $y = -x$, $y = -x - 1$ in $y = -x + 1$. Smerni koeficienti so enaki, kar pomeni, da so koti, ki jih premice oklepajo z abscisno osjo, enaki. Premice so **vzporedne**.

Stalni členi so različni. Če je stalni člen 0, gre premica skozi koordinatno izhodišče, sicer seka ordinatno os v točki, katere ordinata je enaka stalnemu členu. Stalni člen določa presečišče premice z ordinatno osjo.



Slika 11: Grafi linearnih funkcij z različnimi stalnimi členi

Kako določite ničlo linearne funkcije?

POMNITE

Za vse vrste funkcij velja:

Ničla je v točki, ko je funkcijska vrednost 0. Na grafu je to presečišče z abscisno osjo.

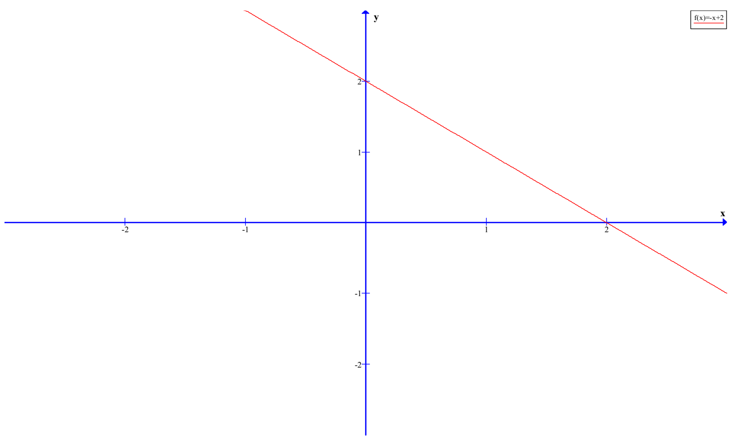
Primer:

Določite ničlo linearne funkcije $y = -x + 2$

Pogoj: $f(x) = 0$

$$0 = -x + 2 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Na sliki 12 je narisan graf $y = -x + 2$. Premica seka abscisno pri $x = 2$. To je ničla funkcije.



Slika 12: Graf funkcije $y = -x + 2$

POMNITE

Obliki enačbe linearne funkcije:

Eksplicitna: **y = k x + n**
Implicitna: **ax + by +c =0**

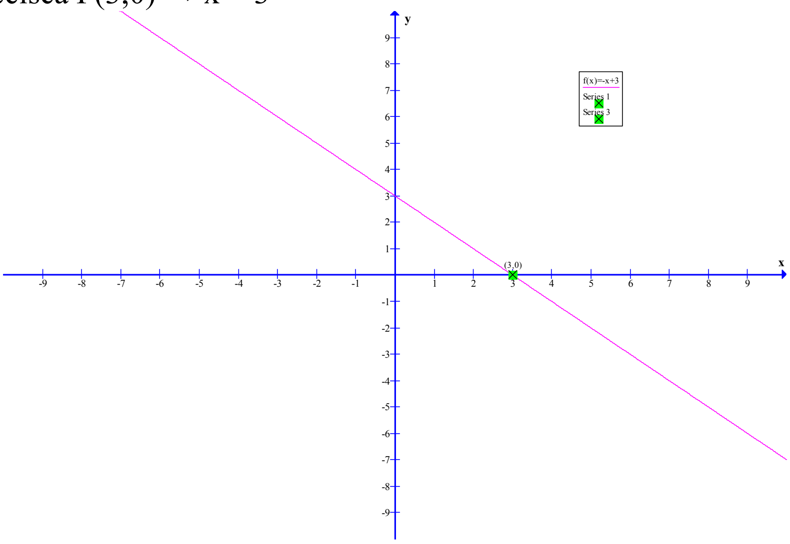
- Smerni koeficient **k** določa naklonski kot premice, to je kot med premico in abscisno osjo. Čim večji je smerni koeficient, večji je naklonski kot.
- Če je smerni koeficient pozitiven, je funkcija rastoča; če je negativen, je funkcija padajoča.
- Stalni člen določa presečišče premice z ordinatno osjo.
- Ničla je rešitev linearne enačbe. To je tista vrednost neodvisne spremenljivke, pri kateri premica seka abscisno os.

Grafično reševanje linearnih enačb

Primer:
Grafično rešite linearno enačbo -x + 3 = 0

Narišite linearno funkcijo y = -x + 3 in določite vrednost spremenljivke x v presečišču z abscisno osjo!

Koordinati presečišča P(3,0) → x = 3



Slika 13: Grafična rešitev linearne enačbe –x + 3 = 0

Primer uporabe grafičnega reševanja linearnih enačb v logistiki

Izbirate lahko med dvema taksi družbama. Startnina vozila A prve družbe znaša 3 EUR in nadaljnjih 60 centov za vsak prevožen kilometer. Startnina vozila B druge taksi družbe pa znaša 5 EUR in 40 centov za vsak kilometer. Katero vozilo je cenejše, če ga potrebujete za prevoz na razdaljah, ki so večje od 20km?

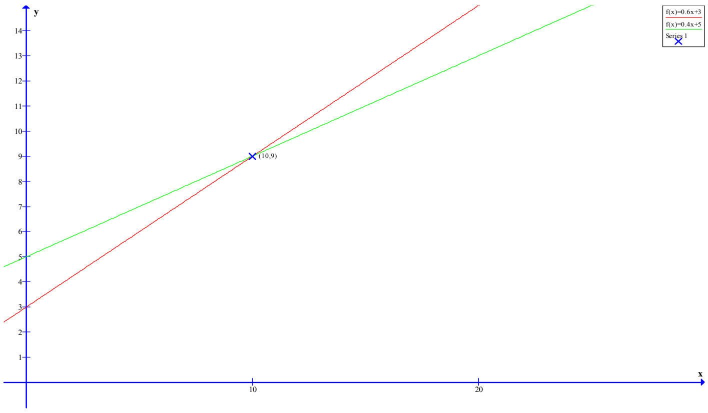
1. Zapišete enačbi linearnih funkcij za izračun stroškov prevoza v odvisnosti od prevoženih kilometrov:

A: y = 0,6 x + 3 *B : y = 0,4 x + 5*

Algebrsko rešite problem tako, da določite število prevoženih kilometrov, ko so stroški enaki, torej

0,6x + 3 = 0,4x + 5 → *x=10*

2. Grafično rešite problem tako, da narišete grafa linearnih funkcij. Abscisa presečišča je tista razdalja, pri kateri so prevozni stroški enaki – MEJNA VREDNOST. Koordinati presečišča na sliki 14 sta (10,9), kar pomeni, da sta pri prevoženi razdalji 10 km, prevozni stroški za obe vozili enaki, to je 9 €.



Slika 14: Določitev mejne vrednost

Komentar:
Za razdalje, ki so večje od 10 km, je cenejše vozilo B.

Grafično reševanje linearnih neenačb

Linearna neenačba z dvema spremenljivkama ima obliko

a) ax + by - c < 0 ali
b) ax + by - c > 0

Rešitve neenačbe so koordinate točk, ki zadoščajo neenačbi.

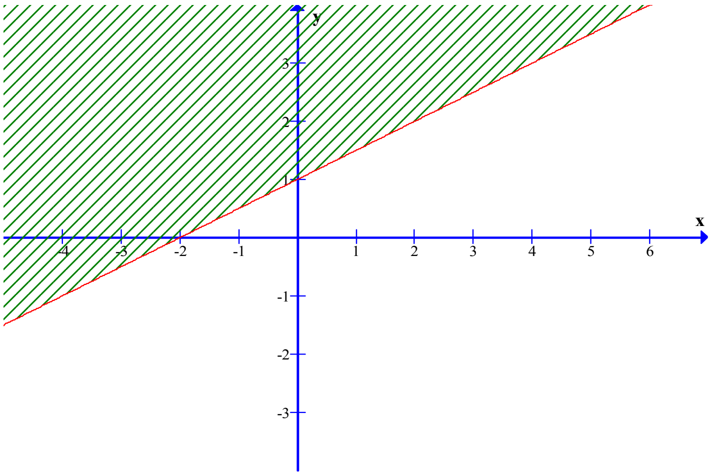
Primer:

Določite rešitve neenačbe 4y – 2x ≥ 4!

Postopek grafičnega reševanja:

1. Določite eksplicitno enačbo premice: 4y - 2x = 4 → $y = \frac{1}{2}x + 1$

2. Narišete graf linearne funkcije. Premica razdeli ravnino v dve polravnini. Rešitve neenačbe so koordinate točk, ki ležijo nad premico, v črtkani polravnini na sliki 15.



Slika 15: Grafična rešitev linearne neenačbe $4y - 2x \geq 4$

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. Po pogodbi o zaposlitvi pripada delavcu bruto plača, ki jo sestavljata
- izhodiščna plača in
- dodatek za delovno uspešnost.

Bruto izhodiščna plača je 1500 €, dodatek za delovno uspešnost pa je določen s % od izhodiščne plače.
Zapišite plačo kot funkcijo dodatka za delovno uspešnost! Kolikšna je plača, če je dodatek 15% izhodiščne plače?

[enačba funkcije: $y = 1500x + 1500$; plača pri 15% dodatku: 1725]

2. Določi presečišči grafa linearne funkcije $y = \frac{3}{4}x - 6$ s koordinatnima osema!

[z ordinatno osjo A (0,-6); z abscisno osjo B (8,0)]

3. Zapišite enačbo premice, ki je vzporedna premici $y = 2x - 3$ in poteka skozi točko A $(-1, 4)$

[$y = 2x + 6$]

4. Zapišite enačbo premice, ki poteka skozi točke A (3,-1) in seka abscisno os pri $x = 4$!

[$y = x - 4$]

5. Izbirate lahko med dvema renta-car podjetjema A in B. Za izposojo vozila podjetja A je treba plačati 40 EUR in še 15 centov za vsak nadaljnji prevožen kilometer. Pri podjetju B so stroški 30 EUR in 20 centov na kilometer. Pri kolikih prevoženih kilometrih se bolj splača najeti vozilo podjetja A?

[mejna vrednost je 200 km. Vozilo A se splača najeti za razdalje, ki so manjše od 200 km]

6. Algebrsko in grafično rešite enačbo $x + 1 = \frac{x}{2} + 3$

[$x = 4$]

Linearni funkcijski odnos se zelo pogosto pojavlja pri reševanju problemov v logistiki in statistiki zato so znanja s področja analize in interpretacije linearne funkcije zelo pomembna. Da to znanje še utrdite , predelajte še naslednja interaktivna gradiva za gimnazije na spletni strani www.e-um.si:

1. letnik
Linearna funkcija (12)
Linearna funkcija
Enačba premice

Analiza kvadratne funkcije

Primer s področja logistike:

Povprečna varnostna razdalja med vozili, ki vozijo v strnjeni koloni po avtocesti, je odvisna od hitrosti, s katero se promet odvija. Če je kolona zelo počasna, je povprečna razdalja med zaporednimi vozili relativno majhna. Kakor hitro kolona poveča hitrost, se razdalje med avtomobili povečajo. Če označimo z **y** *razdaljo med dvema zaporednima voziloma, izraženo v metrih, in z* **x** *hitrost kolone v km/h, lahko ta odnos približno opišemo s funkcijo*

$y = 0{,}01x^2 + 0{,}33x + 5{,}4$

Izračun varnostne razdalje pri hitrosti

a) $50 km/h \rightarrow y = 0{,}01 \cdot 50^2 + 0{,}33 \cdot 50 + 5{,}4 = 46{,}9$
b) $100 km/h \rightarrow y = 138{,}4$

Splošna oblika enačbe KVADRATNE funkcije je sledeča.

$$y = \underbrace{a}_{\text{kvadratni člen}}x^2 + \underbrace{b}_{\text{linearni člen}}x + \underbrace{c}_{\text{stalni člen}}$$

Koeficienta in stalni člen določajo potek grafa kvadratne funkcije. Kako?

Primer:

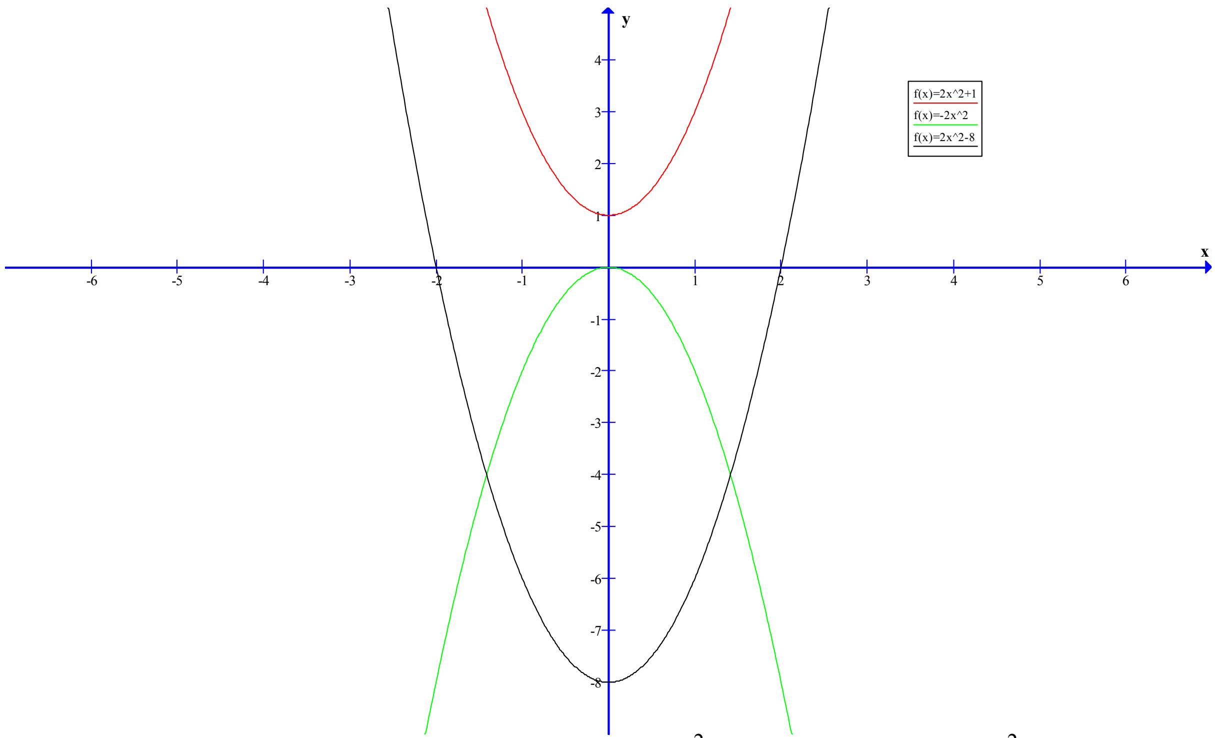
Na sliki 16 so narisani grafi kvadratnih funkcij

- $y_1 = 2x^2 + 1$,
- $y_2 = -2x^2$ *in*
- $y_3 = 2x^2 - 8$

Predznak koeficienta kvadratnega člena **a** določa, kako je graf obrnjen. Če je pozitiven ima funkcija MINIMUM (y_1 in y_3); če je negativen, pa ima funkcija MAKSIMUM (y_2). Stalni člen pa določa lego stacionarne točke: nad (y_1), na (y_2) ali pod abscisno osjo (y_3).

Ničla je abscisa presečišče grafa z abscisno osjo oziroma abscisa dotikališča. Če graf ne seka abscisne osi, funkcija nima ničle.

Na sliki 16 lahko odčitate abscise ničel: y_3 ima dve ničli, y_2 eno ničlo, y_1 pa nima ničel, ker ne seka abscisne osi.



Slika 16: Grafi kvadratnih funkcij $y_1 = 2x^2 + 1$, $y_2 = -2x$ in $y_3 = 2x^2 - 8$

Kako izračunate koordinati ekstrema kvadratne funkcije?

Koordinati minimuma (maksimuma) kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ lahko izračunate na dva načina:

a) po obrazcih za izračun koordinat ekstrema T $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

b) z izračunom koordinat točke, v kateri je prvi odvod 0.

Primer:

Ali ima funkcija $y = x^2 + 2x - 3$ maksimum ali minimum? Izračunajte koordinati ekstrema!

Funkcija ima minimum, ker je koeficient kvadratnega člena pozitiven.

Koordinati minimuma:

Abscisa: $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$

Ordinata: $-\frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{4-4\cdot 1\cdot(-3)}{4} = -4$

Minimum v T (-1, -4)

Izračun koordinat ekstrema z odvodom je razložen v naslednjem poglavju.

Kako izračunate ničli kvadratne funkcije?

Že veste, da je ničla tista vrednost neodvisne spremenljivke, pri kateri je funkcijska vrednost 0. To zapišete

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta ničli kvadratne funkcije. Izračunate jih po obrazcu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funkcija ima ničli, če je $b^2 - 4ac > 0$, saj koren iz negativnega števila ni realno število

Primer:

Določite ničle kvadratne funkcije $y = x^2 + 2x - 3$!

Pogoj: $y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$

Kvadratno enačbo pa že znate rešiti:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$x_1 = 1$
$x_2 = -3$

POMNITE

Enačba: $y = ax^2 + bx + c$

- Koordinati ekstrema: $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$
- Minimum $a > 0$; Maksimum: $a < 0$
- Ničli: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

PRIMER ZA UTRJEVANJE

Določite ničle in ekstrem kvadratne funkcije $y = 2x^2 - 5x - 3$ ter s pomočjo ničel ter koordinat ekstrema skicirajte graf funkcije!

[$x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; minimum $\left(\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right)$]

Na spletni strani www.e-um.si v interaktivnih gradivih za gimnazijce boste našli še dodatne vaje za utrjevanje v naslednjih temah:

2. letnik
Kvadratna funkcija
Vpeljava kvadratne fun…
Lastnosti in graf kvadr…

Pomen diskriminante D
Kvadratna enačbe

Analiza polinomov

Polinom n-te stopnje ima naslednjo enačbo:

$$f(x) = \underbrace{a_n x^n}_{\text{vodilni člen}} + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + \underbrace{a_0}_{\text{konstantni člen}}$$

Primer polinoma 3. stopnje:

$y = x^3 + x^2 - x$

Analizirati navedeno funkcijo pomeni proučiti, na katerem intervalu je funkcija rastoča, padajoča, določiti ničle in ekstreme. Ko to proučite, lahko narišete graf funkcije.

Kako določite ničle polinoma?

Ničle so tiste vrednosti za x, pri katerih je funkcijska vrednost 0.

Primer določitev ničel polinoma:

$x^3 + x^2 - x = 0$

Eden izmed načinov iskanja ničel je razstavljanje polinoma na produkt enočlenikov, dvočlenikov ali večlenikov. Navedeni polinom lahko razstavite:

$x\,(x^2 + x - 1) = 0$

Produkt je nič, če je eden ali več faktorjev 0. Torej mora biti

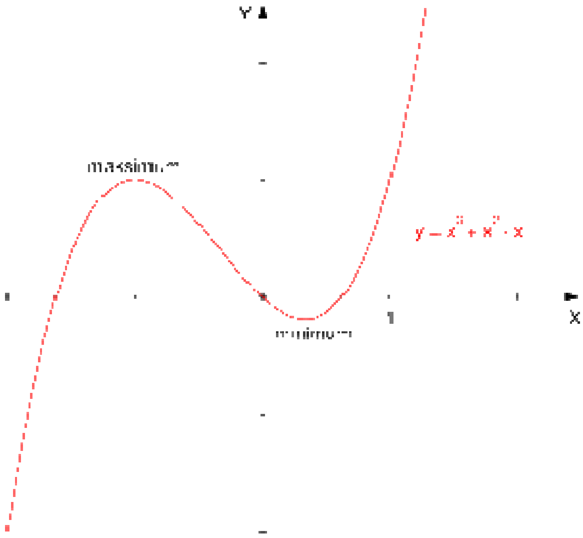
- $x = 0$ ali
- $x^2 + x - 1 = 0$

Drugi faktor je kvadratna enačba, katere ničle izračunate po obrazcu $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Dobite $x_1 = 0{,}6$ in $x_2 = -1{,}6$.

Se strinjate z naslednjim odgovorom?
Polinom ima 3 ničle: $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}6$ in $x_3 = -1{,}6$

Na sliki 17 je narisan graf polinoma. Ničle so tiste vrednosti spremenljivke x, kjer graf seka abscisno os.



Slika 17: Graf polinoma $y = x^3 + x^2 - x$

Da lahko določili potek funkcije na intervalih med ničlama in onstran ničel ($x < -1{,}6$ in $x > 0{,}6$ ali $x > 0$ in $x < 0{,}6$), morate ugotoviti, ali ima funkcija na teh intervalih minimum ali maksimum in tudi določite minimum oziroma maksimum. To pa se pri polinomih običajno določa s pomočjo **odvodov**, kar je razloženo v naslednjem poglavju.

POMNITE
Ničle polinoma so rešitve enačbe n-stopnje. To so tiste vrednosti neodvisne spremenljivke, pri katerih graf seka abscisno os. Na intervalu med ničlama so stacionarne točke, katerih koordinate se določa s pomočjo odvodov.

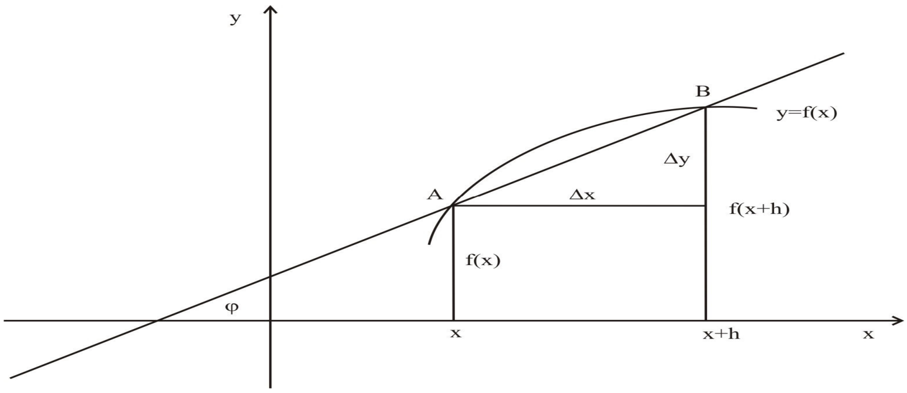
Tisti, ki želite več vedeti o ničlah polinomov, si oglejte interaktivno gradivo za gimnazije na spletni strani www.e-um.si in sicer temo za 2. letnik Ničle polinoma.

2.4 ODVOD

Realne funkcije, v katerih nastopa neodvisna spremenljivka kot potenca s potenčnim eksponentom, ki je celo število večji od 2, je težko analizirati brez poznavanja pojma **odvoda.** Z odvodi boste določili ničle in pojasnili potek funkcije na intervalih med ničlami ter onstran ničel.

Kaj je odvod?

Na grafu funkcije y = f(x) je skozi točki A in B narisana premica - sekanta. Odsek premice med A in B tvori s spremembama neodvisne spremenljivke (Δx) in funkcijske vrednosti (Δy) pravokotni trikotnik.



Slika 18: Diferenčni kvocient

Izraz $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se imenuje **diferenčni kvocient**, ki geometrično pomeni tanges naklonskega kota sekante. Iz diferenčnega kvocienta lahko izračunate naklonski kot sekante.

Primer:

Če se x poveča za 1, naj se funkcijska vrednost poveča za 2. Določite naklonski kot sekante!

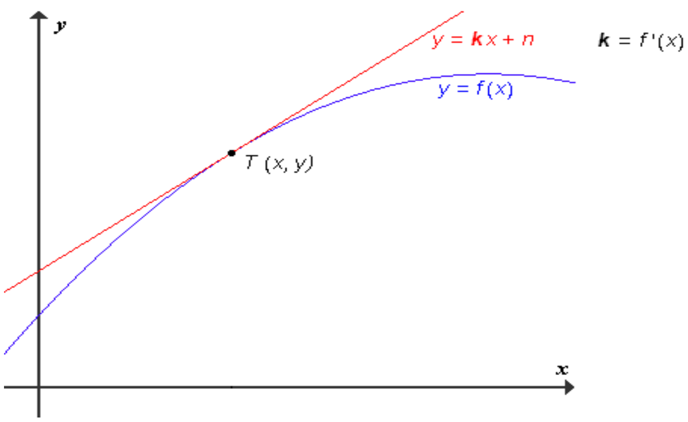
$tg\ \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

$\varphi = arctg2$ *(Uporabite žepni kalkulator!)*

$\varphi = 63°26'$

Zamislite si, kaj se dogaja s premico, če spreminjate **h** tako, da ga približujete 0. Sekanta prehaja v tangento. Temu postopku pravimo določanje **limite funkcije** in zapišemo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



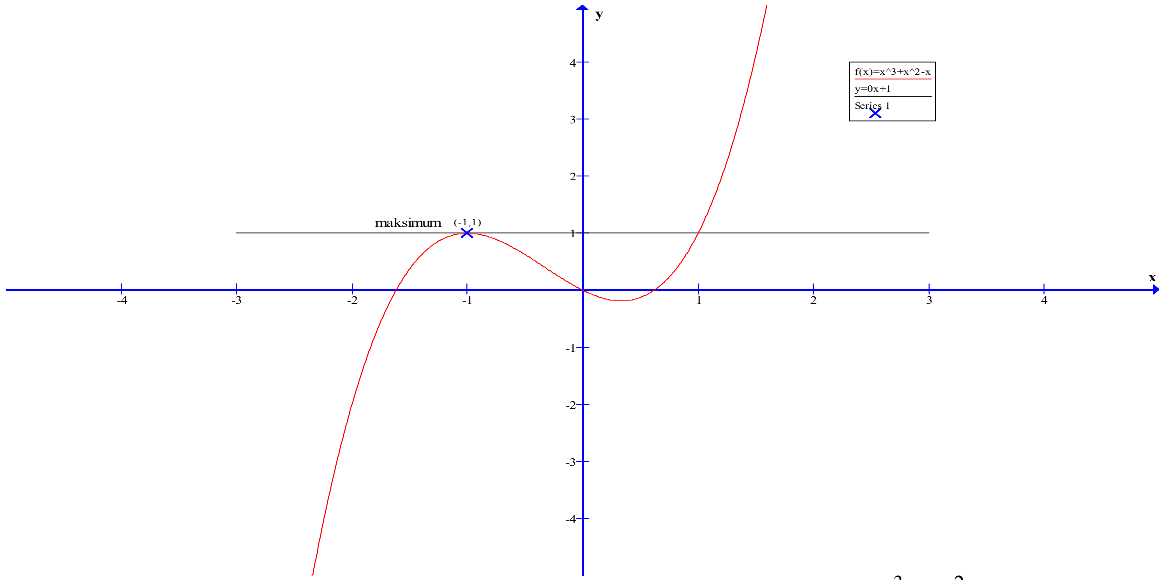
Slika 19: Grafična predstavitev odvoda

Vrednost limite v točki **x** se imenuje **odvod,** kar v matematični obliki zapišete:

$$f'(x) = y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{tg}\ \varphi$$

Geometrično je odvod tanges naklonskega kota tangente v točki x. Ta ugotovitev pa je bistvena za določanje minimuma oziroma maksimuma funkcije.

Zakaj?



Slika 20: Lega tangente v stacionarni točki funkcije $y = x^3 + x^2 - x$

Tangenta je v točki, ko ima funkcija maksimum (-1, 1), vzporedna z abscisno osjo, kar pomeni, da je naklonski kot 0^o. Tanges kota 0^o je 0, torej je odvod v tej točki 0.

POMNITE

Pogoj za maksimum oziroma minimum:

Če je $f'(x) = 0$, ima $f(x)$ v tej točki maksimum ali minimum.

To spoznanje boste uporabili pri določanju maksimalne ali minimalne funkcijske vrednosti. Če poznate enačbo funkcije, **izračunate odvod**. Pri tistih vrednosti neodvisne spremenljivke, ko je odvod nič, ima funkcija ekstrem: minimum ali maksimum.

Kako pa izračunate odvod?

Ponovili boste le nekaj pravil za odvajanje. Ko boste morali odvajati druge funkcije, ki jih ni v spodnji tabeli, se boste morali poučiti o pravilih za odvajanje teh funkcij.

Enačba funkcije	**Odvod**	**Primeri**	
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$y = 5$	$y' = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$y = x^3$ $y = x$ $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$y' = 3x^2$ $y' = x^{1-1} = x^0 = 1$ $y' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) + g(x)$	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$	$y = x^3 - x^2 + x - 5$	$y' = 3x^2 - 2x + 1$
$af(x)$	$f'(x) = af'(x)$	$y = 5x^3$	$y' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$

Še nekaj primerov:

a) $y = x^7 + 7x^5 + x^3$
$y' = (x^7 - 7x^5 + x^3)' = (x^7)' - 7(x^5)' + (x^3)' = 7x^6 - 7 \cdot 5x^4 + 3x^2 = 7x^6 - 35x^4 + 3x^2$

b) $y = \frac{1}{x^3} + 4$

Ulomek zapišete kot potenčno funkcijo z negativnim eksponentom in odvajate po pravilu za odvajanje potenčne funkcije; odvod konstante je 0.

$$y' = \left(\frac{1}{x^3}\right) + 0 = \left(x^{-3}\right) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$$

Uporaba odvoda pri določanju ekstrema

Sedaj pa boste določili ekstreme funkcije $y = x^3 + x^2 - x$ s pomočjo odvoda. Na sliki 20 je graf funkcije $y = x^3 + x^2 - x$. Funkcija ima en maksimum in en minimum. Kako boste s pomočjo odvoda določili koordinati ekstremov?

1. korak:

Izračunate odvod funkcije po pravilih za odvajanje:

$$y' = 3x^{3-1} - 2x^{2-1} - 1 = 3x^2 - 2x - 1$$

2. korak

Pogoj za ekstrem je, da mora biti odvod nič:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

Rešite kvadratno enačbo in dobite:

$x_1 = \frac{1}{3}$

$x_2 = -1$

Pri teh vrednosti neodvisne spremenljivke ima funkcija ekstrem.

3. korak

Kolikšna je vrednost ekstrema pa izračunate tako, da vstavite v enačbo funkcije vrednosti spremenljivke x_1 in x_2.

Pri $x_1 = \frac{1}{3}$: $y = x^3 + x^2 - x \quad \rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = -\frac{5}{27}$

Pri $x_2 = -1$: $\quad y = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) = 1$

Se strinjate z naslednjim odgovorom?

Funkcija ima ekstrema v točkah $\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{27}\right)$ in $(-1,1)$.

V kateri točki je maksimum in v kateri minimum?

Izračunate drugi odvod tako, da prvi odvod ponovno odvajate. Prvi odvod še enkrat odvajamo:

$$y'' = \left(3x^2 + 2x - 1\right)' = 6x + 2$$

Če je drugi odvod **negativen**, je v tej točki **lokalni MAKSIMUM**. Če je drugi odvod **pozitiven**, ima funkcija v tej točki **MINIMUM**.

Pri $x_1 = \frac{1}{3}$: $y'' = 6x + 2 = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 4$ MINIMUM

Pri $x_2 = -1$: $y'' = 6x + 2 = 6 \cdot (-1) + 2 = -4$ MAKSIMUM

POMNITE

Točke funkcije f(x), v katerih je f´(x) = 0, imenujemo stacionarne točke. V stacionarnih točkah je tangenta grafa vzporedna abscisni osi. Lokalne maksimume in lokalne minimume imenujemo s skupnim imenom ekstremi.
Ekstremne vrednosti doseže odvedljiva funkcija v stacionarnih točkah. Vsaka stacionarna točka ni nujno ekstremna. Če je drugi odvod f´´(x) negativen, je v tej točki lokalni maksimum, če pa je drugi odvod pozitiven, je v tej točki lokalni minimum.

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. Izračunajte odvode naslednjih funkcij:

a) $y = x^5 - 4x^3 + x - 2$ [$y' = 5x^4 - 12x^2 + 1$]

b) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ [$y' = 2x - \frac{2}{x^3}$]

2. Določite ničle in ekstreme (minimum ali maksimum) kvadratnih funkcij ter ju narišite!

a) $y = -2x^2 + 3x + 2$ [maksimum pri $x = \frac{3}{4}$]

b) $y = x^2 - 1$ [minimum pri x = 0]

3. Določite ničle in ekstreme funkcije $y = x^3 - 4x$! S pomočjo teh točk skicirajte graf funkcije!

[ničle : $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$: minimum x= $\frac{2}{\sqrt{3}}$, maksimum x= $-\frac{2}{\sqrt{3}}$]

Več o odvodih in uporabi pri analiziranju funkcij je v interaktivnih gradivih za gimnazije na spletni strani www.e-um.si. Zlasti priporočam teme za:

4. letnik
Odvod (11)
Definicija odvoda
Pravila za odvajanje
Naraščanje, padanje, st…

2.5 UPORABA ODVODA V LOGISTIKI

Določanje minimalnih stroškov

Primer:

Naj bo x količina prepeljanega materiala v tonah in $S(x) = x^2 - 8x + 35$ *funkcija prevoznih stroškov na tono. Izračunajte, za katero količino materiala bodo prevozni stroški na tono materiala najmanjši in kolikšni so ti stroški?*

Odvod: $S'(x) = \left(x^2 - 8x + 35\right)' = 2x - 8$

Prvi odvod mora biti nič: $2x - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4$

Drugi odvod: $S''(x) = \left(2x - 8\right)' = 2 > 0 \quad \rightarrow \quad$ *Minimum*

Stroški: $S(x) = x^2 - 8x + 35 = 4^2 - 8 \cdot 4 + 35 = 19$

Komentar:
Stroški na tono materiala so najmanjši pri prevozu 4 ton materiala in znašajo 19 denarnih enot na tono.

Optimalna naročilna količina

Z zalogami podjetja dosegajo potrebno fleksibilnost za zadovoljevanje proizvodnih ali kupčevih zahtev. Naloga menedžmenta zalog je, da določijo optimalno zalogo, to je zalogo, ki zagotovi nemoteno proizvodnjo oziroma oskrbovanje kupcev ob minimalnih stroških zalog. Če so potrebe v enakih časovnih intervalih med letom ne spreminjajo (deterministično povpraševanje), se bo podjetje odločilo za tolikšno **enkratno naročilo, da bodo letni stroški minimalni**. Ti pa so odvisni od količine enkratnega naročila. Če se podjetje odloči za majhna naročila, tvega velike stroške naročanja; če se odloči za velika naročila, pa velike stroške zalog.

V nadaljevanju se boste seznanili z modelom določanja **optimalne naročilne količine (EOQ – Economic Order Quantity)** materiala, če so potrebe med letom enakomerne, kar pomeni, da so v enakih časovnih obdobjih enake.

Zaloge povzročajo stroške kot so

- **Stroški naročanja**, ki jih delimo v **fiksne** in **variabilne**. Med fiksne stroške prištevamo stroške naročanja, ki niso odvisni od nabavne količine, npr. iskanje ponudnikov, izbira dobavitelja, priprava nabavnega naročila, prevzemanje. Variabilni pa so odvisni od velikosti naročila, npr. stroški prevoza, manipulacij.
- **Stroški zalog**, npr. stroški skladiščenja, finančni stroški zalog (obresti za posojila za plačilo nabavljenih količin).

Primer:

Podjetje potrebuje letno 200 000 ton materiala. Fiksni stroški enega naročila so 500 €, variabilni 25 €/t ; letni stroški skladiščenja so 30 €/t. Kolikšna je optimalna naročilna količina? Koliko je število letnih naročil? Kolikšni so letni optimalni stroški naročanja in skladiščenja?

Podatki:

Skupni letni stroški zalog (total annual inventory cost): C
Letne potrebe (demond): D = *200 000 t*
Stroški enega naročila: fiksni + variabilni = $c_f + c_v$ = *500 € + 25 €/t*
Letni stroški skladiščenja (zalog): h = *30 €/t*
Optimalna naročilna količina (EOQ): Q = *?*

1. korak:

Optimalna naročilna količina je tista, pri kateri so skupni stroški najmanjši. To je neodvisna spremenljivka. Skupni stroški pa so odvisna spremenljivka. Poiskati morate enačbo funkcije skupnih stroškov enega naročila.

stroški enega naročila = fiksni stroški naročanja + variabilni stroški naročanja + stroški skladiščenja

$$C(\text{enega naročila}) = c_f + c_v Q + h \underbrace{\frac{Q}{D}}_{\text{delež skladiščnih stroškov na eno naročilo}} \cdot \frac{Q}{2} \rightarrow \text{povprečna zaloga v eni periodi}$$

Če stroške za eno naročilo pomnožite s številom letnih naročil $\frac{D}{Q}$, dobite letne stroške:

$$C_{letni} = c_f \frac{D}{Q} + c_v Q \frac{D}{Q} + h \frac{Q}{D} \frac{Q}{2} \frac{D}{Q}$$

$$C_{letni} = c_f \frac{D}{Q} + c_v D + h \frac{Q}{2}$$

(Q je neodvisna spremenljivka, ostale količine so konstante)

Če neodvisno spremenljivko Q označite z x in skupne letne stroške z y ter za ostale količine vnesete številčne podatke, dobite funkcijo:

$$y = 500\ \frac{200000}{x} + 25 \cdot 200000 + 30 \cdot \frac{x^2}{2}$$

2. korak

Sedaj pa določite minimum funkcije skupnih stroškov tako, da izračunate odvod:

$$y' = -\frac{500 \cdot 200000}{x^2} + 0 + \frac{30}{2}$$

Pogoj za ekstrem je, da je prvi odvod nič:

$$-\frac{500 \cdot 200000}{x^2} + 0 + \frac{30}{2} = 0$$

Rešite enačbo:

$$-\frac{500 \cdot 200000}{x^2} = -15$$
$$x^2 = -\frac{500 \cdot 200000}{15}$$
$$x = \sqrt{6666666{,}66} = 2582$$

Število letnih naročil: 200000 : 2582 = 77,5 ≈ 78

Letni stroški:

$$y = 500\ \frac{200000}{x} + 25 \cdot 200000 + 30 \cdot \frac{x}{2} = 500\ \frac{200000}{2582} + 25 \cdot 200000 + 30\ \frac{2582}{2} = 5077460$$

Komentar:
Optimalna naročilna količina je cca 2582 ton. Podjetje bo imelo letno cca 78 naročil. Letni minimalni stroški naročanja in skladiščenja pa so cca 5077460 €.

POMNITE Odvod je pomemben pri reševanju tisti problemov, ko je potrebno določiti ekstreme funkcije.

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. Naj bodo prihodki P funkcija transportnih storitev x, merjenih v tkm. Na podlagi empiričnih podatkov o transportnih storitvah in prihodkih ste prišli do naslednje funkcijske povezave: $P(x) = -4x^2 + 1000x + 2000$

Izračunajte tisti obseg transportnih storitev, pri katerih so prihodki maksimalni! Kolikšni so ti prihodki!

[x = 125, P = 64500]

2. Trgovsko podjetje načrtuje , da bo letno prodalo 250 avtomobilov in da bo prodaja med letom enakomerna. Cena enega avtomobila je 10 000 €, stroški zalog (skladiščenje, obresti,...) znašajo 0,01% cene, obdelava nabavnega naročila pa 500 €. Kolikšno naj bo enkratno naročilo, če želite, da bodo letni stroški zalog in obdelave naročil minimalni? Kolikšno je letno število naročil? Kolikšni so minimalni letni stroški zalog in naročanja? Koliko je podjetje prihranilo, če je pred izračunom optimalnega naročila, naročalo po 20 avtomobilov!

[Optimalna naročilna količina 50 avtomobilov; letnih naročil 5: letni minimalni stroški 5000€]

3. Trgovsko podjetje kolesar prodaja gorska kolesa. Pričakuje, da bo celo leto prodalo 700 koles po ceni 200€ in da bo prodaja enakomerna. Stroški skladiščenja znašajo 25% cene na kolo, obdelava enega naročila pa 40€. Izračunajte letne skupne nabavne stroške (naročanja in skladiščenja), če vsakokrat naročite:

a) 10 koles
b) optimalno naročilno količino

[Za 10 koles 3050€; optimalna naročilna količina 34 koles , stroški 1673€]

POVZETEK

Realni problem, v katerem nastopata neodvisna in odvisna spremenljivka lahko zapišete v obliki enačbe. Lahko je to linearna funkcija, kvadratna funkcija ali polinom n-te stopnje. Analiza funkcije obsega proučevanje naslednjih lastnosti funkcij:

- **ali je funkcija rastoča ali padajoča ter na katerem intervalu je rastoča oziroma padajoča;**
- **pri katerih vrednostih neodvisne spremenljivke ima funkcija minimum oziroma maksimum;**
- **pri katerih vrednostih neodvisne spremenljivke ima funkcija vrednost nič.**

Minimum oziroma maksimum ima funkcija pri tistih vrednostih neodvisne spremenljivke, pri katerih je prvi odvod nič.

Ničle funkcije so presečišča grafa funkcije z abscisno osjo. Absciso presečišča določite tako, da rešite enačbo, ki jo dobite, če je vrednost funkcije nič.

3 INTEGRAL

Osnovne računske operacije, ki jih uporabljate pri računanju z realnimi števili, bi lahko združili v tri skupine

- seštevanje in odštevanje;
- množenje in deljenje;
- potenciranje in korenjenje.

Računski operaciji v posamezni skupini sta obratni računski operaciji, kar pomeni, da če ju zapovrstjo uporabite, se število ne spremeni.

Primer:

$\left(\sqrt[12]{1{,}05}\right)^{12} = 1{,}05$ *(primer iz konformnega obračuna obresti)*

V poglavju o analizi funkcij ste se naučili odvajanja funkcij. Matematiki so že v devetnajstem stoletju opredelili tudi tej obratno , ki se imenuje **integriranje.** Gre za iskanje **funkcije,** če poznate njen odvod.

V tem poglavju boste

- **spoznali nekatera pravila za integriranje in se naučili integrirati nekatere elementarne funkcije**
- **uporabo določenega integrala v logistiki.**

3.1 NEDOLOČEN INTEGRAL

Kaj je nedoločen integral?

Če je f(x) odvod funkcije F(x), potem je nedoločen integral f(x) funkcija F(x) + C.

V matematičnem jeziku to zapišete:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Računska operacija, ki je obratna odvajanju, se imenuje **integriranje,** za katero se uporablja znak $\int$. f(x) se imenuje integrand, F(x) + C pa je integral oziroma primitivna funkcija.

Primer:

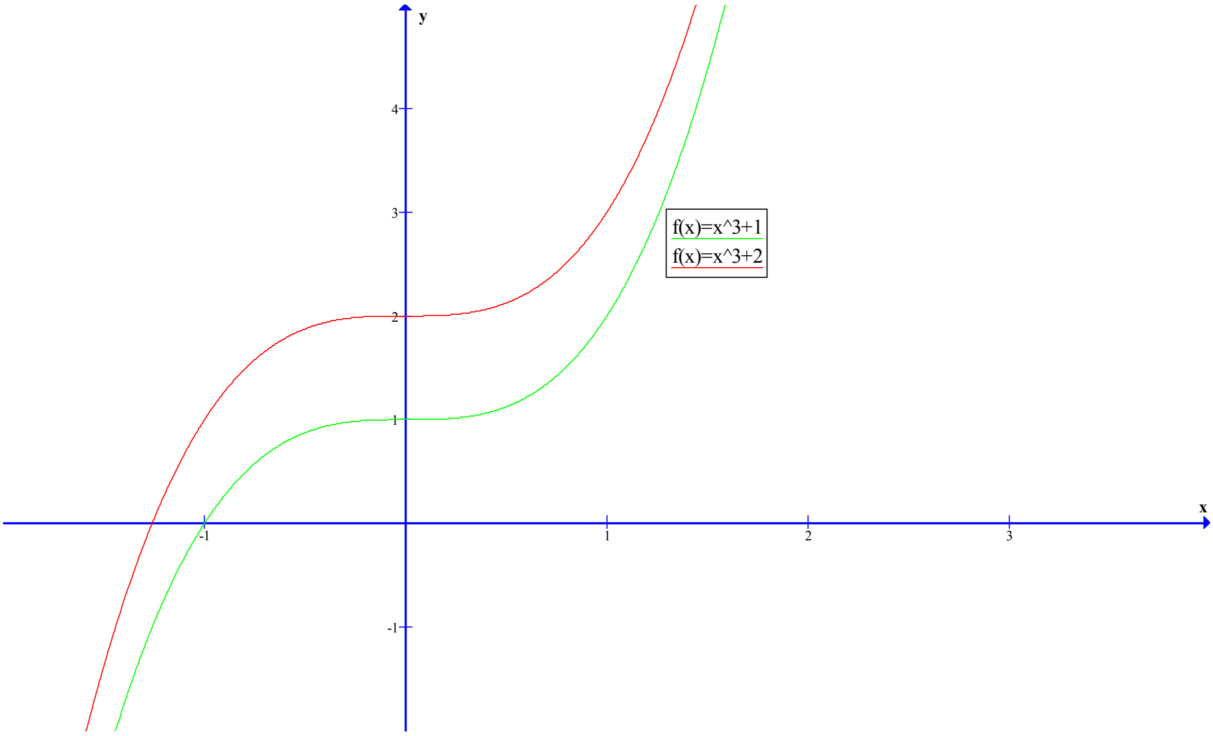
Če je $f(x) = 3x^2$*, potem je nedoločen integral* $F(x) = x^3 + C$. *C je konstanta, torej katerokoli realno število.*

Zakaj?

Če izračunate odvod F(x), dobite:

$$F'(x) = (x^3 + C)' = 3x^2 + 0 = 3x^2$$

Konstanta C se imenuje **aditivna konstanta**, ker jo prištejemo funkciji F. Adicere namreč v latinščini pomeni dodati. Grafa funkcij, ki se razlikujeta le v aditivni konstanti, sta premaknjena v smeri ordinatne osi, kot kaže slika 21.



Slika 21: Grafa funkcij $F(x) = x^3 + 1$ in $F(x) = x^3 + 2$, ki sta integrala funkcije $f(x) = 3x^2$

Ker poznate odvode nekaterih realnih funkcij, lahko zapišete **seznam nedoločenih integralov**, ki ga boste uporabljali pri integriranju, to je določanju primitivne funkcije, če poznate njen odvod.

Primitivna funkcija	**Odvod**	**Integral**	**Primeri**
$F(x) = x + C$ $F(x) = kx + C$	$F'(x) = (x + C)' = 1$ $F'(x) = (kx + C)' = k$	$\int 1dx = \int dx = x + C$ $\int kdx = kx + C$	$\int 3dx = 3x + C$
$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$F'(x) = \left(\frac{x^{n-1}}{n+1} + C\right)' = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

Pri odvajanju funkcije pomnožene s konstanto ste upoštevali naslednje pravilo:

$$(kf)' = kf'$$

Primer:

$$(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$$

Tudi pri integriranju boste enako ravnali. **Konstantni faktor** pred funkcijo, ki jo integrirate, lahko pišete **pred integralski znak**.

V matematičnem jeziku to zapišete:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Primer:

$$\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} = 2x^3$$

Vsoto oziroma razliko funkcij ste odvajali po naslednjem pravilu;

$$(f+g)' = f' + g'$$

Primer:

$$(3x^2 + 2x)' = (3x^2)' + (2x)' = 6x + 2$$

Tudi pri integriranju vsote ali razlike boste postopali na enak način. **Integral vsote je enak vsoti integralov** kar v matematičnem jeziku zapišete**:**

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Primer, ko uporabite vsa navedena pravila za integriranje:

$$\int (3x^2 - 4x + 1)dx =$$

- Uporabite pravilo, da je integral vsote enak vsoti integralov:

$$\int 3x^2dx - \int 4xdx + \int 1dx =$$

- Konstanto pišete pred integralski znak:

$$3\int x^2dx - 4\int xdx + \int dx$$

- Uporabite seznam nedoločenih integralov:

$$3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x + C = x^3 - 2x^2 + x + C$$

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. Izračunajte naslednje integrale:

a) $\int (12x - 3)dx =$ $\quad$ $[\,6x^2 - 3x + C\,]$

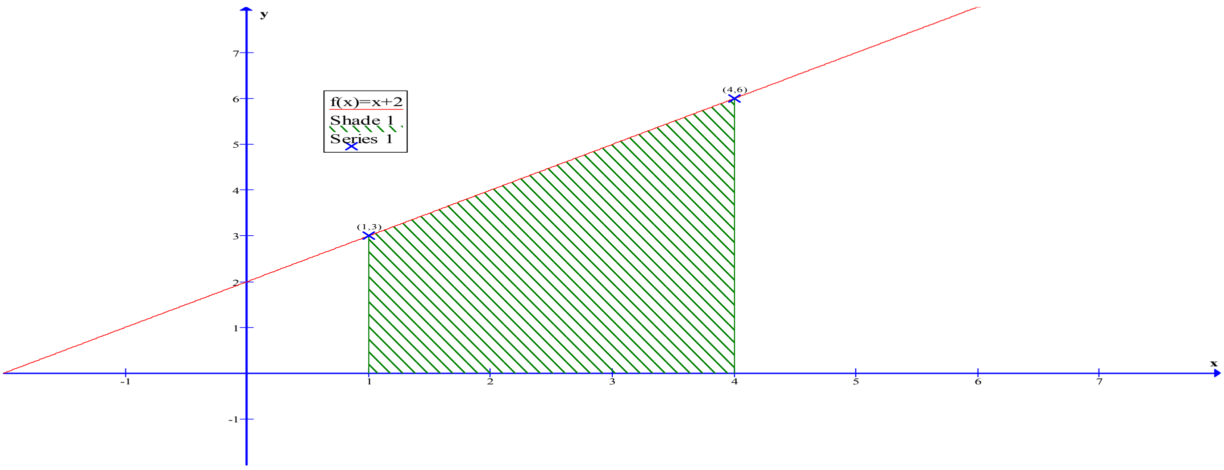
b) $\int(4x^2 - 2x + 5)dx$ $\qquad [\frac{4}{3}x^3 - x^2 + 5x + C]$

2. Zapišite predpis za funkcijo, če je njen odvod 2x in ima ničli $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

$[F(x) = x^2 - 1]$

3.2 DOLOČENI INTEGRAL

V osnovni in srednji šoli ste računali ploščine ravninskih likov kot so trikotniki, štirikotniki,… Omejevale so jih ravne črte – stranice. Tak primer je črtkan lik na sliki 22, ki ga premica y = x + 2 omejuje z abscisno osjo na intervalu [1, 4].



Slika 22: Ploščina lika med grafom funkcije y = x + 2 in abscisno osjo na intervalu [1, 4]

To je trapez, katerega ploščino izračunate tako, da polovično vsoto osnovnic pomnožite z višino, to je razdaljo med osnovnicama. Dimenzije lahko odčitate s slike

$$\text{Ploščina} = \frac{6+3}{2} \cdot 3 = 13{,}5$$

Ploščina pa je tudi definirana kot **določen integral** funkcije y = x+2 na intervalu [1,4], kar v matematičnem jeziku zapišete:

$$\text{Ploščina} = \int_1^4 (x+2)dx$$

Vrednost določenega integrala pa izračunate tako, da

- določite primitivno funkcijo, torej nedoločen integral
- od vrednosti primitivne funkcije pri zgornji meji intervala odštejete v vrednost pri spodnji meji intervala.

$$\text{Primitivna funkcija: } \int(x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x$$

Vrednost pri 4: $\frac{4^2}{2} + 2 \cdot 4 = 16$

Vrednost pri 1: $\frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 = 2{,}5$

Razlika: 16 – 2,5 = 13,5

Ploščina, ki ste jo izračunali z uporabo že znanega obrazca za ploščino trapeza je enaka ploščini, ki ste jo izračunali z uporabo določenega integrala.

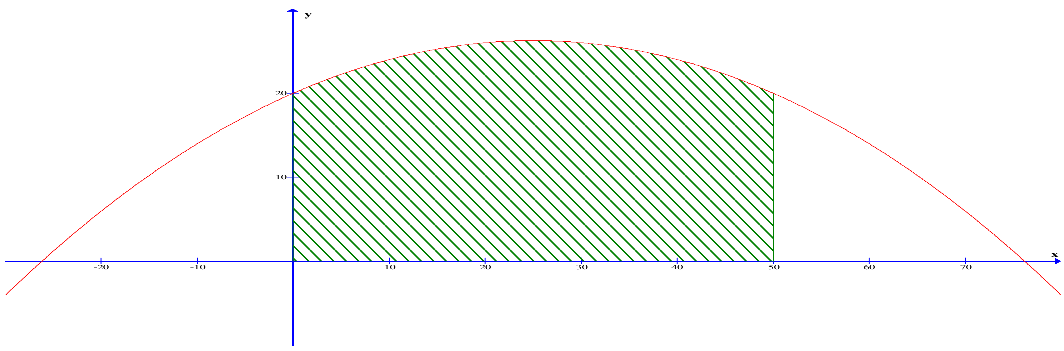
POMNITE:
Določen integral na intervalu [a,b] je razlika vrednosti integralov v mejnih točkah intervala.
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ in je enak ploščini lika, ki ga funkcija f(x) oklepa z abscisno osjo.

3.3 UPORABA DOLOČENEGA INTEGRALA

To, da je določen integral enak ploščini lika, ki ga graf oklepa z abscisno osjo, je pomembno za uporabo integrala pri reševanju raznovrstnih problemov v zvezi z računanjem ploščin in prostornin.

Primeri iz logistike

Na sliki 23 je prečni prerez skladišča, ki je dolgo 100 m. Streha je usločena in sicer je strešni lok graf funkcije $y = -0{,}01x^2 + 0{,}5x + 20$. *Kolikšna je prostornina skladišča?Dimenzije so v metrih.*



Slika 23: Prečni prerez skladišča

Skladišče smatrate za prizmo, katere osnovna ploskev je črtkan lik, višina pa dolžina skladišča. Prostornino izračunate tako, da osnovno ploskev pomnožite z dolžino.

Pri izračunu ploščine osnovne ploskve pa uporabite integral. Ploščina je enaka določenemu integralu na intervalu [0, 50].

$$\int_0^{50} \left(-0{,}01x^2 + 0{,}5x + 20\right)dx =$$

$$\int\left(-0{,}01x^{2}+0{,}5x+20\right)dx=-0{,}01\,\frac{x^{3}}{3}+0{,}5\,\frac{x^{2}}{2}+20\,x$$

Prečni presek na intervalu [0, 50]:

$$-0{,}01\,\frac{50^{2}}{3}+0{,}5\,\frac{50^{2}}{2}+20\cdot 50=-8{,}3+625+1000=1616{,}7$$

Prečni presek je 1616,7 m^2

Prostornina skladišča:

$$1616m^{2}\cdot 100m=161600m^{3}$$

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

Na spletni strani www.e-um.si je v interaktivnem gradivu za 4. letnik gimnazije več tem o integralu Če žleite poglobiti znanje s tega področja, lahko predelate vse teme. Za praktično uporabo pa je zanimiva tema Ploščina krivočrtnih likov.

POVZETEK

Integral je primitivna funkcija, katere odvod je enak integrandu. Določanje primitivne funkcije se imenuje integriranje. To zapišete s simboli: $\int f(x)dx = F(x)$, če je $F'(x) = f(x)$

V praksi je pomembno računanje vrednosti določenega integrala, ker je vrednost določenega integrala na intervalu [a, b] enaka ploščini lika, ki ga funkcija na tem intervalu oklepa z abscisno osjo. To s simboli zapišete: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

4 SISTEMI LINEARNIH ENAČB

V prvem poglavju ste uporabili enačbe za reševanje problemov, kjer je nastopala le ena neznanka. So pa tudi taki, kjer je lahko več neznank. V osnovni šoli ste se že spopadli z reševanjem sistemov dveh linearnih enačb z dvema neznankama. To boste v tem poglavju obnovili. Spoznali pa boste

- **Gaussovo metodo eliminacije, ki je ena izmed metod za reševanje sistema linearnih enačb z več neznankami in njeno uporabo na področju logistike.**

4.1 SISTEM DVEH LINEARNIH ENAČB Z DVEMA NEZNANKAMA

Primer:

Dva tovornjaka vozita zemljo. Če prvi opravi 3 vožnje in drugi 4, prepeljeta skupaj 93 m^3 zemlje. Če pa prvi tovornjak opravi 5 voženj in drugi 3, prepeljeta skupaj 111 m^3. Količina tovora, ki jo smete naložiti, je enaka nosilnosti tovornjaka. Kolikšna je nosilnost posameznega tovornjaka?

1. Določite neznanke:

Nosilnost 1. tovornjaka: x_1
Nosilnost 2. tovornjaka: x_2

2. Zapišete linearni enačbi, ki določata količino prepeljanega materiala:

Količina prepeljanega materiala v prvem primeru $3x_1 + 4x_2 = 93$
Količina prepeljanega materiala v drugem primeru $5x_1 + 3x_2 = 11$

3. Izračunate x_1 in x_2

a) Metoda nasprotnih koeficientov:

$$3x_1 + 4x_2 = 93 \quad /\cdot 5$$
$$5x_1 + 3x_2 = 111 \quad /\cdot(-3)$$

$$15x_1 + 20x_2 = 93 \qquad \textit{Enačbi seštejete}$$
$$-15x_1 - 9x_2 = 111$$

$$-11x_2 = 132$$
$$x_2 = 12 \qquad \textit{Vstavite v prvo enačbo: } 3x_1 + 4 \cdot 12 = 93$$
$$x_1 = 12$$

b) Metoda substitucije

Iz ene (npr. druge) izrazite eno neznanko (npr. x_2) *in vnesete v drugo enačbo (v prvo).*

$$5x_1 + 3x_2 = 111 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{5x_1}{3} - 27$$

$$3x_1 + 4\left(\frac{5x_1}{3} - 27\right) = 93 \quad \rightarrow \quad x_1 = 15$$

4.2 SISTEM VEČ LINEARNIH ENAČB

Primer:

Trije tovornjaki vozijo zemljo. Prevoznik ima tri naročila. Organizator transporta je pripravil načrt voženj:
1. prvi opravi 3 vožnje, drugi 2,tretji 1, skupaj prepeljejo 150 m3 zemlje.
2. prvi opravi 2 vožnji, drugi 3, tretji 1, skupaj prepeljejo 155 m^3
3. prvi opravi 1 vožnjo, drugi 2, tretji 2, skupaj prepeljejo 115 m^3

Kolikšna je nosilnost posameznih tovornjakov?

1. Tako kot v prejšnjem primeru določite neznanke in zapišete enačbe. Neznanke so nosilnosti posameznih tovornjakov.

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 150$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 155$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 115$

2. Izračunate vrednost neznank

Ena izmed metod reševanja takšnega sistema je **Gaussova metoda eliminacije**. Reševanje poteka po naslednjem modelu:

Sistem zapišete v matrični obliki.

Matrika je pravokotna shema **m · n** elementov, ki so razporejeni v **m** vrstic in **n** stolpcev. Označujemo jo z veliko tiskano črko in zapišemo v naslednji obliki:

Primer zapisa matrik linearnega sistema, ki ga rešujete:

a) matrika koeficientov *b) matrika spremenljivk* *c) matrika desne strani*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 150 \\ 155 \\ 115 \end{pmatrix}$$

Zapisana matrika A ima 9 elementov, ki so razporejeni v 3 vrstice in 3 stolpce. Elementi so **koeficienti sistema linearnih enačb.** Matrika X je matrika spremenljivk, matrika B pa konstant.

Naslednji zapis je zapis linearnega sistema v matrični obliki:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 155 \\ 115 \end{pmatrix}$$

Za reševanje sistema pa uporabljate zapis v obliki razširjene matrike, ki ima naslednjo obliko:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 150 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 155 \\ 1 & 2 & 2 & \vdots & 115 \end{pmatrix}$$

Razširjeno matriko z matričnimi transformacijami pretvorite v zgornje trikotno obliko, kar pomeni, da morajo biti koeficienti pod glavno diagonalo enaki 0.

V primeru, ki ga rešujete, morate dobiti naslednjo zgornje trikotno obliko matrike koeficientov:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \vdots & * \\ 0 & * & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & * & \vdots & * \end{pmatrix}$$

Pri transformacijah smete:

- **zamenjati med seboj poljubni vrstici,**
- **pomnožiti vrstico s poljubnim realnim številom, različnim od 0,**
- **vrstici prišteti večkratnik poljubne druge vrstice.**

Uporabite ta pravila na primeru tako, da boste matriko transformirali v zgornje trikotno obliko.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 150 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 155 \\ 1 & 2 & 2 & \vdots & 115 \end{pmatrix}$$

Ker morate dobiti v prvem stolpcu koeficiente 0 v drugi in tretji vrstici, boste
- prvo pomnožiti z 2 in drugo z (-3) ter ju sešteli
- tretjo pomnožili z -3 in ji prišteli prvo

Dobite:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 150 \\ 0 & -5 & -1 & \vdots & -165 \\ 0 & -4 & -5 & \vdots & -195 \end{pmatrix}$$

Še 2. koeficient v tretji vrstici mora biti 0. Če 2. vrstico pomnožite s 4, tretjo s -5 ter ju seštejete, dobite

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 150 \\ 0 & -5 & -1 & \vdots & -165 \\ 0 & 0 & 21 & \vdots & 315 \end{pmatrix}$$

Prvotni sistem linearnih enačb ste pretvorili v ekvivalentni, ki vam omogoča izračun neznank.

Iz zadnje vrstice:

$21x_3 = 315 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_3 = 15}$

Iz druge vrstice:

$-5x_2 - x_3 = -165 \quad \rightarrow \quad -5x_2 - 15 = -165 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_2 = 30}$

Iz prve vrstice

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 150 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 2 \cdot 30 + 15 = 150 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_1 = 25}$

Sistem linearnih enačb, ki ste ga rešili, je imel eno rešitev, kar pomeni da zapisane enakosti veljajo, če so vrednosti spremenljivk $\mathbf{x_1 = 25}$ (nosilnost 1. tovornjaka), $\mathbf{x_2 = 30}$ (nosilnost 2. tovornjaka), $\mathbf{x_3 = 15}$ (nosilnost 3. tovornjaka).

Sistem linearnih enačb pa ima lahko več rešitev, ali pa sploh nima rešitve.

Primer, ko ima sistem več rešitev:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

Iz zadnje enačbe dobite:

$$-6x_3 - 6x_4 = -2$$

Ta enačba ima neskončno rešitev. Te dobite, če za x_4 izbirate poljubna realna števila. Če izbrano število označite z **a**, je rešitev sistema naslednja:

$$x_4 = a$$

$$-6x^3 - 6a = -2\,;\; x_3 = \frac{-2+6a}{-6} = \frac{1-3a}{3}$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \;;\; x_2 = 3 - 3a - \frac{2}{3}(1-3a) = \frac{7+3a}{3}$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1;\ x_1 = \frac{1 - a - (1 - 3a) + \frac{7 + 3a}{6}}{2} = \frac{7 + 3a}{6}$$

Če za a izberete 0, dobite **bazno rešitev**. Za katerekoli druge vrednosti za a pa posebne rešitve.

Bazna rešitev sistema je torej:

$x_4 = 0$

$x_3 = \frac{1-3a}{3} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{7-3a}{3} = \frac{7}{3}$

$x_1 = \frac{7+3a}{6} = \frac{7}{6}$

Primer, ko sistem nima rešitve:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots 5 \\ 2 & 2 & -3 & \vdots 2 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots\ 5 \\ 0 & 4 & -5 & \vdots -8 \\ 0 & 4 & -5 & \vdots -9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots\ 1 \\ 0 & 1 & -5 & \vdots\ 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots -2 \end{pmatrix}$$

Ker $0 \cdot x_3 \neq -2$, sistem nima rešitve.

POMNITE

Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama rešujete z metodo nasprotnih koeficientov ali z metodo substitucije.

Sistem linearnih enačb z več neznankami rešujete tako, da sistem zapišete v obliki razširjene matrike in jo z matričnimi transformacijami pretvorite v zgornje trikotno obliko.

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$
   $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$
   $4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3$ [$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$]

2. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

[$x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{4}{5}$]

3. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 &= 22 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 24 \end{aligned}$$

[$x_1 = 5a - 9$, $x_2 = 2a + 7$, $x_3 = 2a - 5$, $x_4 = a$]

4. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

[sistem ni rešljiv]

5. V skladišču pakirate 3 vrste darilnih paketov, ki jih sestavljate iz treh različni artiklov: A, B, C in sicer vsebuje:
- prvi paket : 2A, 4B in 2C
- drugi paket: A in 3B
- tretji paket: 3A + 2B + C

Na zalogi imate 600 kosov artikla A, 1150 kosov artikla B in 350 kosov artikla C. Koliko posameznih vrst darilnih paketov boste lahko sestavili, da boste porabili vse zaloge?

Priporočam vam, da najprej sestavite tabelo, ki bo podlaga za zapis problema kot sistema linearnih enačb!

[150, 150, 50]

POVZETEK

Pri reševanju realni problemov, kjer nastopa več neznank in lahko odnose zapišete v obliki enačb z več neznankami, lahko pri iskanju vrednosti neznank uporabite Gaussovo metodo eliminacije. Sistem linearnih enačb zapišete v obliki razširjene matrike, ki jo transformirate v zgornjo trikotno obliko. Tako dobite ekvivalentni sistem linearnih enačb, ki vam omogoča izračun neznank.

5 LINEARNO PROGRAMIRANJE

Hud konkurenčni boj na globalnem trgu sili podjetja, da iščejo optimalne rešitve problemov na področju upravljanja poslovnih sistemov. Tako so v drugi polovici prejšnjega stoletja postala pomembna matematična znanja, ki pomagajo pri reševanju optimizacijskih problemov. Praktična uporaba matematičnih modelov pa je zaživela šele, ko so bila razvita ustrezna računalniška orodja.

Obstaja več modelov, kako rešiti optimizacijske probleme, odvisno od števila neodvisnih spremenljivk in omejitev. Z modelom optimalne naročilne količine ste se že seznanili. Iskali ste minimalne stroške, ki so bili odvisni od ene spremenljivke, to je naročilne količine (glej podpoglavje 2.5). Če pa je optimalna rešitev ekstrem (maksimum, minimum) linearna funkcija več spremenljivk z določenimi omejitvenimi pogoji, se postopki, ki jih je matematika razvila, imenujejo *linearno programiranje.*

Hvala (2005, 7) opredeljuje *linearno programiranje* kot iskanje pogojnega ekstrema linearne funkcije pri pogojih v obliki linearnih neenačb oziroma enačb.

Splošna oblika linearnega problema je takšna (Hvala, 2005, 7):

Poišči minimum (maksimum) funkcije

$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

pri pogojih

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m
\end{aligned}
$$

Leva stran neenačb je lahko tudi ≥ od desne strani.

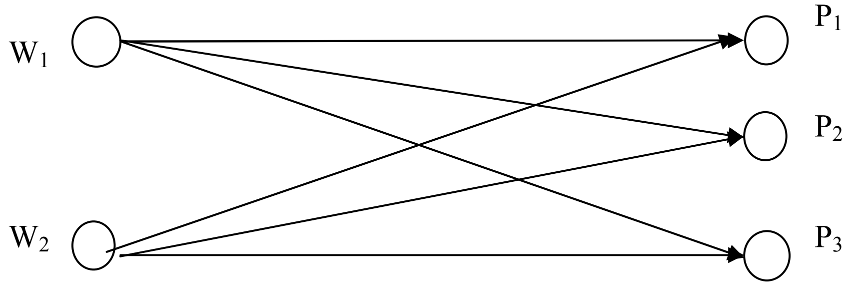
V tem poglavju se boste seznanili z

- **oblikovanjem konkretnega linearnega problema s področja logistike in**
- **uporabo metod ter orodij za reševanje.**

5.1 OPREDELITEV CILJNE FUNKCIJE IN OMEJITVENIH ENAČB

Klasičen transportni problem, ki ga rešujete z metodami linearnega programiranja, je naslednji:

Razvoziti morate določene količine materiala (izdelkov) od ponudnikov (izvorov) do porabnikov (ponorov) tega materiala (izdelkov). Na sliki 24 je prikazan transport od dveh ponudnikov do treh porabnikov



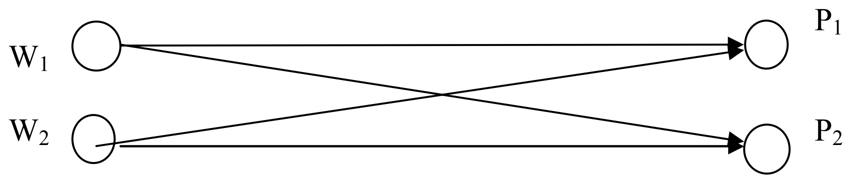
Slika 24: Grafični prikaz transportnega problema

Količine ponudbe in količine porabe so omejene. Če je ponudba enaka porabi, je problem uravnotežen. Ob znanih stroških na enoto materiala (izdelka) od posameznega ponudnika do posameznega porabnika je potrebno razvoz tako organizirati, da bodo **skupni prevozni stroški minimalni.**

Metoda reševanja je odvisna od števila ponudnikov in porabnikov.

Primer (2 izvora, 2 ponora):

Gradbeno podjetje ima na dveh različnih lokacijah betonarni, ki proizvedeta 400 in 300 ton betona dnevno in oskrbujeta dve gradbišči. Na prvem potrebujejo dnevno 200 ton, na drugem pa 500 ton. Stroški prevoza na tono (€/t) materiala so v tabeli 4. Različni so, ker se upoštevajo različne razdalje. Kolikšne naj bodo transportne količine na posameznih relacijah, da bodo stroški prevoza minimalni?



Problem boste rešili z uporabo:

- GRAFIČNE METODE ali
- SIMPLEKS metode.

Grafična je primerna le, če imate 4 subjekte: 2 izvora in dva ponora.

Ne glede na metodo pa morate najprej določiti

- enačbo funkcije stroškov na vseh relacijah, to je enačbo po kateri izračunate skupne stroške;
- omejitvene enačbe oziroma neenačbe, ki izražajo odnose med kapacitetami in potrebami.

V tabeli 4 so podatki o kapacitetah betonarn in potreb gradbišč. V tabeli so tudi vpisani podatki o stroških na tono na posameznih relacijah. Ti so različni, ker se smatra, da so razdalje od betonarn do gradbišč različne:

- Od W_1 do P_1 30 €/t
- Od W_1 do P_2 20 €/t

- Od W_2 do P_1 10 €/t
- Od W_2 do P_2 30 €/t

Tabela 4: Podatki o razvozu betona

	P_1	P_2	
W_1	30	20	
	x_1	**x_2**	400
W_2	10	30	
	x_3	**x_4**	300
	200	500	

Neznanke so **količine na posameznih relacijah:**

- **x_1** od betonarne W_1 do gradbišča P_1
- **x_2** od betonarne W_1 do gradbišča P_2
- **x_3** od betonarne W_2 do gradbišča P_1
- **x_4** od betonarne W_2 do gradbišča P_2

Zapišete funkcijo celotnih stroškov, ki se imenuje **ciljna ali namenska funkcija.**

Stroški so odvisni od **količin** na posameznih relacijah (x_1, x_2, x_3, x_4) in stroškov prevoza na enoto na posamezni relaciji. Izračunate jih tako, da stroške na enoto pomnožite s količino.

- od betonarne W_1 do gradbišča P_1: **30 x_1**
- od betonarne W_1 do gradbišča P_2: **20 x_2**
- od betonarne W_2 do gradbišča P_1: **10 x_3**
- od betonarne W_2 do gradbišča P_2: **30 x_4**

Skupni stroški so enaki vsoti stroškov na posameznih relacijah, kar zapišete:

$S_{min} = 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4$

Razpoložljive kapacitete betonarn in potrebe gradbišč so omejene. Iz prve betonarne lahko odpeljete največ 400 ton, iz druge največ 300; na prvo gradbišče največ 200, na drugo največ 500. To zapišete z **omejitvenimi neenačbami** (enačbami):

$x_1 + x_2 \leq 400$
$x_3 + x_4 \leq 300$
$x_1 + x_3 \leq 200$
$x_2 + x_4 \leq 500$

Rešitve so tiste vrednosti neznank, pri katerih so skupni stroški minimalni. Iščete torej minimum ciljne funkcije

$S_{min} = 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4$

Vrednosti neznank pa so lahko le pozitivna števila, saj gre za realne probleme, pri katerih so smiselne le tiste vrednosti v množici realnih števil, ki niso negativne. Torej

$x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $x_4 > 0$

Kot je že bilo omenjeno, lahko uporabite za določitev vrednosti neznank grafično metodo ali simpleks metodo.

5.2 GRAFIČNA METODA

Z grafično metodo v pravokotnem koordinatnem z abscisno osjo x_1 (doslej ste uporabljali x) in ordinatno osjo x_2 (doslej ste uporabljali y), poiščete koordinati tiste točke, pri katerih je vrednost ciljne funkcije najmanjša. KAKO?

Najprej v ciljno funkcijo vnesete za $x_3 = 200 – x_1$ in za $x_4 = 500 – x_2$ (tabela 5), zato da dobite ciljno funkcijo le z dvema spremenljivkama $\mathbf{x_1}$ in $\mathbf{x_2}$.

Tabela 5: Odnosi med neznankami

	P_1	P_2	
W_1	30	20	
	x_1	$x_2 = 400 - x_1$	400
W_2	10	30	
	$x_3 = 200 - x_1$	$x_4 = 500 - x_2$	300
	200	500	

$S_{min} = 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4$
$S_{min} = 30x_1 + 20x_2 + 10\,(200 – x_1) + 30\,(500 – x_2)$

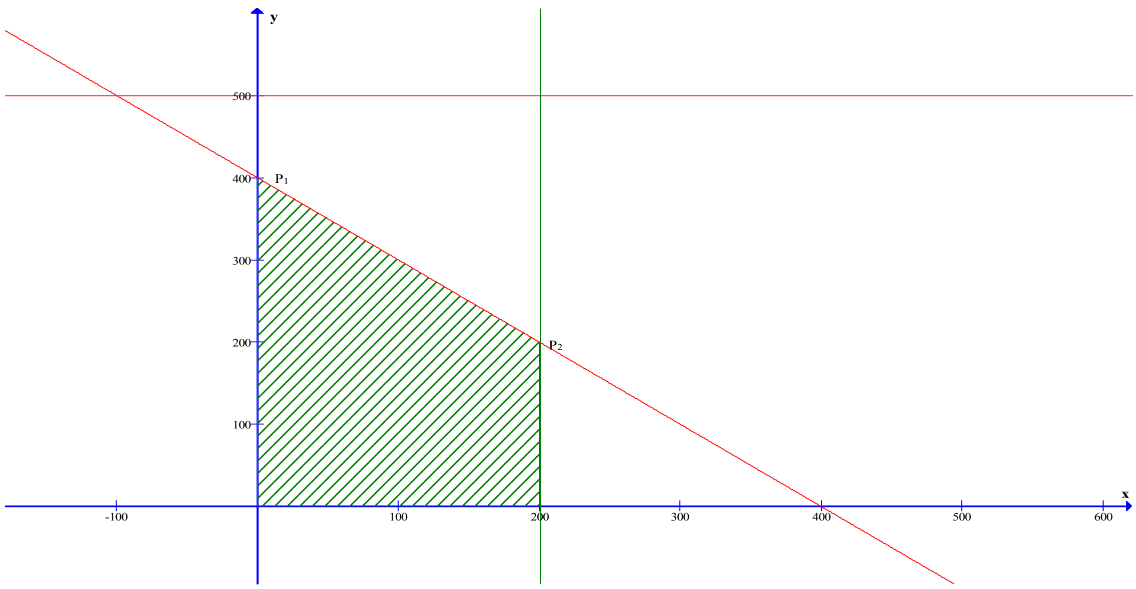
Pomnožite in seštejte! Dobite ciljno funkcijo, ki je odvisna le od dveh spremenljivk:

$S_{min} = 20x_1 + 10x_2 + 17000$

V pravokotnem koordinatnem sistemi določite del ravnine, v katerih so točke, ki zadoščajo omejitvenim neenačbam in pogoju nenegativnosti.

$x_1 + x_2 \leq 400 \quad \rightarrow \quad x_2 \leq 400 – x_1$
$x_3 + x_4 \leq 300$
$x_1 + x_3 \leq 200 \quad \rightarrow \quad x_3 > 0$ če je $x_1 \leq 200$
$x_2 + x_4 \leq 500 \quad \rightarrow \quad x_4 > 0$ če je $x_2 \leq 500$

Ta del ravnine omejujejo premice $x_2 = 400 – x_1$; $x_1 = 200$; $x_2 = 500$



Slika 25: Grafična rešitev transportnega problema

Vrednosti, ki zadoščajo pogoju nenegativnosti in neenačbam so v črtkanem četverokotniku. Katera pa je tista točka, kjer je funkcijska vrednost najmanjša?

Izračunate vrednost ciljne funkcije v presečiščih

P_1 (0,400), P_2 (200,200)

$S\,(0{,}400) = 20x_1 - 10x_2 + 17000 = 20 \cdot 0 - 10 \cdot 400 + 17000 = 13000$ MINIMUM

$S\,(200{,}200) = 20x_1 - 10x_2 + 17000 = 20 \cdot 200 - 10 \cdot 200 + 17000 = 19000$

Koordinati točke, v kateri je vrednost ciljne funkcije najmanjša, sta tisti vrednosti spremenljivk $x_1 = 0$ in $x_2 = 400$, pri katerih so stroški minimalni.

Izračunate še ostali spremenljivki

$x_3 = \mathbf{200 - x_1} = 200 - 0 = 200$
$x_4 = \mathbf{500 - x_2} = 500 - 400 = 100$

Komentar:
Stroški prevoza so najmanjši, če bo prva betonarna oskrbovala le drugo gradbišče s 400 tonami, druga prvo z 200 tonami, drugo pa s 100 tonami.
Pri taki razporeditvi so stroški prevoza 13.000€.

POMNITE:

Postopek reševanja transportnega problema z grafično metodo:
- Zapis problem v obliki tabele
- Zapis ciljne funkcije
- Zapis omejitvenih enačb
- Grafi omejitvenih enačb
- Izračun vrednosti ciljne funkcije v presečiščih
- Izračun še ostalih neznank (spremenljivk).

Metodo lahko uporabite tudi na drugih področjih. Naslednji primer je s področja načrtovanja optimalnega proizvodnega programa, ki zagotavlja maksimalni prihodek.

V podjetju izdelujejo dve vrsti izdelkov na dveh različnih strojih:
- A stroj potrebuje za izdelek P_1 2 uri, za P_2 3 ure
- B stroj potrebuje za izdelek P_1 4 ure, za P_2 2 uri

Koliko izdelkov posamezne vrste naj naredijo na teden (40 delovnih ur), da bo iztržek pri ceni 4.d.e. za P_1 in 3 d.e. za P_2 maksimalen?

Tabela 6: Tabelarni zapis podatkov linearnega proizvodnega problema

	P_1	P_2	Ur/teden
A	**2**	**3**	**40**
B	**4**	**2**	**40**
cena	4	3	
Proizvedena količin	X_1	X_2	

- Ciljna funkcija

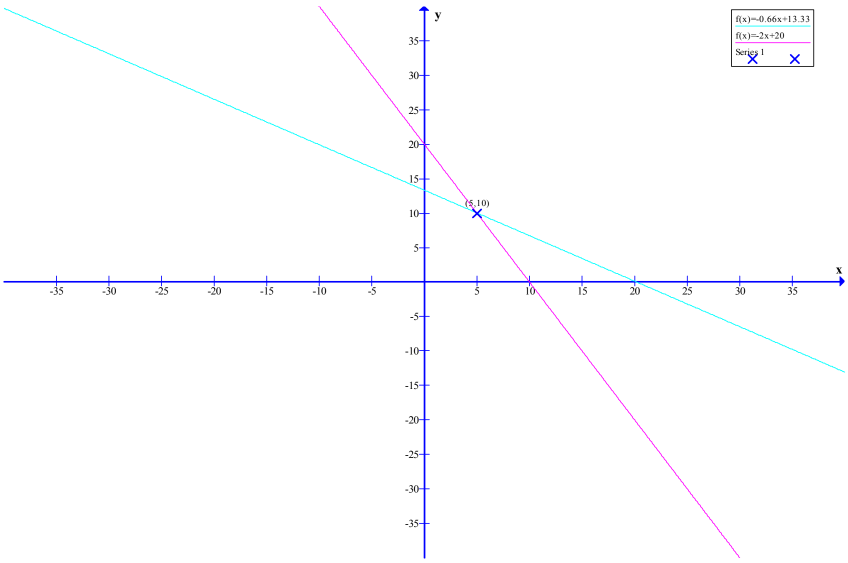
Maksimalni prihodek: $S_{max} = 4x_1 + 3x_2$

- Omejitveni neenačbi:

1) $2x_1 + 3x_2 \leq 40$ V eksplicitni obliki: $x_2 \leq -\frac{2}{3}x_1 + \frac{40}{3}$

2) $4x_1 + 2x_2 \leq 40$ V eksplicitni obliki: $x_2 \leq -2x_1 + 20$

Narišete grafa linearni funkcij.



Slika 26: Grafična rešitev proizvodnega problema

Izračunate vrednost ciljne funkcije v presečiščih.

$P(10,0) = 4x_1 + 3x_2 = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = 40$

$P(0,40/3) = 4x_1 + 3x_2 = 4 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{40}{3} = 40$

$P(5,10) = 4x_1 + 3x_2 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 50$ - iztržek maksimalen

Komentar:
Podjetje bo doseglo maksimalen prihodek, če bo na teden na vsakem stroju proizvedlo 5 prvih in 10 drugih proizvodov.

5.3 SIMPLEKS METODA

Grafična metoda je neprimerna za reševanje problemov, ko nastopa več subjektov. Ob velikem številu spremenljivk in enačb so izračuni dolgi, zato se ta metoda ni uveljavila v praksi dokler se niso začeli uporabljati računalniški programi. Leta 1952 je bil izdelan prvi računalniški program po **simpleks** metodi, ki jo je razvil matematik Dantzig iz ZDA. Danes programska orodja omogočajo reševanje matematičnih modelov, ki obsegajo preko 200000 spremenljivk in omejitev.

Da bi lahko uporabili ta orodja, je potrebno, tako kot pri grafičnem reševanju, najprej določiti

- ciljno funkcijo in
- omejitvene enačbe (neenačbe).

Sledi uporaba enega izmed računalniških orodij, ki zahtevajo vnos števila spremenljivk (neznank), števila omejitvenih neenačb, koeficientov ciljne funkcije ter koeficientov in konstant omejitvenih enačb oziroma neenačb. Program po simpleks metodi izvede potrebne transformacije matrik omejitvenih neenačb in poda optimalno rešitve za spremenljivke ter vrednost ciljne funkcije.

Primer:

Iz skladišč W_1, W_2, W_3 želite razvoziti material do kupcev P_1, P_2, P_3. Prvo skladišče ima na zalogi 150 transportnih enot, drugo 240 in tretje 200. Prvi kupec je naročil 100 transportnih enot, drugi 350, tretji 140. Transportni stroški na enoto od posameznega skladišča do posameznega kupca so podani v tabeli 7. Kako boste organizirali razvoz, da bodo stroški najmanjši? Koliko znašajo minimalni skupni stroški

Tabela 7: Podatki o razvozu materialov

	P_1	P_2	P_3	
W_1	20	25	15	150
	x_1	x_2	x_3	
W_2	30	28	20	240
	x_4	x_5	x_6	
W_3	15	40	40	200
	x_7	x_8	x_9	
	100	350	140	

Ciljna funkcija:

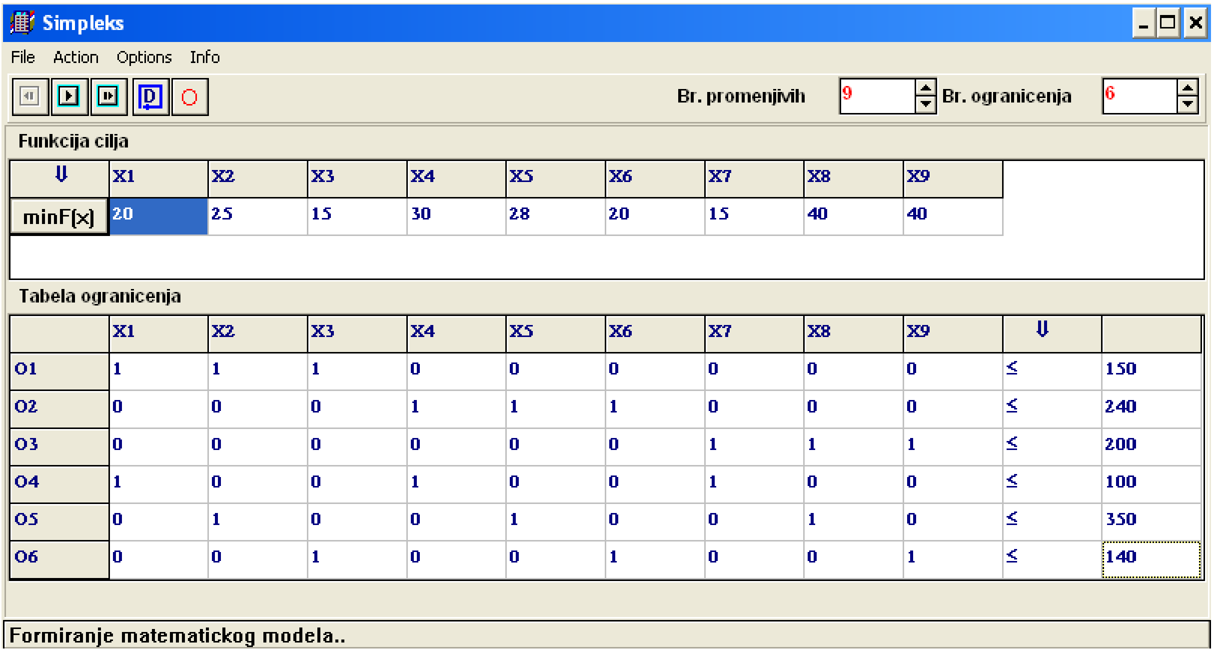
$$S_{min} = 20\,x_1 + 25x_2 + 15x_3 + 30\,x_4 + 28x_5 + 20x_6 + 15\,x_7 + 40x_8 + 40x_9$$

Omejitve:

$$\begin{array}{lllllllll l}
x_1 + x_2 + x_3 & & & & & & & & & \le 150 \\
& & & x_4 + x_5 + x_6 & & & & & & \le 240 \\
& & & & & & x_7 + x_8 + x_9 & & & \le 200 \\
x_1 & + & & x_4 & + & & x_7 & & & \le 100 \\
& x_2 & + & & x_5 & + & & x_8 & & \le 350 \\
& & x_3 & + & & x_6 & + & & x_9 & \le 140
\end{array}$$

Uporabite enega izmed računalniških programov, ki zahteva vnos:

- števila spremenljivk (9),
- števila omejitvenih neenačb (6),
- koeficienta ciljne funkcije: 20, 25, 15, 30, 28, 20, 15, 40, 40
- koeficienta ter konstant omejitvenih neenačb kot prikazuje spodnja slika:



⇓	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
minF(x)	20	25	15	30	28	20	15	40	40

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	⇓	
O1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	≤	150
O2	0	0	0	1	1	1	0	0	0	≤	240
O3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	≤	200
O4	1	0	0	1	0	0	1	0	0	≤	100
O5	0	1	0	0	1	0	0	1	0	≤	350
O6	0	0	1	0	0	1	0	0	1	≤	140

Izberete minimum funkcije in aktivirate program. Dobite optimalno rešitev:

$x_2 = 10$, $x_3 = 140$, $x_5 = 240$, $x_7 = 100$, $x_8 = 100$. Ostale spremenljivke, ki niso izpisane, imajo vrednost 0.

Če vrednosti spremenljivk vnesete v ciljno funkcijo, dobite skupne minimalne prevozne stroške.

$S_{min} = 20x_1 + 25x_2 + 15x_3 + 30x_4 + 28x_5 + 20x_6 + 15x_7 + 40x_8 + 40x_9$

$S_{min} = 20 \cdot 0 + 25 \cdot 10 + 15 \cdot 140 + 30 \cdot 0 + 28 \cdot 240 + 20 \cdot 0 + 15 \cdot 100 + 40 \cdot 100 + 40 \cdot 0$

$S_{min} = 250 + 2100 + 6720 + 1500 + 4000 = \mathbf{14570}$

Kako pa bi postopali, če bi iskali maksimum ciljne funkcije?

Primer:

Letalski prevoznik ima dve vrsti letal in sicer 7 letal tipa A in 13 letal tipa B. Letala razporeja na tri linije in sicer so potrebe po letih na posameznih linijah naslednje: na prvi 2 leta, na drugi 10 letov in na tretji 8 letov. Podatki o dobičku na let so podani v tabeli 8
Kako razporedi letala, da bo dosegel največji prihodek? Kolikšen je MAKSIMALNI prihodek?

Tabela 8: Podatki za linijske prevoze letal

	1. LINIJA	2. LINIJA	3. LINIJA	
A	100	110	90	7
	x_1	x_2	x_3	
B	80	80	120	13
	x_4	x_5	x_6	
	2	10	8	

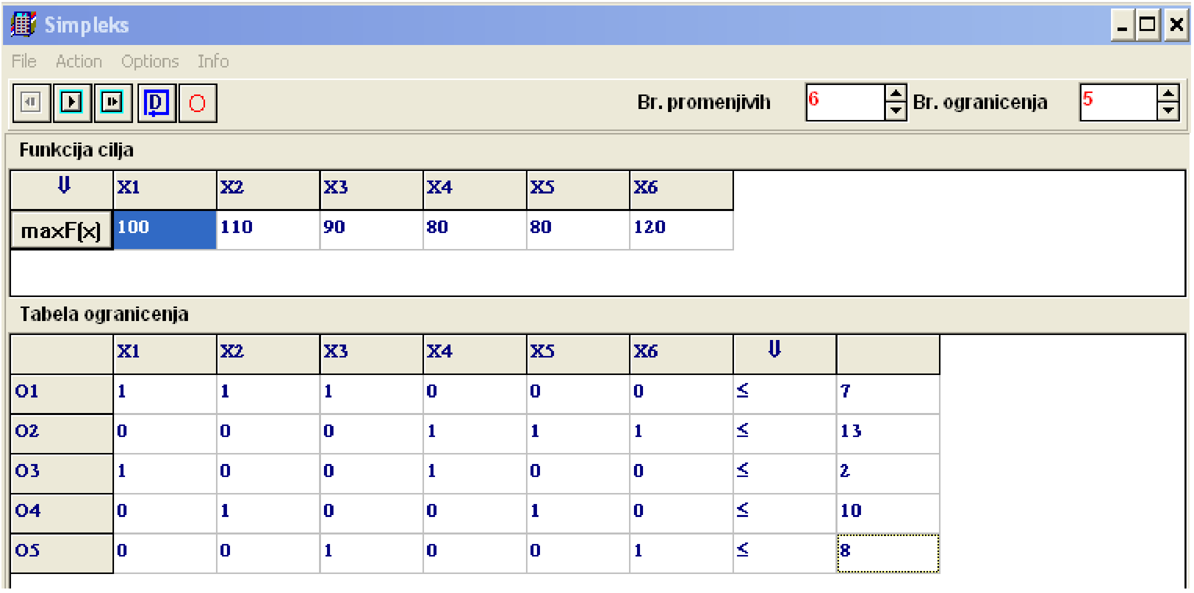
Ciljna funkcija:

$S_{max} = 100x_1 + 110x_2 + 90x_3 + 80x_4 + 80x_5 + 120x_6$

Omejitve:

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 + x_2 + x_3 & & & & & & \leq & 7 \\
 & & & x_4 + x_5 + x_6 & & & \leq & 13 \\
x_1 & + & & x_4 & & & \leq & 2 \\
 & x_2 & + & & x_5 & & \leq & 10 \\
 & & x_3 & + & & x_6 & \leq & 8
\end{array}
$$

Vnesete podatke v računalniški program in izberete maksimum funkcije ter optimalno rešitev.



⇓	X1	X2	X3	X4	X5	X6
maxF[x]	100	110	90	80	80	120

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	⇓	
O1	1	1	1	0	0	0	≤	7
O2	0	0	0	1	1	1	≤	13
O3	1	0	0	1	0	0	≤	2
O4	0	1	0	0	1	0	≤	10
O5	0	0	1	0	0	1	≤	8

Dobite:

$x_1 = 0,\ x_2 = 7\ ,\ x_3 = 0\ ,\ x_4 = 2,\ x_5 = 3,\ x_6 = 8$

$S_{max} = 100 \cdot 0 + 110 \cdot 7 + 90 \cdot 0 + 80 \cdot 2 + 80 \cdot 3 + 120 \cdot 8 = 770 + 160 + 240 + 960 = \mathbf{2130}$

POMNITE

Postopek reševanja transportnega problema s simpleks metodo:

- Zapis problem v obliki tabele
- Zapis ciljne funkcije
- Zapis omejitvenih enačb
- Vnos podatkov v računalniški program, izbira minimuma ali maksimuma
- Izbira optimalne rešitve.

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. Rešite grafično in s simpleks metodo!

a) Prevoznik ima dva tipa vozil in sicer 5 tipa A in 3 tipa B. Na prvi relaciji opravi po 6 voženj dnevno, na drugi pa po 2 vožnji dnevno. Podatki o prihodkih na vožnjo so podani v tabeli. Kako razporedi vozila, da bo dosegel maksimalni prihodek?

	L_1	L_2
A	75	100
B	90	50

[$X_1 = 0$; $X_2 = 5$; $X_3 = 2$; $X_4 = 1$]

b) Prevoznik oskrbuje kupce iz dveh skladišč. Do prvega kupca mora prepeljati 300 paketov dnevno, do drugega pa 400 paketov dnevno. Kako bo organiziral prevoz, če razpolaga v prvem skladišču s 500 paketi v drugem pa z 200 paketi, da bodo skupni stroški prevoza najmanjši? Stroški prevoza na paket na posameznih relacijah so razvidni iz tabele.

	K_1	K_2
A	3	5
B	6	4

[$X_1 = 300$; $X_2 = 200$; $X_3 = 0$; $X_4 = 200$]

c) Prevoznik oskrbuje kupce iz dveh skladišč. Do prvega kupca mora prepeljati 1000 zabojev dnevno, do drugega pa 1200 dnevno. Kako bo organiziral prevoz, če razpolaga v prvem skladišču s 1500 zaboji, v drugem pa s 700 zaboji, da bodo skupni stroški prevoza najmanjši? Stroški prevoza na zaboj na posameznih relacijah so razvidni iz tabele.

	K_1	K_2
A	10	15
B	8	12

[$X_1 = 1000$; $X_2 = 500$; $X_3 = 0$; $X_4 = 700$]

2. Rešite s simpleks metodo! Uporabite računalniški program!

a) Trgovsko podjetje ima trgovine A, B, C. V A prodajo 4000 plastenk, v B 6000 in v C 3000 plastenk dnevno. Plastenke dobavljajo iz skladišč G in H in sicer je možno iz G dnevno dobaviti največ 7000, iz H pa 8000 plastenk. Kako naj podjetje oskrbuje prodajalne, da bodo skupni prevozni stroški najnižji in kolikšni so dnevni stroški prevoza? Prevozni stroški na plastenko na posameznih relacijah so podani v naslednji tabeli:

	A	B	C
G	5	3	6
H	4	3	1

[$x_1 = 1000$, $x_2 = 6000$, $x_3= 0$, $x_4 = 3000$, $x_5 = 0$, $x_6 = 3000$; minimalni stroški so 38000]

b) Skladišči W_1 in W_2 oskrbujeta z določenim izdelkom proizvodne linije L_1, L_2 in L_3. V prvem skladišču je na zalogi 50 izdelkov, v drugem pa 40. Prva linija potrebuje 30 izdelkov, druga 25 in tretja 35. Kako boste organizirali razvoz, da bodo transportni stroški minimalni in kolikšni bodo stroški? Podatki o stroških na izdelek so podani v naslednji tabeli:

	L_1	L_2	L_3
W_1	12	8	15
W_2	7	10	9

[$x_1 = 25$, $x_2 = 25$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$, $x_5 = 0$, $x_6 = 35$; minimalni stroški so 850]

c) Asfaltni bazi A_1 in A_2 oskrbujeta tri gradbišča G_1, G_2, G_3. Prva baza razpolaga s 9 tonami materiala, druga pa s 6 tonami. Prvo gradbišče potrebuje 4 tone, drugo 5 ton in tretje 6 ton. Kako boste organizirali razvoz, da bodo transportni stroški minimalni in kolikšni bodo stroški? Stroških na tono so podani v naslednji tabeli:

	G_1	G_2	G_2
A_1	12	18	10
A_2	10	20	15

[$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$, $x_4 = 4$, $x_5 = 2$, $x_6 = 0$; minimalni stroški so 194]

d) Trgovsko podjetje ima tri distribucijske centre D_1, D_2 in D_3 in dva prodajna centra T_1 in T_2 V prem distribucijskem centru razpolagajo s 40 transportnimi enotami določenega izdelka, v drugem s 60, v tretjem pa s 50. V prvi prodajni center morate dostaviti 70 transportne enote, v drugi pa 80.
Kako boste organizirali razvoz, da bodo transportni stroški minimalni in kolikšni bodo stroški? Stroških na transportno enoto so podani v naslednji tabeli:

	T_1	T_2
D_1	20	25
D_2	40	30
D_3	35	50

[Rezultat: $x_1 = 20$, $x_2 = 20$, $x_3 = 0$, $x_4 = 60$, $x_5 = 50$, $x_6 = 0$; minimalni stroški so 4450]

Če vas optimizacijski problemi zanimajo, si o tem lahko več preberete v skripti Jana Žitnika Reševanje optimizacijskih problemov na spletnem naslovu www.presernova.si/ekonomska

POVZETEK

Optimizacijski problemi so pogosti problemi, ki jih srečuje logistik na svojem delovnem področju. Večino se jih lahko oblikuje kot linearni program, ki obsega

- **linearno funkcijo več spremenljivk, ki se imenuje ciljna ali namenska funkcija in**
- **sistem pogojnih ali omejitvenih enačb.**

Rešiti problem pomeni določiti tiste pozitivne vrednosti neodvisnih spremenljivk, pri katerih ima ciljna funkcija ekstrem: minimum ali maksimum.

Metod za določanje vrednosti neodvisnih spremenljivk je več. Če nastopita le dve, se lahko uporabi matematična metoda, za ostale pa je najbolj poznana SIMPLEKS metoda, na podlagi katere delujejo različna računalniška orodja.

Vaša naloga, ko se boste srečali z reševanjem optimizacijskega problema z več spremenljivkami je naslednja:

- **opredelite spremenljivke,**
- **zapišete ciljno funkcijo,**
- **zapišete sistem linearnih neenačb,**
- **uporabite eno izmed računalniških orodij, ki vam da optimalno rešitev sistema nenenačb**

6 STATISTIKA

Razumevanje kvantitativnih analiz in prognoz na podjetniški, panožni, nacionalni ali globalni ravni je odvisno od vašega znanja, predvsem s področja statistike, ki zadeva poznavanje osnovnih statističnih pojmov in parametrov. Če pa želite tudi sami proučiti razvoj nekega pojava in pripraviti strokovno poročilo, si morate pridobiti osnovna metodološka znanja s področja opisne in inferenčne statistike.

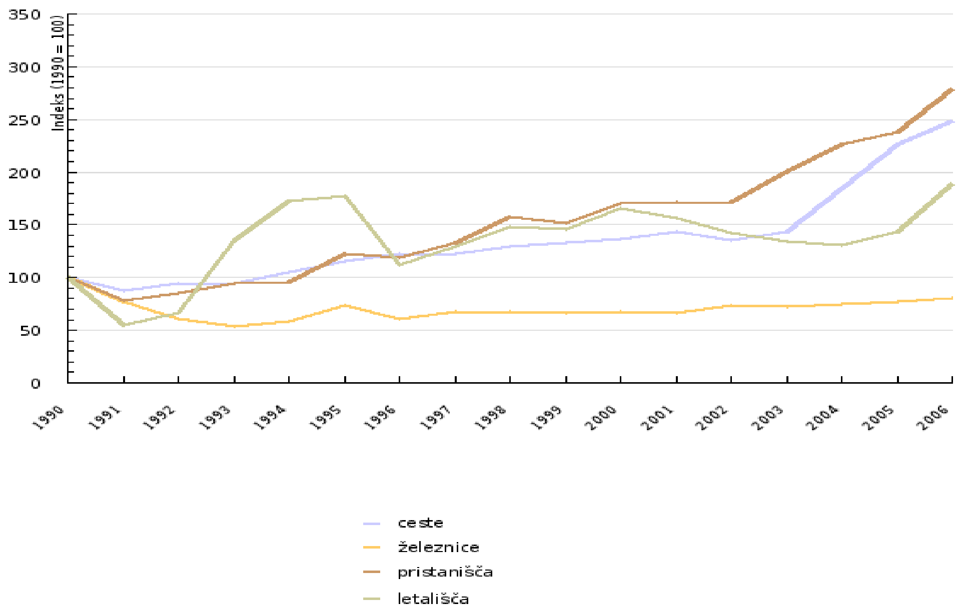
Primer:

V tabeli 9 so zbrani bazični indeksi tovornega prometa po prometnih panogah za leta od 2000 do 2006 glede na leto 1990. Na sliki 27 pa so linijski grafikoni indeksov s stalno osnovo.

Tabela 9: Razvoj tovornega prometa

		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
ceste	Indeks (1990=100)	136	144	135	144	184	226	248
železnice	Indeks (1990=100)	68	67	73	72	75	77	80
pristanišča	Indeks (1990=100)	170	171	172	201	226	238	279
letališča	Indeks (1990=100)	166	156	142	134	131	143	189

Vir: Statistični urad Republike Slovenije



Slika 27: Linijski grafikon indeksov (1990 = 100)

Interpretacija parametrov iz zadnjega stolpca tabele 9 in slike 27:

V samostojni Sloveniji se je najbolj povečal obseg pristaniškega prometa in sicer je bil v letu 2006 skoraj 3-krat ($I_{2006/1990} = 248$*) večji kot leta 1990. Po vstopu v EU pa je doživel največjo rast cestni tovorni promet, ki je bil v letu 2006 kar za 72% večji kot v letu 2004 (*$V_{2006/2004}= 172$*).*

Da vam razumevanje raziskovalnih poročil, pa tudi načrtovanje zbiranja in obdelave podatkov ne bo delalo na delovnem mestu prevelikih preglavic, vam priporočam, da temeljito predelate to poglavje.

Ko boste usvojili znanja in spretnosti iz tega poglavja, boste usposobljeni za:

- **razumevanje osnovnih statističnih informacij;**
- **načrtovanje zbiranja in prikazovanja statističnih podatkov kot podlage za sestavljanje poročil in sprejemanje poslovnih odločitev;**
- **računanje nekaterih statistični parametrov in uporabo računalniških orodij za statistične analize.**

6.1 OSNOVNI STATISTIČNI POJMI

Primer:

Zaposleni ste v podjetju X, ki opravlja prevoz blaga in sicer ste odgovorni za optimalno izkoriščenost voznega parka. Katere podatke bi bilo dobro zbirati, kako jih obdelati in pripraviti informacije za poslovno odločanje?

Nalogo boste strokovno opravili, če poznate osnovne statistične pojme, načine urejanja in prikazovanja podatkov, osnovne statistične parametre, metode izračuna parametrov,…

Osnovni statistični pojmi:

- **Populacija**

Populacija izhaja iz latinske besede *populus,* ki pomeni ljudstvo. Prve statistične raziskave so bila ravno ljudska štetja. Ker so lahko predmet statistične raziskave različni množični pojavi, so lahko populacije različne množice, kot so različne ciljne skupine (potniki, kupci, zaposleni,..), proizvodi, dogodki, mnenja,…

Populacijo morate **stvarno (vsebinsko), geografsko (krajevno) in časovno** opredeliti. S stvarno opredelitvijo natančno določite, kdo ali kaj spada vanjo, z geografsko opredelitvijo poveste, kje je zajeta populacija, s časovno pa kdaj.

Za primer proučevanja voznega parka opredelite populacijo:

KDO ali **KAJ**	**KJE**	**KDAJ**
Vozni park	*v podjetju X*	*v mesecu ____*

- **Enota populacije**

Enota populacije je osnovni element množičnega pojava, kot so dogodki (prometne nesreče, zamude avtobusov,…), predmeti (vozila, tovor, proizvodi,…), ljudje (zaposleni, potniki, dobavitelji, kupci,…), drugo (cene, plače,..).

Če proučujete vozni park, je enota vozilo.

- **Vzorec**

Proučevanje velikih populacij je včasih nemogoče ali predrago, zato se izbere le del populacije, ki se imenuje **vzorec.** Na podlagi lastnosti vzorca se nato sklepa o lastnostih populacije. Verjetnost, da je lastnost populacije enaka lastnosti vzorca, je odvisna od velikosti in reprezentativnosti vzorca. Pogosto se reprezentativnost doseže s slučajnim izborom enot.

- **Spremenljivke**

Za vsako enoto določite **lastnosti**, ki jih boste opazovali. Ker so te lastnosti za posamezne enote populacije različne, se imenujejo **spremenljivke.** Nekateri uporabljajo tudi izraz karakteristike.

Pri vozilih voznega parka je spremenljivka mesečno število prevoženih kilometrov. Lahko bi pri enotah opazovali več lastnosti, recimo število dni na popravilu.

Lastnosti enot izrazite opisno ali s številkami.

Primer:

Proučujete zaposlene. Zaposleni tvorijo populacijo. Statistična enota je »delavec«. Odločili ste se, da boste za vsakega zaposlenega zbirali podatke o starosti, spolu, izobrazbi,... To so lastnosti enot populacije oziroma spremenljivke. Starost je številčni podatek, spol je opisni podatek (moški, ženski), stopnja izobrazbe je lahko številčni ali opisni podatek (npr. 6, višja strokovna izobrazba)

Številski podatki se imenujejo **numerične** spremenljivke, opisni pa **atributivne.**

Numerični podatki so lahko celoštevilski – **diskretne spremenljivke** (število prebivalcev, število podjetij,...) ali katerokoli realno število – **zvezne spremenljivke** (masa tovora, prevožena pot,…)

- **Statistični parametri**

Ko se zbere podatke, jih je potrebno »obdelati«. Metodološka obdelava je odvisna od namena in cilja statistične raziskave. V vsakem primeru, pa naj bi vsebovala:

- ureditev podatkov,
- grafični prikaz,
- izračun parametrov,
- interpretacijo.

Primer:

Proučujte mesečno število prevoženih kilometrov za vozila voznega parka. Zbrali ste podatke za 10 vozil za pretekli mesec.

Populacija: vozni park
Enota: vozilo
Spremenljivka: prevoženi kilometri

Evidenca zbiranja podatkov:

vozilo	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
prevoženi kilometri	12000	9000	7500	13000	8500	10000	5000	11000	7000	3000

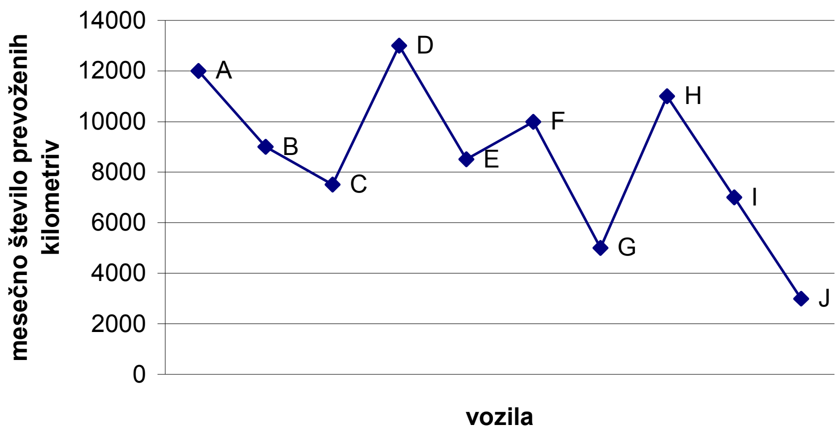
Ureditev podatkov

Odločili ste se, da boste podatke razvrstili po velikosti, torej oblikovali **ranžirno vrsto**.

vozilo	J	G	I	C	E	B	F	H	A	D
prevoženi kilometri	3000	5000	7000	7500	8500	9000	10000	11000	12000	13000

Običajno se podatke uredi v tabelah. Danes se za to uporablja računalniško orodje EXCEL, ki ga boste uporabljali tudi vi pri reševanju študijskih primerih. Če podatke vnesete v excelovo tabelo, ne boste imeli težav z grafično predstavitvijo, saj vam excel ponuja različne vrste grafikonov. Vi se le morate odločite, kateri je za prikaz podatkov, ki ste jih zbrali, najprimernejši.

Primer: Linijski grafikon prevoženih kilometrov



Sedaj pa sledi najtežji del obdelave, to je analitični del, ki mora vsebovati izračune in interpretacije **statističnih parametrov.** Kateri statistične parametre naj bi vsebovala posamezna poročila, je odvisno od namena in ciljev statističnega proučevanja. Na nacionalnem nivoju je to v pristojnosti Statističnega urada Republike Slovenije; na podjetniškem nivoju pa je to prepuščeno menedžmentu, razen na tistih področjih, ki jih določajo predpisi.

Primer:

Po nacionalnih predpisih so podjetja, ki opravljajo javni prevoz potnikov ali blaga, dolžna voditi evidence o prometnih nesrečah in hujših prometnih prekrških , v katerih so bili udeleženi njihovi vozniki ali vozila, te podatke analizirati in sprejeti ukrepe za zmanjševanje števila prometnih nesreč in hujših prometnih prekrškov. Katere podatke bo podjetje zbiralo in na kakšen način obdelovalo, je prepuščeno podjetju.

Za primer proučevanja voznega parka bi lahko določili več parametrov. Vas mogoče zanima kolikšen del vozil voznega parka je prevozilo manj kilometrov kot je to optimalno glede na povprečje v panogi, če je to 120000 km na vozilo v koledarskem letu? Mogoče vas zanima, kolikšno je bilo povprečno mesečno število prevoženih kilometrov na vozilo?

Odločiti se boste morali za tiste parametre, ki po vašem mnenju najbolj odražajo lastnosti populacije.

Pri izračunu statističnih parametrov je treba upoštevati pravila in postopke, ki jih predpisuje stroka.

Primer:

Aritmetična sredina je opredeljena kot količnik vsote vrednosti opazovane spremenljivke (vseh zbranih podatkov) in števila enot populacije (števila podatkov). Ker se za parametre običajno uporabljajo obrazci, se je potrebno dogovoriti za označevanje. V praksi se za iste statistične pojme uporabljajo različni simboli.

Primer za aritmetično sredino:

$$M = \mu = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

- **Vzorčne statistike**

Če izračunate parametre na podlagi podatkov o vzorcu ali enotah vzorca, se ti parametri imenujejo **vzorčne statistike.**

EXCEL ponuja orodja za izračune statistični parametrov, zato je predvsem pomembno, da jih znate ustrezno interpretirati z vidika namena in ciljev na področju, ki ga proučujete.

POMNITE

Populacija je množica enot, ki so predmet statističnega proučevanja.
Vzorec je del (podmnožica) populacije.
Spremenljivke so lastnosti statistične enote, ki so izražene numerično ali atributivno. Numerični podatki so lahko celoštevilski – diskretne spremenljivke (število prebivalcev, število podjetij ...) ali katerokoli realno število – zvezne spremenljivke (masa tovora, prevožena pot …)

VRSTE SPREMENLJIVK

ATRIBUTIVNE

NUMERIČNE

ZVEZNE

DISKRETNE

Statistični **parametri** so lastnosti populacije, vzorčne **statistike** pa so lastnosti vzorca.

Statistično proučevanje se začne z zbiranjem podatkov o enotah populacije po določenih spremenljivkah. Zbrane podatke se uredi v tabelah in prikaže z grafikoni. Izračuna se relevantne statistične parametre ali vzorčne statisti in pripravi poročilo. Pri statističnem proučevanju se uporablja EXCEL.

PRIMER ZA UTRJEVANJE

Na spletnih strani Statističnega urada Republike Slovenije, ki je glavni izvajalec statističnih raziskovanj nacionalnega pomena, dobite podatke z različnih področij, tudi transporta. Na spletnem naslovu http://www.stat.si/publikacije/pub_statinf.asp v publikaciji STATISTIČNE INFORMACIJE, 2008, št 36, imate zbrane podatke za različna področja, tudi TRANSPORT.

Predmet proučevanja so različni populacije. Oglejte si podatke o **prevoznih sredstvih** in opredelite populacijo **stvarno, geografsko in časovno!** Odgovorite na naslednja vprašanja:

- Kaj je enota populacije?
- Kaj so spremenljivke pri cestnih vozilih? (Namig: Pomagajte si z metodološkimi pojasnili v publikaciji!)
- Kateri so statistični parametri, ki opisujejo spremembe na področju prevoznih sredstev v letu 2006 glede na leto 2000? (Namig: Preberite interpretacijo tabelarnih podatkov!).

6.2 RELATIVNA ŠTEVILA

Relativna števila so statistični parametri, ki jih strokovni delavci pri obdelavi statističnih podatkov najpogosteje računajo in interpretirajo. Gre za primerjavo dveh raznovrstnih ali istovrstnih podatkov. V matematičnem jeziku je to količnik med dvema podatkoma.

Najpogostejša relativna števila so:

- **Strukture**

Strukture ali deleži so relativna števila, ki jih dobite, ko **delite del s celoto** in so običajno izražene v odstotkih.

Primer: V Sloveniji uporablja internet 33% prebivalcev.

Delež - strukturo izračunate tako, da število enot dela populacije delite s številom enot celotne populacije in delež izrazite v odstotkih.

$$\textbf{Struktura (delež)} = \frac{\text{del}}{\text{celota}} \quad \rightarrow \quad \textbf{v \%}$$

PRIMERA ZA UTRJEVANJE

1. Na spletnih straneh poiščite podatke o lastniški strukturi enega izmed večjih logističnih podjetij v Sloveniji! Kateri grafikon se običajno uporablja za prikaz lastniške strukture?

2. Lahko je predmet proučevanja populacija z velikim številom enot. V takem primeru podatke o opazovani lastnosti spremenljivke grupirate v skupine, ki se imenujejo **razredi.** Pri grupiranju najprej določite lastnosti enot v posameznem razredu. Lastnosti morajo biti določene tako, da ni dvoma o razvrstitvi enote v posamezni razred. Ista enota ne more biti razvrščena v dva razreda. Prvo vprašanje, ki se postavlja je:

Koliko razredov je smiselno oblikovati?

V praksi se je izkazalo, da je ustrezno izbrati od 6 do 20 razredov, odvisno od števila enot populacije.

Pri tem lahko uporabite Sturgesovo pravilo, po katerem je približno število razredov

1 + 3,32 log N N – število enot populacije

Primer:

V mestni četrti A se je v kratkem zgodilo več prometnih nesreč. Policija je želela analizirati pojav z več vidikov. Med drugim jo je zanimala starost ponesrečencev. Zbrali so podatke o starosti ponesrečencev v zadnjih dveh letih.

10	28	31	47	7	18	59	46	10	53
19	37	55	8	57	59	22	21	14	62
15	59	16	20	52	37	23	42	14	11
60	29	34	21	35	28	6	44	54	9
13	67	63	46	12	51	8	16	63	49
54	6	11	32	57	10	11	17	31	22
60	5	6	33	14	56	64	8	4	35
28	17	53	22	20	16	23	7	18	29
9	15	14	64						

Določitev števila razredov: **1 + 3,32 log N = 1 + 3,32 log 84 = 7,38 ≈ 7 razredov**

Sedaj pa je potrebno enote populacije razvrstiti v posamezne razrede. Odločiti se morate za najmanjšo in največjo vrednost spremenljivke, ki spada v posamezni razred. Ti vrednosti se imenujeta **meji razreda**, razlika med mejama pa **širina razreda**.

Glede na podatke o starosti ponesrečencev in števila razredov je v zgornjem primeru smiselno oblikovati razrede z mejami kot so opisane v drugem stolpcu tabele 10.

V nadaljevanju boste prešteli enote, ki jih boste uvrstili v posamezne razrede. To število se imenuje **frekvenca** razreda, ki se običajno označuje z f_j, kjer f pomeni število enot v razredu, j pa zaporedno številko razreda.

Frekvence so v tabeli 10 v tretjem stolpcu.

Tako urejeni podatki predstavljajo **frekvenčno porazdelitev**, ki je prikazana v frekvenčni tabeli.

Za grafični prikaz grupiranih podatkov sta primerna grafa, ki se imenujeta

- **histogram** (slika 28)
  in
- **frekvenčni poligon** (slika 29)

Histogram je sestavljen iz stolpcev, katerih širina predstavlja širino razreda, višina pa frekvenco razreda. Frekvenčni poligon je linijski graf, ki v pravokotnem koordinatnem sistemu povezuje točke, katerih abscise so sredine frekvenčnih razredov, ordinate pa frekvence razredov.

Frekvenčna tabela je primerna za nadaljnjo obdelavo in interpretacijo lastnosti populacije. Običajno se pri interpretaciji uporabljajo naslednji pojmi:

- relativna frekvenca,
- komulativna frekvenca,
- komulativna relativna frekvenca .

Relativna frekvenca je **delež enot** posameznega razreda, zato se tudi običajno izraža v odstotkih.

Delež izračunate tako, da frekvenco razreda delite s številom enot populacije.

Relativna frekvenca $f_j^0 = \frac{f_j}{N}$

Primer izračuna za prvi razred:

$$f_1^0 = \frac{f_1}{N} = \frac{12}{84} = 0{,}14 \quad \rightarrow \quad 14\%$$

Interpretacija:

Med ponesrečenci je bilo 14 % starih do 10 let.

Za grafični prikaz relativnih frekvenc je primeren **strukturni krog** (slika 30), kjer izseki pomenijo delež enot v posameznem razredu, torej relativno frekvenco.

V petem stolpcu tabele 10 so napisane komulativne frekvence. V prvem razredu je ta enaka frekvenci razreda, v naslednjih razredih pa jih izračunate tako, da komulativni frekvenci predhodnega razreda prištejete frekvenco tega razreda.

Primer za 2. razred:

$$F_2 = F_1 + f_2 = 12 + 22 = 34$$

Interpretacija:

Mlajših od 20 let je bilo 34 ponesrečencev.

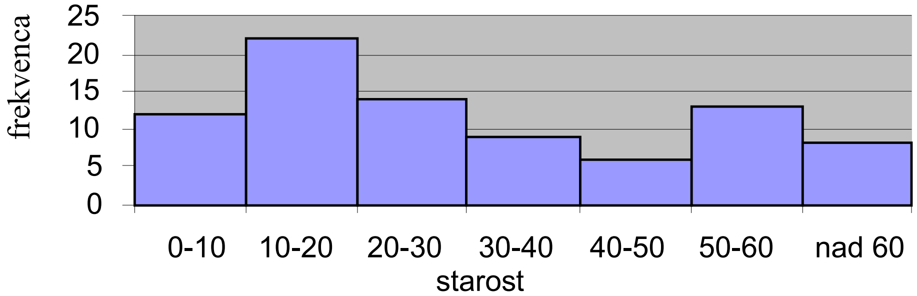
Tudi komulativne frekvence lahko izrazite kot deleže oziroma z odstotki (zadnji stolpec v tabeli 10), ki se imenujejo komulativne relativne frekvence.

Primer interpretacije komulativne relativne frekvence $F_5^0 = 75\%$:

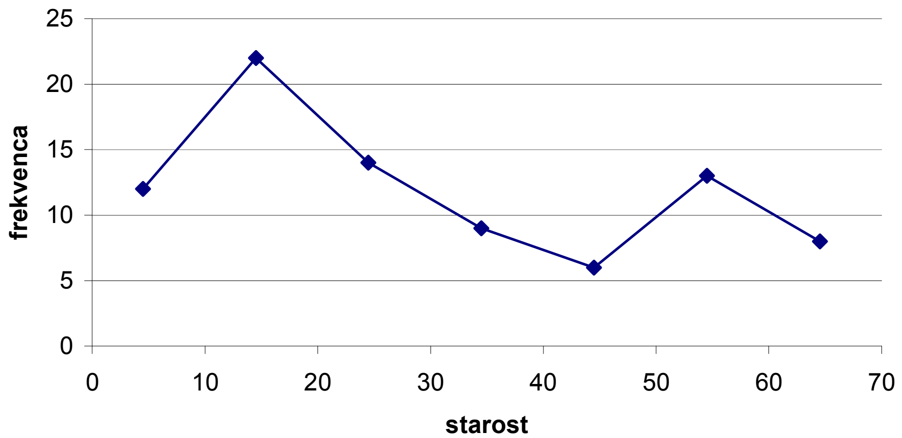
Mlajših od 50 let je bilo 75% ponesrečencev.

Tabela 10: Frekvenčna tabela starosti ponesrečencev

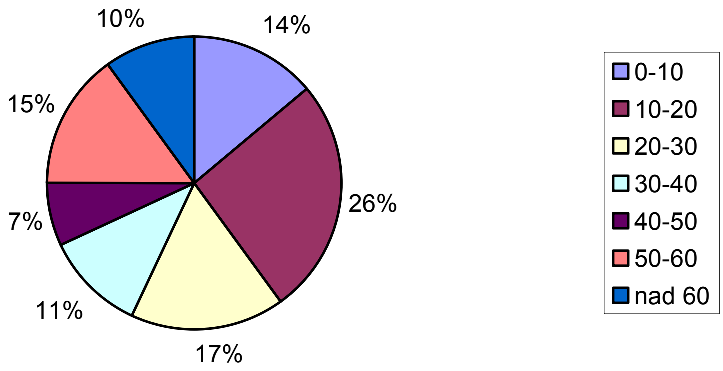
1	**2**	3	**4**		**5**	**6**	
razred	**starost ponesrečencev v letih**	f_j	**relativna frekvenca**		**komulativna frekvenca**	**komulativna relativna frekvenca**	
			$f_j^0 = \frac{f_j}{N}$	f_j^0 **v %**	$\mathbf{F_j}$ $F_j = F_{j-1} + f_j$	$F_j^0 = \frac{F_j}{N}$	F_j^0 **v %**
1.	0 - pod 10	**12**	0,14	14	12	0,14	14
2.	10 - pod 20	**22**	0,26	26	34	0,41	41
3.	20 - pod 30	**14**	0,17	17	48	0,57	57
4.	30 – pod 40	**9**	0,11	11	57	0,68	68
5.	40 – pod 50	**6**	0,07	7	63	0,75	75
6.	50 – pod 60	**13**	0,15	15	76	0,91	91
7.	60 ali več	**8**	0,10	10	84	1,00	100
	$\sum$	**N=84**	**1,00**	**100,0**			



Slika 28: Histogram frekvenčne porazdelitve starosti ponesrečencev



Slika 29: Frekvenčni poligon starosti ponesrečencev



Slika 30: Delež ponesrečencev po starostnih razredih (relativne frekvence)

PRIMER ZA UTRJEVANJE

Po prejšnjem zgledu obdelajte podatke o porabi goriva za 130 avtomobilov pri hitrosti 100km/h, ki so zbrani v spodnji frekvenčni tabeli, tako da boste lahko odgovorili na naslednja vprašanja:

a) Kolikšna je najpogostejša poraba goriva?
b) Kolikšen je delež avtomobilov, ki porabijo od 7 do 8 litrov goriva? Kateri parameter ste izračunali in kako ste ga izračunali?
c) Kolikšen je delež avtomobilov, ki porabi manj kot 10 litrov goriva?

Za obdelavo podatkov uporabite excelovo tabelo!

razred	poraba goriva v litrih	število avtomobilov
1	6 do pod 7	8
2	7 do pod 8	12
3	8 do pod 9	17
4	9 do pod 10	21
5	10 do pod 11	25
6	11 do pod 12	20
7	12 do pod 13	16
8	13 do 14	11

Narišite histogram ali frekvenčni poligon! Označite v histogramu razred, v katerem je, glede na porabo goriva, največ vozil!

- **Statistični koeficienti**

Relativna števila, ki jih dobite, ko delite dva **raznovrstna podatka**, se imenujejo statistični koeficienti. V praksi se za nekatere statistične koeficiente uporabljajo tudi drugi izrazi, pogosto **kazalniki.**

Primer iz publikacije STATISTIČNE INFORMACIJE, št. 36/2008

Število osebnih avtomobilov v Sloveniji stalno narašča. V letu 2006 je bilo registriranih že nekaj več kot 980 tisoč osebnih avtomobilov, to pomeni 488 avtomobilov na 1000 prebivalcev. Leta 1995 je bilo registriranih 743 tisoč vozil ali 374 avtomobilov na 1000 prebivalcev.

$$\text{Statistični koeficient} = \frac{\text{število avtomobilov}}{\text{1000 prebivalcev}}$$

Pri računanju statističnih koeficientov je potrebno paziti, ko je en podatek intervalni (npr. število registriranih avtomobilov v celem letu), drugi pa trenutni (npr. število prebivalcev na določen dan). Pri trenutnem podatku se upošteva povprečje za določeno časovno obdobje.

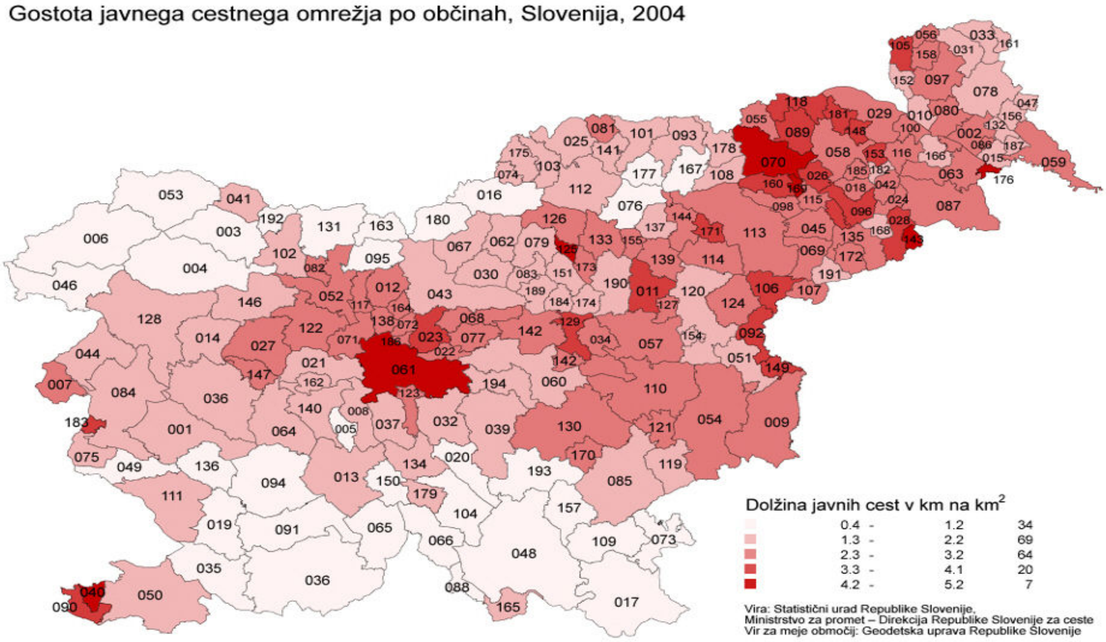
Še nekaj primerov statističnih koeficientov:

$$\textit{nataliteta} = \frac{\text{število rojenih otrok}}{\text{1000 prebivalcev}} \qquad \textit{umrljivost(mortaliteta)} = \frac{\text{število umrlih}}{\text{1000 prebivalcev}}$$

V obeh primerih je potrebno upoštevati, da je število rojenih otrok oziroma število umrlih intervalni podatek (za leto), število prebivalcev pa trenutni, zato se upošteva povprečno število prebivalcev v proučevanem obdobju.

Kazalnik stanja cestne infrastrukture je količnik med dolžino javnih cest in površino. Spodnji kartogram prikazuje ta količnik po občinah za leto 2004.

Gostota javnega cestnega omrežja po občinah, Slovenija, 2004



V trgovskih in proizvodnih podjetjih je uspešnost poslovanja odvisna od zalog. Podjetja si prizadevajo, da so zaloge optimalne. Gibanje zalog se izraža s **koeficientom obračanja zalog,** ki predstavlja

- v trgovski družbi količnik med vrednostjo prodaje in vrednostjo povprečne zaloge trgovskega blaga:

$$K = \frac{\text{prodaja}}{\text{zaloge}}$$

- v proizvodnji pa količnik med vrednostjo porabljenega materiala (surovine, polizdelki,..) in vrednostjo povprečne zaloge materiala:

$$K = \frac{\text{poraba}}{\text{za log e}}$$

Pri izračunu koeficienta obračanja zalog morate biti pozorni na časovno opredelitev podatkov, ali so **trenutni** ali **intervalni.**

Primer:

V tabeli 9 so zbrani podatki o prodaji za prvo polletje po mesecih in o zalogah na začetku meseca. Izračunajte

a) mesečni koeficient obračanja zalog v prvem poletju in
b) povprečno število dni skladiščenja blaga, če je v mesecu 25 delovnih dni!

Tabela 11: Prodaja in zaloge v prvem polletju

mesec	vrednost prodaje v tisočih €	vrednost zalog v tisočih € na začetku meseca
januar	27	12
februar	33	13
marec	35	11
april	38	9
maj	33	10
junij	36	9
julij	-	10

a) Mesečni koeficient obračanja zalog v prvem polletju:

$$K = \frac{\text{povp. mes. vr. prodaje}}{\text{pov. mes. vr. za log}}$$

Postopek:

1. Izračunate povprečno mesečno prodajo za prvo polletje tako, da vsoto prodaj po mesecih delite s številom mesecev. Dobite 33,67.
2. Izračunate povprečno mesečno zalogo za prvo polletje. Tu je nekoliko več problemov, ker morate trenutne podatke (zaloge ob začetku meseca) spremeniti v intervalne (povprečje za posamezni mesec). To naredite tako, da za vsak mesec izračunate vsoto začetnih in končnih zalog (začetek naslednjega meseca) in delite z 2.

Povprečne zaloge v januarju : $\frac{12+13}{2} = 12{,}5$

Povprečne zaloge v februarju: $\frac{13+11}{2} = 12$

Nadaljujete še za ostale mesece!

3. Izračunate povprečne mesečne zaloge za prvo polletje tako, da vsoto povprečnih mesečnih zalog delite s številom mesecev. Dobite 10,5.

4. Izračunate mesečni koeficient zalog K!

$$K = \frac{33{,}67}{10{,}5} = 3{,}2$$

Interpretacija:

V enem mesecu so se zaloge 3,2-krat obrnile.

b) povprečno število dni skladiščenja blaga

Povprečno število dni skladiščenja je enako **recipročnemu koeficientu obračanja zalog.**

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{3{,}2} \text{ meseca} = 0{,}3125 \text{ meseca} = 0{,}3125 \cdot 25 \text{ dni} = 7{,}8 \text{ dni}$$

Interpretacija:
Povprečni čas skladiščenja zalog je bil 7,8 dni.

PRIMERA ZA UTRJEVANJE

1. V tabeli so zbrani podatki o prodaji in nabavi v tisočih €.

mesec	prodaja	nabava	zaloga na koncu meseca
junij			223
julij	367	322	
avgust	323	359	
september	389	362	
oktober	354	333	
november	324	386	
december	389	376	

Izračunajte:
a) mesečni koeficient obračanja zalog v drugem polletju
b) povprečno število dni skladiščenja, če je mesečno število delovnih dni 25

[K= 1,8 ; povprečno število dni skladiščenja 13,8 dni]

2. V tabeli so zbrani podatki o številu zaposlenih, številu bolniških dni in čistih prihodkih od prevoznih storitvah.

mesec	št. zap. na začetku meseca	št. bol. dni	čisti prihodki v mio €
januar	286	630	3,9
februar	291	671	4,2

marec	275	467	4,1
april	267	641	3,7
maj	258		

Izračunajte:

a) povprečno mesečno število bolniških dni na zaposlenega
b) povprečne mesečne čiste prihodke od prevoznih storitev na zaposlenega

[2,2 bol.dni/zaposlenega; 14389,14 €/zaposlenega]

- **Kazalniki dinamike časovnih vrst**

Mnogi pojavi v prometu se spreminjajo s časom. Če podatke uredite po časovnih obdobjih, ki jih proučujete, dobite **časovno vrsto**. Analiziranje časovne vrste pomaga razumeti spremembe in napovedovati vrednosti v prihodnosti. Parametri, ki opisujejo dinamiko pojava v proučevanem obdobju, so:

- **indeksi,**
- **koeficienti rasti,**
- **stopnje rasti.**

Primer:

V logističnem podjetju so zbrali podatke o količini prepeljanega blaga v šestih zaporednih mesecih (drugi stolpec). Analizirajte in interpretirajte podatke količini prepeljanega blaga v šestmesečnim obdobju!

Tabela 12: Prevoz blaga v šestmesečnem obdobju

mesec	količna v t	$I_{j/0}$	$V_{j/j-1}$	K_j	S
1	8000				
2	8700	109	109	1,09	9%
3	9000	113	103	1,03	3%
4	9200	115	102	1,02	2%
5	9700	121	105	1,05	5%
6	7500	94	77	0,77	-23%

Indeks s stalno osnovo

Če želite prikazati spreminjanje v posameznih obdobjih glede na referenčno obdobje (npr. gled na prvi mesec), boste izračunali količnike med podatkom za posamezno obdobje in podatkom za referenčno obdobje ter ga pomnožili s 100. Tako izračunani parameter se imenuje **indeks s stalno osnovo.**

Če označite količino v referenčnem obdobju z Y_0 , v drugih obdobjih pa z Y_j , izračunate indeks s stalno osnovo po naslednjem obrazcu:

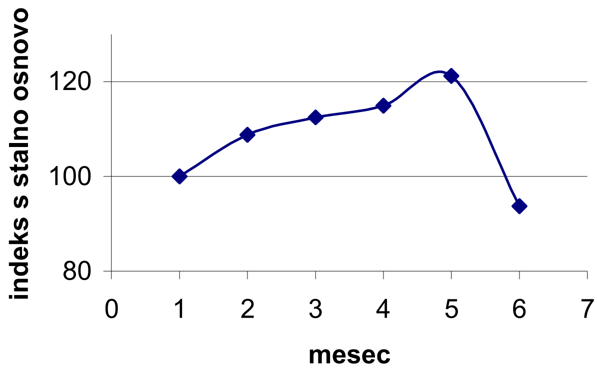
Indeks s stalno osnovo: $I_{j/0} = \frac{Y_j}{Y_0} \cdot 100$

Če je vrednost indeksa večja od 100, gre za povečanje glede na referenčno obdobje; če pa je manjši od 100, gre za zmanjšanje glede na referenčno obdobje. Čeprav ni indeks izražen v odstotkih, lahko ga interpretiramo kot odstotno povečanje (razlika med indeksom in 100) v primeru, ko je večji od 100 in za odstotno zmanjšanje, ko je manjši od 100 (razlika med 100 in indeksom).

Primer interpretacije indeksov s stalno osnovo – 3. stolpec v tabeli 12:

V petem mesecu je bila količina prepeljanega tovora za 21 odstotnih točk večja od količine v prvem mesecu; v šestem mesecu pa za 6 odstotnih točk manjša od količine v prvem mesecu.

Za grafični prikaz je primeren linijski grafikon (slika 31).



Slika 31: Linijski grafikon indeksov s stalno osnovo

Verižni indeks

Če želite prikazati spreminjanje med dvema zaporednima obdobjema, izračunate količnik med podatkom za izbrano obdobje in podatkom predhodnega obdobja ter ga pomnožite s 100. Tako izračunani parameter se imenuje **verižni indeks**.

Verižni indeks: $V_{j/j-1} = \dfrac{Y_j}{Y_{j-1}} \cdot 100$

V tabeli 12 so v četrtem stolpcu izračunani indeksi, ki kažejo spreminjanje količine prepeljanega tovora med zaporednima mesecema

Interpretirate jih na podoben način kot indekse s stalno osnovo, le da poudarite, da gre za zaporedni časovni obdobji.

Primer interpretacije verižnih indeksov – 4. stolpec v tabeli 12:

V šestem mesecu je bila količina prepeljanega tovora za 23% manjša kot v prejšnjem mesecu.

Koeficient rasti

Koeficient rasti je le matematično drugače izražen verižni indeks. Je razmerje (količnik) med podatkom za izbrano obdobje in podatkom predhodnega obdobja. Izračunate ga tako, da verižni indeks delite s 100.

Koeficient rasti: $K_j = \dfrac{Y_j}{Y_{j-1}}$

V tabeli 12 so koeficienti izračunani v petem stolpcu. Iz verižnih indeksov jih izračunate tako, da jih delite s 100.

Kako pa jih boste interpretirali?

Če je $K > 1$, gre za povečanje opazovane karakteristike glede na predhodno obdobje; če pa je $K < 1$, gre za zmanjšanje.

Stopnja rasti

V statističnih poročilih se za pojasnjevanje časovne dinamike proučevanega pojava, najpogosteje uporablja **stopnja rasti.** Dejansko je to odstotno povečanje ali zmanjšanje vrednosti karakteristike glede na predhodno obdobje.

Stopnja rasti: $S_j = \dfrac{Y_j - Y_{j-1}}{Y_{j-1}} \cdot 100 \;\rightarrow\;$ obvezno v %

V tabeli 12 so stopnje rasti v šestem stolpcu.

Lahko so pozitivne ali negativne.

Verižni indeks, koeficient in stopnja rasti so med seboj povezani, saj vsi trije izražajo spremembe opazovane karakteristike v **zaporednih** časovnih obdobjih.

To zvezo lahko tudi matematično potrdite:

$$S_j = \frac{Y_j - Y_{j-1}}{Y_{j-1}} \cdot 100 = \left(\frac{Y_j}{Y_{j-1}} - \frac{Y_{j-1}}{Y_{j-1}} \right) \cdot 100 \; = (K - 1) \cdot 100 \;\rightarrow\; \text{obvezno v \%}$$

$$S_j = V_{j/j\text{-}1} - 100 \;\rightarrow\; \text{obvezno v \%.}$$

NASVET: Ko boste analizirali časovne vrste, uporabite ti zvezi. Najprej izračunajte koeficient rasti ali verižni indeks in iz koeficienta rasti ali verižnega indeksa izračunajte stopnjo rasti!

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

V tabeli so podatki o številu na novo registriranih tovornih vozil za pet zaporedni let. Obdelajte podatke tako, da boste odgovorili na naslednja vprašanja:

a) Za koliko odstotkov se je povečalo število registriranih vozil v petem letu glede na prvo leto proučevanega obdobja?
b) Za koliko odstotkov se je povečalo število registriranih vozil v petem letu?
c) V katerem letu se je število registriranih vozil zmanjšalo in za koliko odstotkov?

Pri obdelavi podatkov uporabiti EXCEL!

Narišite linijski grafikon indeksov s stalno osnovo iz prvega leta proučevanega obdobja!

leto	št. vozil
1	3977
2	3694
3	4096
4	4373
5	4887

[a) 23%; b) 12%; c) v drugem letu in sicer za 7%]

POMNITE

Pomembnejša relativna števila, ki jih statistika uporablja za opisovanje lastnosti populacij, so strukture, statistični koeficienti in kazalniki dinamike časovnih vrst.

Strukture ali deleži so tista relativna števila, ki v odstotkih izražajo delež enot populacije z opazovano lastnostjo. V frekvenčnih porazdelitvah predstavljajo strukturne deleže relativne frekvence.

Statistični koeficienti so relativna števila, ki jih statistika uporablja predvsem za opisovanje tistih lastnosti populacij, ki so pomembna za primerjave dveh različnih podatkov. V praksi so to koeficienti na podlagi katerih se ocenjuje uspešnost gospodarskih subjektov, dela primerjave v panogi, opisuje demografske značilnosti, stopnjo razvitosti in življenjskega standarda,…

Za opisovanje lastnosti časovnih vrst so pomembni kazalniki dinamike časovnih vrst, kot so indeksi, koeficient rasti in stopnja rasti.

6.3 SREDNJE VREDNOSTI

Ko proučujete populacije z majhnim številom enot, uredite podatke o numeričnih spremenljivkah tako, da jih razvrstite po naraščajočih ali padajočih vrednosti. Tako urejeni podatki tvorijo **ranžirno vrsto.** Pri urejanju velikega števila podatkov pa ste spoznali **frekvenčne porazdelitve**. Pri analizi ranžirnih vrst in frekvenčnih porazdelitev se zelo pogosto računa oziroma določa srednje vrednosti. Teh je več vrst. V nadaljevanju boste spoznali mediano, modus in srednje vrednosti, za katere v praksi uporabljamo izraz »povprečje«.

- **Mediana (Me)**

Primer:

Na postajališču mestnega prometa so beležili zamude avtobusov na 12 linijah in zbrali naslednje podatke:

Zamude v min.	5	2	0	3	8	9	3	3	5	4	10	2

Če zamude razvrstite v ranžirno vrsto, je mediana tista vrednost, ki leži na sredini tega zaporedja, kar pomeni, da je imelo 50% vozil večjo ali enako zamudo , 50 % pa manjšo ali enako od te vrednosti. Ker je v ranžirni vrsti 12 podatkov, se mediana nahaja med šestim in sedmim mestom, oziroma rečemo, da je njen ***rang*** $\frac{N+1}{2} = \frac{12+1}{2} = 6{,}5$*. Vrednost mediane pa je na sredini med vrednostma, ki pripadata šestemu oziroma sedmemu rangu.*
Ta zamuda je torej med 3 in 4 minutami in se izračuna $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$ *in se imenuje mediana.*

Ranžirna vrsta:

Rang	1	2	3	4	5	**6**	**7**	8	9	10	11	12
Zamude v min.	0	2	2	3	3	**3**	**4**	5	5	8	9	10

Interpretacija mediane:

Polovico avtobusov je imelo zamudo večjo od 3,5 minute, polovico pa manjšo.

POMNITE

Mediana je srednja vrednost, od katere ima polovica enot manjše ali enake vrednosti, polovica pa večje ali enake.

Primer določitve mediane, če je v ranžirni vrsti liho število podatkov:

15 udeležencev usposabljanja za voznike je na preizkusu doseglo naslednje število točk:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15
točke	15	18	18	20	21	25	28	**32**	32	35	40	40	40	45	45

Po definiciji je mediana na sredini ranžirne vrste, torej v tem primeru na osmem mestu. Pripada ji vrednost 32 točk.

Interpretacija:

50% udeležencev usposabljanja je doseglo manj kot 32 točk, 50% pa 32 ali več točk.

Statistična funkcija MEDIAN

Razvrščanje podatkov v ranžirno vrsto je zamudno. EXCEL ponuja statistično funkcijo MEDIAN, ki vam bo olajšala delo, če boste podatke vnesli v excelovo tabelo! Ni potrebno, da so razvrščeni v ranžirno vrsto.

- **Modus (Mo)**

POMNITE

Modus je srednja vrednost, ki je enaka tisti vrednosti spremenljivke, ki se najpogosteje pojavlja.

Interpretacija modusa v prejšnjih primerih:

- *Najpogostejša zamuda avtobusov je bila 3 minute.*
- *Največ udeležencev je doseglo 40 točk.*

Statistična funkcija MODE

Če imate podatke vnesene v excelovo tabelo, uporabite za določitev modusa funkcijo MODE!

- **Povprečne vrednosti**

Povprečne vrednosti so zelo pogosti statistični parametri, ki predstavljajo tiste vrednosti karakteristike statistične enote ali parametra, ki se najmanj razlikuje od večine posameznih vrednosti. Postopki izračuna povprečja so različni.

Aritmetična sredina (M, $\mu, \overline{x}$) je najbolj znana in uporabljena povprečna vrednost. Ko ste računali statistične koeficiente, ste že spoznali postopka izračuna aritmetične sredine trenutnih in intervalnih negrupiranih podatkov. Uporabili ste naslednji obrazec:

Aritmetična sredina negrupiranih podatkov: $M = \mu = \overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} = \dfrac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} xi$

Statistična funkcija AVERAGE

Če imate negrupirane podatke zbrane v excelovi tabeli, lahko določite aritmetično sredino z uporabo statistične funkcije AVERAGE!

Kako bi izračunali aritmetično sredino frekvenčne porazdelitve?

Že ste se seznanili s frekvenčno porazdelitvijo, ki jo uporabite, ko podatke o spremenljivkah grupirate v frekvenčne razrede. Frekvenčna tabela vam ne nudi informacije o vrednosti karakteristike posamezne enote populacije, pač pa za vsak razred le **število enot oziroma frekvenco** in **mejne vrednosti** frekvenčnega razreda. Pri izračunu aritmetične sredine uporabite **sredino razreda** kot reprezentančno vrednost vseh enot razreda in jo pomnožite s frekvenco razreda. Dobljene produkte seštejete in vsoto delite s številom vseh enot.

Primer:

Na avtobusu so 40 dni beležili dnevno število potnikov. Rezultati so zbrani v tabeli 13. Izračunajte povprečno število potnikov!

Tabela 13: Frekvenčna porazdelitev števila potnikov

razred - k	število potnikov	frekvenca f_j (število dni)	sredina razr.- x_k	$f_j x_k$
1	1-7	5	4	20
2	8-14	12	11	132
3	15-21	10	18	180
4	22-28	7	25	175
5	29-35	4	32	128

6	36-42	2	39	78
$\sum$		**40**		**713**

Aritmetična sredina grupiranih podatkov: $M = \overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j x_k}{N} = \frac{713}{40} = 17{,}8$

Pri računanju aritmetične sredine frekvenčne porazdelitve se morate zavedati, da ste vsem enotam v istem razredu določili isto vrednost, namreč sredino razreda, čeprav imajo lahko enote v tem razredu različne vrednosti, zato je tako izračunana aritmetična sredina manj natančna od aritmetični sredini istih negrupiranih podatkov.

Včasih pa boste v zadregi, kako izračunati povprečje. Večkrat pride v poštev **harmonična sredina.**

Primer:

Prevoznik je oblikoval cenik za prevoz potnikov, kjer je cena na kilometer odvisna od relacije. Zanima ga, kolikšna bi morala biti cena, da bi bil iztržek enak, če bi ne bila cena odvisna od relacije. Pa si oglejte izračun na podlagi naslednjih podatkov:

relacija v km	cena v €/km
5	0,26
10	0,18
50	0,11

Izhajate iz pogoja, da morata biti iztržek enaka pri enakem številu prevoženih kilometrov. Če boste iztržek za vse razdalje delili z vsoto razdalj, boste dobili povprečno ceno na kilometer.

$$\text{Povprečna cena} = \frac{\text{skupni iztržek}}{\text{celotna razdalja}} = \frac{(5 \cdot 0{,}26 + 10 \cdot 0{,}18 + 50 \cdot 0{,}11)\text{EUR}}{(5 + 10 + 50)\text{km}} = 0{,}16\text{€/km}$$

Kako bi izračunali povprečje struktur oziroma deležev?

Primer:

Zbrali ste podatke o številu in deležu zaposlenih z višjo izobrazbo na dan 31.12. za triletno obdobje. Izračunajte kolikšen je bil povprečen odstotek zaposlenih z višjo izobrazbo!

leto	število zaposlenih z višjo izobrazbo	delež z višjo izobrazbo v % na dan 31.12.
1	345	10,2
2	112	8,6
3	76	5,6

$$\text{Povprečni odstotek} = \frac{\text{število zaposlenih z višjo izobrazbo v petletnem obdobju}}{\text{število vseh zaposlenih v petletnem obdobju}}$$

Vsi zaposleni v prvem letu: $\frac{345}{10,2} \cdot 100 = 3382,35$

Izračunate še za naslednji dve leti ter vsoto zaposlenih z višjo izobrazbo delite s vsoto vseh zaposlenih:

$$\frac{533}{6023,27} = 0,088 = 8,8\%$$

Kako bi izračunali povprečje statističnih koeficientov?

Primer za povprečni koeficient obračanja zalog:

Zbrali ste podatke o prodaji in mesečnemu koeficientu obračanja zalog za 4 skupine blaga. Izračunajte povprečni mesečni koeficient obračanja zalog za vse štiri vrste blaga!

blago	vrednost prodaje v 1000 €	mesečni koeficient obračanja zalog
A	325	0,90
B	85	2,27
C	27	3,12
D	418	1,15

Povprečni koeficient obračanja zalog = $\overline{K} = \frac{\text{celotna prodaja}}{\text{povprecne zaloge}}$

Povprečne zaloge vsega blaga so enake vsoti povprečnih zalog posameznega blaga. Te izračunate iz mesečnega koeficienta za posamezno blago.

$$K_A = \frac{\text{prodaja A}}{\text{zaloge A}} \quad \rightarrow \quad \text{zaloge A} = \frac{\text{prodaja A}}{K_A} = \frac{325}{0,9} = 361,11$$

Izračunajte še mesečne zaloge za blago B, C in D ter celotno prodajo delite s celotnimi zalogami:

$$\overline{K} = \frac{855}{770,7} = 1,1$$

POMNITE

Za računaje povprečja statističnih koeficientov ni univerzalnega obrazca, pač pa je osnova opredelitev statističnega koeficienta. Primerjati morate povprečni vrednosti obeh spremenljivk.

Za računanje povprečne vrednosti verižnih indeksov in koeficientov rasti se uporablja **geometrijska sredina,** ki je definirana kot n- koren produkta vrednosti teh kazalnikov, kjer je n število kazalnikov.

Primer:

Spodnjo tabelo ste sestavili, ko ste računali kazalnike dinamike količine tovora.

mesec	količna v t	$V_{j/j-1}$	K_j	S
1	8000			
2	8700	109	1,09	9%
3	9000	103	1,03	3%
4	9200	102	1,02	2%
5	9700	105	1,05	5%
6	7500	77	0,77	-23%

Ker so kazalniki dinamike med seboj povezani, je smiselno, da najprej izračunate povprečni koeficient rasti in na podlagi zveze me stopnjo rasti in koeficientom rasti izračunate povprečno stopnjo rasti.

Primer izračuna povprečne stopnje rasti količine tovora:

Po definiciji zapišete obrazec za računanje povprečnega koeficienta rasti:

$$\overline{K} = \sqrt[5]{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5}$$

Če računate po tem obrazcu in vnašate podatke o koeficientih, ki niso izračunani na več decimalnih mest, ne dobite dovolj natančnega rezultata, zato je bolje, da koeficiente izrazite s količniki spremenljivk:

$$\overline{K} = \sqrt[5]{\frac{y_2}{y_1}\frac{y_3}{y_2}\frac{y_4}{y_3}\frac{y_5}{y_4}\frac{y_6}{y_5}}$$

Če izraz pod korenskim znakom okrajšate, dobite:

$$\sqrt[5]{\frac{y_6}{y_1}}$$

Tako ste izračun povprečnega koeficienta rasti pomembno skrajšali:

$$\sqrt[5]{\frac{7500}{8000}} = 0,987175$$

Če od povprečnega koeficienta odštejete 1 in razliko pomnožite s 100, dobite povprečno stopnjo rasti izraženo v odstotkih.

$$\overline{S} = (0,987175 - 1) \cdot 100 = -1,2825\%$$

Iz povprečnega koeficienta rasti lahko izračunate tudi povprečni verižni indeks.

$$\overline{V} = 0,987175 \cdot 100 = 98,7175$$

Kaj dejansko pomenijo povprečne vrednosti dinamike časovnih vrst?

Če bi bil vsak mesec koeficient rasti enak povprečnemu, bi bil tovor v šestem mesecu enak, torej 7500 ton. Pa preverite, če to drži!

2. mesec: 8000 · 0,987175
3. mesec: 8000 · 0,987175 · 0,987175 = 8000 · 0,9871752
…………
6. mesec: 8000 · 0,9871755 = 7500

Če bi bilo v časovni vrsti **n** podatkov, bi bilo **(n – 1)** koeficientov rasti. Obrazec za povprečni koeficient rasti, če je v časovni vrsti n podatkov zapišete:

Povprečni koeficient rasti za n podatkov časovne vrste: $\overline{K} = \sqrt[n-1]{\frac{Y_n}{Y_1}}$ **,** kjer je

Y_n podatek v zadnjem časovnem obdobju, Y_1 pa podatek v prvem časovnem obdobju.

POMNITE

Srednje vrednosti so tipične vrednosti karakteristik statističnih enot ali statističnih parametrov, ki so pomembne za opisovanje lastnosti populacije. Med pomembnejšimi so mediana, modus, aritmetična sredina, harmonična in geometrijska sredina. Povprečne vrednosti kazalnikov dinamike časovnih vrst so geometrijske sredine.

PRIMERI ZA UTRJEVANJE

1. Voznik je za 9 voženj beležil porabo časa. Njegovi rezultati v minutah so 38, 42, 35, 44, 40, 41, 40, 37.
Podatke uredite v ranžirno vrsto in odgovorite na naslednja vprašanja:
   a) Kolikšen je bil čas vožnje, od katerega je bilo 50% krajših?
   b) Kolikšen je bil povprečni čas vožnje?

[a) 40 minut; b) 39,67 minut]

2. V tovarni avtomobilov so za 40 testnih avtomobilov merili porabo goriva na 100 km. Podatke so grupirali v 5 frekvenčnih razredov in jih zbrali v naslednji frekvenčni tabeli:

razred	poraba goriva v l	št.avt.
1	7,0- pod7,2	5
2	7,2- pod7,4	11
3	7,4- pod7,6	18
4	7,6- pod7,8	4
5	7,8- pod8,0	2

Izračunajte povprečno porabo bencina! Uporabite excel!

[7,44 litrov]

3. V logističnem podjetju so zbrali podatke o površinah 4 skladišč letnih skladiščnih stroških na 1000 m^2:

skladišče	površina v 1000 m^2	sklad.str. v € na $1000m^2$
A	2,6	392
B	2,1	432
C	1,8	478
D	3.3	455

Izračunajte povprečne skladiščne stroške na 1000 m^2!

[437,6]

4. V voznem parku so zbrali podatke o opravljenem transportnem delu za šestmesečno obdobje v tonkilometrih:

mesec	v 1000 tkm
1	5350
2	5100
3	4400
4	4030
5	3800
6	3100

Izračunajte povprečno stopnjo rasti in jo obrazložite!
[-10,3%]

6.4 MERE VARIABILNOSTI

Srednje vrednosti ne vselej nudijo dovolj informacij o populacije. Lahko celo vodijo do napačnih sklepov, če ni še drugih potrebnih informacij.

Primer:

Skupina 3 deklet in 3 fantov je pisala test z največ 20 možnimi točkami. Rezultati so prikazani v spodnji tabeli. Aritmetična sredina pri dekletih je bila 9 točk, pri fantih pa 8 točk. Ali lahko iz te informacije sklepate, da so dekleta test pisala bolje od fantov? Verjetno boste odgovorili pritrdilno. Malo natančnejši pogled pokaže, da odgovor ni tako preprost.

1.dekle	2.dekle	3.dekle
11	7	9

1. fant	2. fant	3. fant
1	11	12

Dve tretjini fantov je doseglo boljši rezultat kot katerakoli od deklet, zato ne morete trditi, da so dekleta v celoti boljša od fantov.

Vrednosti spremenljivke so namreč lahko manj ali bolj razpršene okoli povprečja, kar je videti na sliki 30:

a) za dekleta

						7	8	9		11	
						x_1	x_2	$\overline{x}$		x_3	

b) za fante

1							8			11	12
x_1							$\overline{x}$			x_2	x_3

Slika 32: Variabilnost testnih rezultatov

Lastnosti populacije so lahko kvalitetnejše, če so pojasnjujejo tudi **razpršenosti podatkov** okrog povprečne vrednosti. Parametri, ki nudijo to informacije, se imenujejo **mere variabilnosti.**

Na splošno se delijo na

- **absolutne mere variabilnosti**, kot so: variacijski razmik, povprečni absolutni odklon od aritmetične sredine, varianca in standardni odklon.
- **relativne mere variabilnosti**, kot je koeficient variabilnosti.

- **Variacijski razmik**

Variacijski razmik VR je najenostavnejša mera variabilnosti, ki se izračuna kot razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo spremenljivke.

$$\mathbf{VR = x_{max} - x_{min}}$$

Variacijski razmik je zelo odvisen od ekstremnih vrednosti, zato je slaba mera variabilnosti, ko nekatere vrednosti spremenljivke ekstremno odstopajo od večine, zato se uporablja le v kombinaciji z drugimi merami razpršenosti.

Primer variacijskega razmika testnih rezultatov:

Variacijski razmik pri testnih rezultatih za dekleta je 4, pri fantih pa 11, kar pomeni, da so posamezniki pri fantih dosegli boljše rezultate kot posamezna dekleta.

- **Povprečni absolutni odklon od aritmetične sredine**

Dokaj dobra mera razpršenosti je povprečni absolutni odklon, ki se izračunamo tako, da se izračuna absolutne odklone posameznih vrednosti spremenljivke od aritmetična sredina $\overline{x}$ ter vsoto deli s številom odklonov. Postopek za N vrednosti spremenljivke x bi torej bil naslednji:

1. Aritmetična sredina:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_N}{N}$$

2. Odkloni od aritmetične sredine:

$$x_1 - \overline{x},\ x_2 - \overline{x}, \ldots\ldots.. x_N - \overline{x}$$

3. Vsota absolutnih vrednosti odklonov se deli s številom odklonov:

$$AD = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_1 - \overline{x}|}{N}$$

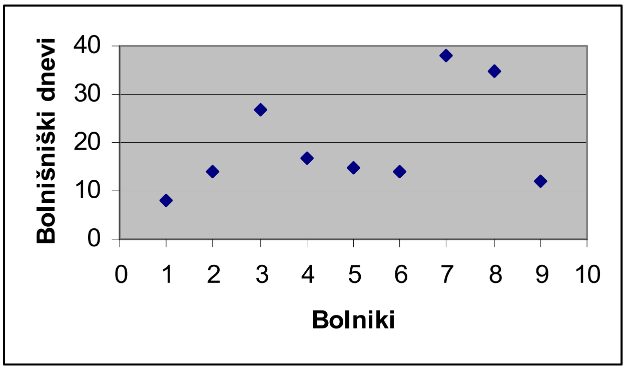
Tudi pri računanju povprečnega absolutnega odklona vam lahko pomaga EXCEL. Uporabili boste **statično funkcijo AVEDEV!**

PRIMER ZA UTRJEVANJE:

V podjetju so proučevali število bolniških dni. Zbrali so podatke o letnem številu dni za 9 voznikov, ki so zbrani v tabeli 14 in grafično prikazani na sliki 33.

Tabela 14: Število bolniških dni

Oznaka voznika	Št.bol.dni
1	8
2	14
3	27
4	17
5	15
6	14
7	38



Slika 33: Razsevni grafikon

Grafikon kaže na veliko razpršenost podatkov. Opišite problematiko bolniškega staleža na podlagi izračuna variacijskega razmika, povprečnega števila bolniških dni in absolutnega odklona! Uporabite excel!

[povprečno število dni 20; povprečni absolutni odklon 9]

- **Varianca in standardni odklon**

Odklon posameznih vrednosti od aritmetične sredine je lahko pozitiven ali negativen. Tako obstaja teoretična možnost, da bi bila vsota odklonov nič. Pri računanju povprečnega absolutnega odklona se temu izogne tako, da se izračuna absolutne odklone. Obstaja pa še druga možnost. Odklone se lahko kvadrira, saj je kvadrat negativnega števila pozitivno število. Če vsoto kvadratov odklonov delite s številom odklonov, dobite novo mero variabilnosti, ki se imenuje **varianca.** Matematični zapis variance je:

$$\textbf{Varianca}: \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

V praksi pa se ne uporablja, pač pa se uporablja kvadratni koren iz variance, ki se imenuje **standardni odklon.** To je najpomembnejša mera variabilnosti, zlasti pri proučevanju velikih populacij.

$$\textbf{Standardni odklon}: \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Sedaj izračunajte za bolniške dni iz tabele 14 še standardni odklon.

oznaka voznika	x_i	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2$
1	8	-12	144
2	14	-6	36
3	27	7	49
4	17	-3	3
5	15	-5	25
6	14	-6	36
7	38	18	324
8	35	15	225
9	12	-8	64
$\sum$	180		906

$$\sigma = \sqrt{\frac{906}{9}} = \sqrt{100{,}66} = 10{,}03 \approx 10$$

Interpretacija:

Povprečni odklon bolniških dni od aritmetične sredine za 9 voznikov je 10 bolniških dni. Podjetje se lahko odloči, da bo smatralo za sprejemljivo število bolniških dni od 10 do 30. Zdravstvenemu stanju voznikov, ki imajo v letu več kot 30 bolniških dni je potrebno posvetiti posebno pozornost.

Statistična funkcija STDEVP

Tudi pri računanju standardnega odklona si pomagajte s statistično funkcijo, ki jo ponuja EXCEL. To je statistična funkcija **STDEVP!**

Pa še primer s športnega področja!

V tabeli 15 so zbrani podatki o doseženih golih nogometnih moštev A in B na 10 tekmah.

Katero moštvo je bilo po vašem mnenju boljše!

1. Obe moštvi sta imata enako povprečje števila golov na tekmo, to je aritmetična sredina 1,5.
2. Če izračunate odklone od aritmetične sredine in jih seštejete, dobite 0.

3. Če pa izračunate standardni odklon, dobite pri moštvu A 1,2, pri moštvu B pa 1,36, kar pomeni, da je variabilnost števila golov pri moštvu A manjša kot pri B, torej je mogoče z večjo verjetnostjo pričakovati, da bo v povprečju dosegalo 1,5 gola na tekmo večkrat moštvo A.

Tabela 15: Goli nogometnih moštev na 10 tekmah

moštvo A	$x_A - \overline{x_A}$	$(x_A - \overline{x_A})^2$	moštvo B	$x_B - \overline{x_B}$	$(x_B - \overline{x_B})^2$
2	0,5	0,25	2	0,5	0,25
3	1,5	2,25	1	-0,5	0,25
3	1,5	2,25	5	3,5	12,25
1	-0,5	0,25	0	-1,5	2,25
0	-1,5	2,25	1	-0,5	0,25
2	0,5	0,25	1	-0,5	0,25
1	-0,5	0,25	0	-1,5	2,25
0	-1,5	2,25	2	0,5	0,25
0	-1,5	2,25	2	0,5	0,25
3	1,5	2,25	1	-0,5	0,25
$\sum$=15	$\sum$=0,0	$\sum$=14,5	$\sum$=15	$\sum$=0,0	$\sum$=18,5
$\overline{x_A}$ **=1,5**		σ_A^2 **=1,45**	$\overline{x_B}$ **1,5**		σ_B^2 **1,85**
		$\sigma_A = 1{,}2$			$\sigma_B = 1{,}36$

PRIMER ZA UTRJEVANJE

V bolnišnici so pacientoma Janezu in Jožetu 10 dni merili krvni pritisk. Podatki so zbrani v tabeli 16. Zdravniki menijo, da ni dobro, če pritisk preveč niha. Kako bi obdelali podatke, da bi ugotovili, pri katerem pacientu so odstopanje od povprečja večja in kolikšni sta odstopanji? Uporabite EXCEL!

Tabela 16: Krvni pritisk pacientov

kr.pritisk Janeza	$x_A - \overline{x_A}$	$(x_A - \overline{x_A})^2$	**kr.pritisk Jožeta**	$x_B - x_B$	$(x_B - \overline{x_B})^2$
175			182		
158			170		
182			186		
198			192		
150			178		
146			165		
192			174		
180			180		
157			170		
162			173		
Rezultat		σ **=17**			σ **=7,8**

Kako pa bi postopali, če imate podatke zbrane v frekvenčni tabeli?

Primer:
Kontrolor mestnega potniškega prometa je na izbranem postajališču ob določeni uri preverjal usklajenost vožnje avtobusov s predpisanim urnikom. Podatke je uredil frekvenčni tabeli (tabela 17). Zanimala ga je povprečna zamuda in standardni odklon zamud.

Postopek obdelave je

1. *Izračunate aritmetično sredino frekvenčne porazdelitve*

Aritmetična sredina grupiranih podatkov: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} f_j x_k}{N} = 10{,}8$

2. *Izračunate varianco na podoben način kot iz negrupiranih podatkov, le da računate kvadrate odklonov od sredine frekvenčnih razredov (5. in 6. stolpec), jih pomnožite s frekvenco (7. stolpec) ter vsoto delite s številom enot*

Varianca grupiranih podatkov $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} f_j (x_k - \bar{x})^2}{N} = 31{,}4$

3. *Iz variance izračunate standardni odklon.*

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{31{,}4} = 5{,}6$

Tabela 17: Zamude avtobusov mestnega prometa

zamude v min	št. avtobusov- f_j	Sredina razreda - x_k	$f_j x_k$	$x_k - \bar{x}$	$(x_k - \bar{x})^2$	$f_j (x_k - \bar{x})^2$
do 5	6	2,5	15	-8,3	68,89	413,34
od 5do10	10	7,5	75	-3,3	10,89	108,9
od 10 do 15	11	12,5	137,5	1,7	2,89	31,79
od 15 do 20	6	17,5	105	6,7	44,89	269,34
od 20 do 25	2	22,5	45	11,7	136,89	273,78
$\sum$	N=35		377,5			1097,15

Interpretacija:

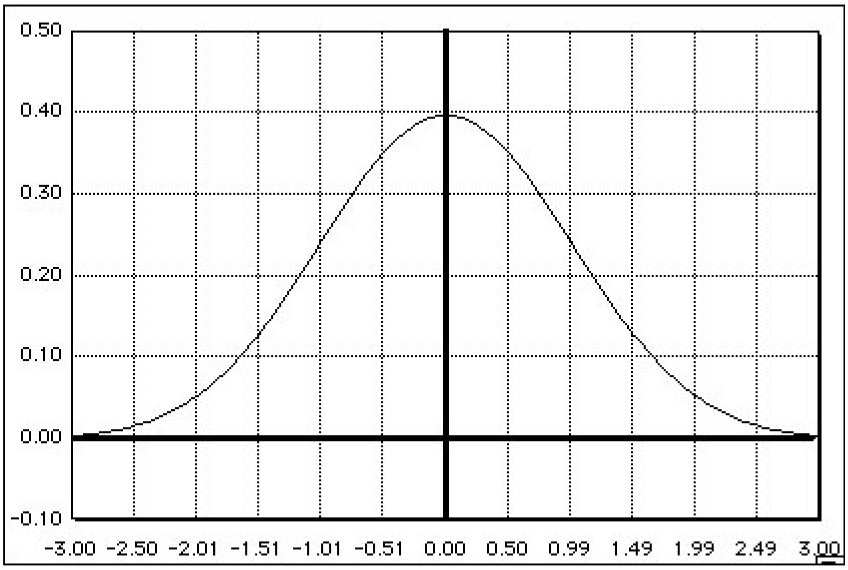
Avtobusi so v povprečju zamujali 10,8 minut, povprečni odklon od te vrednosti pa je bi 5,6 minut.

Pa še primer uporabe standardnega odklona pri proučevanju normalne porazdelitve

Standardni odklon je pomemben pri proučevanju velikih populacij. Te se namreč obnašajo tako, da se vrednosti proučevane karakteristike porazdeljeni na določenem intervalu, ki ga določa standardni odklon. Če so te vrednosti porazdeljen tako, da je

na intervalu	***% vrednosti***
$(\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma)$	***68,27%***
$(\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma)$	***95,45%***
$(\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma)$	***99,73%***

se porazdelitev imenuje NORMALNA ali GAUSSOVA porazdelitev. Takšno porazdelitev v standardizirani obliki prikazuje spodnji grafikon. Neodvisna spremenljivka je standardiziran odklon, ki je določen z formulo $z = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}$; funkcija pa je verjetnost, da ima proučevana karakteristika vrednost, ki se izračuna iz prejšnje formule $x = \overline{x} + z\sigma$.



Primer:

V podjetju so proučevali porabo materiala. Ugotovili so, da je znašala povprečna tedenska poraba 900enot, standardni odklon pa 100 enot. Kolikšne naj bi bile varnostne zaloge, da bi bil ob periodičnih tedenskih naročilih, ki so enake povprečni tedenski porabi, nivo oskrbe 95%?

95% nivo oskrbe pomeni, da je le 5% možnosti, da bo material zmanjkal, če bodo zagotovili primerne varnostne zaloge. Te morajo biti enake razliki med največjo možno porabo in povprečno porabo. Največjo možno porabo izračunate z uporabo obrazca

$$x = \overline{x} + z\sigma$$

Vrednost z-ja, ki pripada nivoju oskrbe 95% dobite iz tabele za komulativne verjetnosti normalne porazdelitve (glej DODATEK) in je 1,645.

Izračunate največjo možno porabo x= 900 + 1,645 · 100 = 1064,5

Razlika med največjo možno porabo in povprečno so varnostne zaloge, ki znašajo 164,5 enot.

- **Koeficient variabilnosti**

Spoznali ste absolutne mere variabilnosti: variacijski razmik, absolutni odklon, varianco in standardni odklon.

Kot je bilo že povedano, je najpomembnejša mera variabilnosti, ki se v praksi uporablja, standardni odklon, ki pomeni povprečni odklon vrednosti karakteristike od njene aritmetične sredine. Pomembna informacija, ki pojasnjuje gostoto vrednosti v bližini aritmetične sredine je relativna mera variabilnosti, ki v odstotkih izraža, kolikšen del aritmetične sredine predstavlja standardni odklon.

Koeficient variabilnosti KV = $\frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad v\ \%$

Koeficient variabilnosti je primeren, ko se želi primerjati variabilnost v dveh populacijah.

Primer nogometnih moštev:

KV za moštvo A: $\frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100 = \frac{1{,}2}{1{,}5} \cdot 100 = 80\%$

KV za moštvo B: $\frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100 = \frac{1{,}36}{1{,}5} \cdot 100 = 90{,}6\%$

Interpretacija:

Pri moštvu B je variiranje števila golov, ki jih dosežejo v posamezni tekmi, večje kot pri moštvu B.

POMNITE
Mere variabilnosti so statistični parametri, s katerimi opisujemo variabilnost pojavov. Absolutne mere variabilnosti so variacijski razmik, povprečni absolutni odklon, varianca in standardni odklon. Najpogosteje se je uporablja standardni odklon, ki pomeni povprečni odklon od aritmetične sredine. Relativna mera variabilnosti je variacijski razmik, ki pomeni odstotni delež standardnega odklona glede na aritmetično sredino.

6.5 KORELACIJA

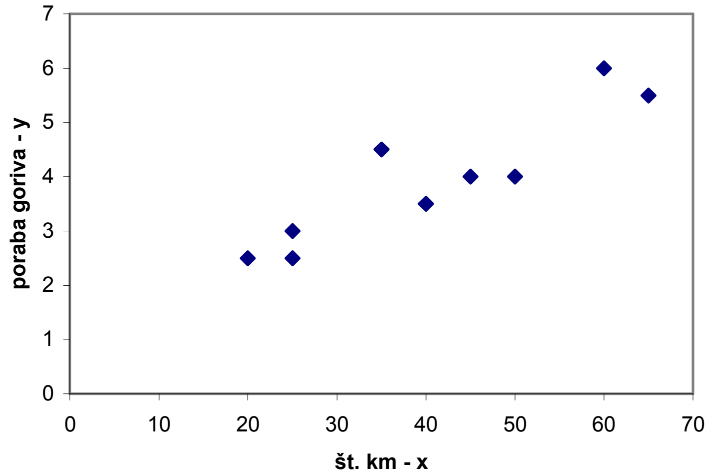
Številni so dejavniki, ki vplivajo na spreminjanje vrednosti spremenljivk, ki so predmet statističnega proučevanja.

Primer:

Voznik je za 10 voženj beležil število prevoženih kilometrov in porabo goriva. Rezultati so prikazani v tabeli 18 in na sliki 34.

Tabela 18: Poraba goriva

Št.km - x	20	35	60	35	65	50	40	25	25	45
Poraba goriva - y	2,5	4,5	6	4,5	5.5	4	3,5	2.5	3	4



Slika 34: Razsevni grafikon

Na porabo goriva ne vpliva le število prevoženih kilometrov, ampak tudi drugi, kot so hitrost, čakanje na semaforjih ali v koloni, število obratov. Če bi bila poraba odvisna le od prevoženih kilometrov, bi točke v koordinatnem sistemu ležale na premici.

V statistiki se za izražanje povezanosti spremenljivk uporablja izraz ***korelacija.*** Eden izmed parametrov, ki pojasnjuje kako močno sta povezani spremenljivki, je **Pearsonov koeficient korelacije.**

V nadaljevanju bo prikazan postopek izračuna Pearsonovega koeficienta, ki kaže na povezavo med porabo goriva in številom kilometrov. Neodvisna spremenljivka – število kilometrov je kot običajno označena z x, odvisna – poraba goriva pa z y.

Pearsonov koeficient korelacije $$r = \frac{\sum(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{X})^2 \sum(y_i - \overline{Y})^2}}$$

Postopek izračuna je prikazan v tabeli 19.

Tabela 19: Izračun korelacijskega koeficienta

št.km– X_1	gorivo– Y_i	$X_i - \overline{X}$	$Y_i - \overline{Y}$	$(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$	$(X_i - \overline{X})^2$	$(Y_i - \overline{Y})^2$
20	2,5	-20	-1,5	30	400	2,25
35	4,5	-5	0,5	-2,5	25	0,25
60	6	20	2	40	400	4
35	4,5	-5	0,5	-2,5	25	0,25
65	5,5	25	1,5	37,5	625	2,25
50	4	10	0	0	100	0
40	3,5	0	-0,5	0	0	0,25
25	2,5	-15	-1,5	22,5	225	2,25
25	3	-15	-1	15	225	1

45	4	5	0	0	25	0
∑=400	∑=40			∑=140	∑=2050	∑=12,5

Aritmetični sredini $\overline{x} = \frac{400}{10} = 40$ Aritmetična sredina $\overline{y} = \frac{40}{10} = 4$

$$r = \frac{140}{\sqrt{2050 \cdot 12{,}5}} = 0{,}875$$

Interpretacija Pearsonovega koeficienta

Vrednosti korelacijskega koeficienta se nahajajo na intervalu [-1, 1]. Na podlagi njegove predznaka in vrednosti se interpretira povezanost med spremenljivkama.

- **Predznak**

Če je $r > 0$, je povezanost **pozitivna,** kar pomeni, da povečanju spremenljivke x sledi povečanje spremenljivke y.

Če je $r < 0$, je povezanost **negativna,** kar pomeni, da povečanju spremenljivke x sledi zmanjšanje spremenljivke y.

- **absolutna vrednost**

$\mathbf{0{,}75 < r < 1}$	močna povezanost
$\mathbf{0{,}4 < r < 0{,}75}$	srednje povezanost
$\mathbf{0 < r < 0{,}4}$	šibka povezanost
$\mathbf{r = 0}$	ni povezanosti

Primer interpretacij, če r = –0,8: povezanost je močna in negativna.

PRIMER ZA UTRJEVANJE

V logističnem podjetju so raziskovali povezanost med starostjo voznikov in številom prometnih prekrškov. Zbrali so podatke za 8 voznikov. Podatki o njihovi starosti in številu prometnih prekrškov so:

starost	18	22	18	28	32	19	20	35
št.prekr.	35	30	32	40	32	25	28	34

Ali obstaja korelacija med starostjo voznikov in številom prometnih prekrškov ? Če obstaja, pojasnite kakšna je ta povezava?

[r= 0,42 Povezava je pozitivna in srednje močna.]

POMNITE

Eden izmed parametrov, s katerem se ugotavlja medsebojno povezanost opazovanih karakteristik statistične enote, je Pearsovov koeficient korelacije. Korelacija se presoja po predznaku in absolutni vrednosti Pearsonovega koeficienta se presoja korelac

6.6 LINEARNI TREND

Analizo časovnih vrst s kazalniki dinamike že poznate. Indeksi, koeficienti rasti in stopnje rasti pojasnjujejo časovno spreminjanje opazovane karakteristike v preteklem obdobju. Ni pa to edini namen proučevanja. Ob predpostavki, da se dejavniki, ki so vplivali na potek proučevanega pojava v preteklosti, ne bodo spremenili v prihodnosti, lahko na podlagi podatkov iz preteklosti predvidevate razvoj v prihodnosti.

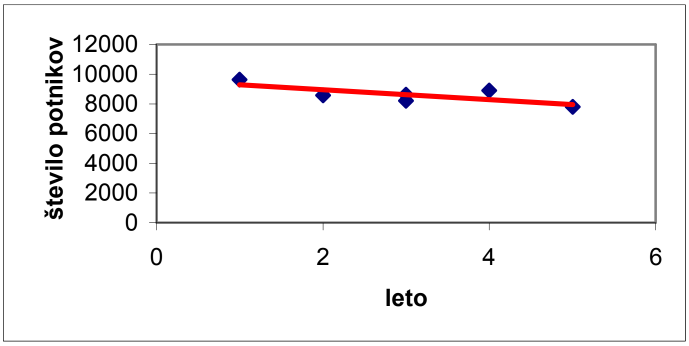
Primer:

V tabeli 20 so v drugem stolpcu zbrani podatki o številu potnikov na avtobusni liniji v preteklih petih letih. Prevoznik je na podlagi teh podatkov načrtoval število potnikov v prihodnjih petih letih. Kolikšno število potnikov lahko pričakuje?

Tabela 20: Izračun trenda števila potnikov

leto - x	**število potnikov-y**	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	9640	-2	4	-2026
2	8570	-1	1	57
3	8225	0	0	0
4	8900	1	1	273
5	7800	2	4	-1654
∑=15	**∑=43135**		**∑=10**	**∑=-3350**
$\bar{x}$**=3**	$\bar{y}$**=8627**			

Na sliki 33 je razsevni grafikon, ki kaže spreminjanje števila potnikov v petletnem obdobju. Točke, katerih ordinate predstavljajo število potnikov v posameznih letih, ležijo blizu narisane premice, ki se imenuje **trendna črta.** Če bi poznali enačbo te premice, bi lahko izračunali število potnikov tudi po petletnem obdobju. Seveda je pri tem prisotna določena stopnja tveganja. Ta je manjša, čim manjši so odkloni posameznih vrednosti od trendne črte.



Slika 35: Linearni trend števila potnikov

Kako določiti enačbo linearnega trenda?

Eksplicitno enačbo premice $y = kx + n$ poznate. Smerni koeficient k pomeni naklonski kot premice, stalni člen n pa ordinato presečišča premice s ordinatno osjo. Kako pa na podlagi statističnih podatkov o spremenljivkah določiti vrednost smernega koeficienta k in stalnega člena n?

Eden izmed postopkov je naslednji:

1. Smerni koeficient k izračunate tako, da vsoto produktov odklonov spremenljivk od njunih aritmetičnih sredin (v tabeli 20 - 5. stolpec) delite s vsoto kvadratov odklonov spremenljivke x od njene aritmetične sredine (v tabeli 20 - 4. stolpec).

$$k = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(x-\overline{x})^2} = \frac{-3350}{10} = -335$$

2. Stalni člen izračunate tako, da v enačbo premice vstavite za spremenljivki povprečne vrednosti.

$$\overline{y} = k \cdot \overline{x} + n$$
$$8627 = (-335) \cdot 3 + n \quad \rightarrow \quad n = 9632$$

Enačba premice, ki kaže trend števila potnikov je torej :

$$y = -335x + 9632$$

Kako izračunate predvideno število potnikov v naslednjem letu, čez dve leti,…?

V enačbo premice $y = -335x + 9632$ vnesete za x 6, 7,…

V naslednjem letu bo predvideno število potnikov: $y = -335 \cdot 6 + 9632 = 7622$

Čez dve leti bo predvideno število potnikov: $y = -335 \cdot 7 + 9632 = 7287$

POMNITE
Linearni trend je premica, ki podaja dolgoročno smer razvoja časovne vrste. Napoved za bodoča obdobja se izračuna s pomočjo enačbe premice linearnega trenda, katere smerni koeficient in stalni člen se izračuna iz podatkov za pretekla obdobja.

Uporaba Excelovih funkcij za linearni trend

Določanje enačbe premice linearnega trenda je brez uporabe pripomočkov, ki jih nudi EXCEL, zamudno. Za izračun parametrov enačbe trendne premice so na voljo naslednji Excelovi funkciji:

- SLOPE za izračun smernega koeficienta,
- INTERCEPT za izračun presečišča z ordinatno osjo.

Primer izračuna parametrov trenda z uporabo Excelovih funkcij

Na sliki 36 je excelova tabela, v katero so vneseni podatki o potnikih iz tabele 20. Postavite se na prazno celico, v kateri želite dobiti izračunan smerni koeficient, npr. E1 in vpišete

=SLOPE(B2:B6;A2:A6) ter potrdite. Izpiše se vrednost smernega koeficienta –335

Za izračun presečišča z ordinatno osjo vpišete v prazno celico, npr. v E2

=INTERCEPT(B2:B6;A2:A6) ter potrdite. Izpiše se vrednost ordinate presečišča 9632.

Sedaj lahko zapišete enačbo premice linearnega trenda:

y = –335x + 9632

	A	B	C	D	E
1	Leto	Št.pot.			
2	1	9640		Smerni koeficient	=SLOPE (B2:B6;A2:A6)
3	2	8570		Ordinata presečišča	=INTERCEPT(B2:B6;A2:A6)
4	3	8225			
4	4	8900			
6	5	7800			

Slika 36: Uporaba Excela za izračun parametrov linearnega trenda

V Excelu si za napovedovanje pomagate z uporabo funkcije TREND. Na sliki 37 je v C7 vpisana trendna funkcija, ki da napovedano število potnikov v letu, ki sledi zadnjemu obdobju, za katerega so v tabeli zbrani podatki. Po potrditvi vpisane funkcije se v celici izpiše 7622, za naslednji leti pa 7287 in 6952.

	A	B	C	D	E
1	Leto	Št.pot.	Napoved		
2	1	9640			
3	2	8570			
4	3	8225			
4	4	8900			
6	5	7800			
7	6		=TREND(B2:B6;A2:A6;A7)		
8	7		7287		
9	8		6952		

Slika 37: Uporaba Excela za izračun napovedi iz linearnega trenda

PRIMER ZA UTRJEVANJE

Ko ste proučevali kazalnike dinamike časovnih vrst, ste že izračunali povprečno stopnjo rasti transportnega dela na podlagi podatkov v spodnji tabeli, ki je -10,3%. Sedaj pa določite še enačbo linearnega trenda in izračunajte kolikšno bi bilo transportno delo v sedmem mesecu, če bi se trend nadaljeval! Obseg transportnega dela v prihodnosti lahko izračunate tudi s povprečno stopnjo rasti. Ali se napovedi bistveno razlikujeta? Narišite razsevni grafikon in premico linearnega trenda!

mesec	v 1000 tkm
1	5350
2	5100
3	4400

4	4030
5	3800
6	3100

[napoved na podlagi linearnega trenda 2301 tisoč tkm: napoved na podlagi povprečne stopnje rasti 2494 tisoč tkm]

POVZETEK

Na številnih primerih s področja logistike ste spoznali, da je poznavanje osnovnih pojmov, tehnik obdelave in prikazovanja podatkov, parametrov in metod izračunavanja parametrov, potrebno. Vse pa se začne pri skrbnem načrtovanju zbiranja podatkov. Katere podatke boste zbirali je odvisno od namena in cilja statističnega proučevanja, problemov, ki jih želite rešiti.

Znanja in spretnosti, ki ste si jih pridobili, vam bodo pomagale, da bodo vaša poročila vsebovala tudi izračune in interpretacije statističnih parametrov kot so:

- **relativna števila,**
- **srednje vrednosti,**
- **mere variabilnosti.**

Pomembnejša relativna števila so strukture, statistični koeficienti in kazalniki dinamike časovnih vrst. Strukture so odstotni deleži celote. Statistični koeficienti so razmerja raznovrstnih podatkov. Med kazalniki dinamike časovnih vrst so pomembni indeksi, ki izražajo spremembe proučevanja spremenljivke v različnih časovnih obdobjih. Odstotno povečanje ali zmanjšanje proučevane spremenljivke glede na predhodno obdobje izraža stopnja rasti. Med srednjimi vrednostmi so najpogosteje računa povprečne vrednosti. Postopki so različni, odvisno od parametra, katerega povprečje računate. Za računanje povprečja proučevane lastnosti statističnih enot se računa aritmetična sredina po obrazcu:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j}{N}$$

Za računanje povprečja koeficienta dinamike časovnih vrst se računa geometrijska sredina:

$$\overline{K} = \sqrt[n-1]{\frac{Y_n}{Y_1}}$$

Med merami variabilnosti je najpomembnejši standardni odklon, ki pomeni povprečni odklon od aritmetične sredine.

$$\zeta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N}}$$

Za pojasnjevanje vplivov raznih dejavnikov na potek dogodkov boste uporabljali Pearsonov koeficient korelacije. Pri načrtovanju se ne boste prepustili intuiciji, pač pa boste predloge planov argumentirali z linearnim trendom.

Seveda pa so znanja in spretnosti, ki ste si jih pridobili, le tista temeljna znanja, ki naj bi jih imel srednji menedžment. Za zahtevnejše statistične raziskave so potrebna poglobljena znanja, tako s področja statistike kot matematike, saj je statistika le njena uporabna veda.

Če vam razlaga in primeri za utrjevanje niso zadoščali vam priporočam e-gradiva s področja statistike na spletnem naslovu www.inter-es.si/met/index.php?id=0.

LITERATURA IN VIRI

Čižman, A. Logistični management v organizaciji. Kranj: Moderna organizacija, 2002

Hvalica, D. Linearno programiranje in njegova uporaba. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 2005

Košmelj, B. Statistika. Ljubljana: DZS, 1996

Lavrih, L. Poslovno napovedovanje. Grosuplje. Samozaložba, 2005

Levine, D. M., Stephan D. F. Even jou can learn statistics. Upper Saddle River: Pearson education, 2005

Pustavrh, S. Matematika s statistiko. Novo mesto: Šolski center Novo mesto, Višja strokovna šola, 2007

Šadl, M. Statistika za komercialiste. Murska Sobota: Ekonomska šola, Višja strokovna šola, 2002

Šparovec, J. in drugi. Linea: matematika za 1. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan, 2002

Šparovec, J. in drugi. Planum: matematika za 2. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan, 2003

Šparovec, J. in drugi. Spatium: matematika za 3. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan, 2004

Šparovec, J. in drugi. Tempus: matematika za 4. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan, 2005

Statistični urad republike Slovenije. Statistične informacije , št. 36/2008 . Pridobljeno 28.2.2009 s svetovnega spleta http://www.stat.si/publikacije/pub_statinf.asp

Projekt **Impletum**
Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju 2008–11
Konzorcijski partnerji:

Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007–2013, razvojne prioritete 'Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja' in prednostne usmeritve 'Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja'.